פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י"ב (שאלון 572) • 34 שאלות

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{1}{e^x-1}+\frac{5}{e^x-5}+a$.

a הוא פרמטר.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

ב. הוכיחו כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

נתון כי הישר $y=2$ הוא אסימפטוטה של הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את שני הערכים האפשריים של a.

הציבו $a=2$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ו.

ד. הראו כי $f(x)=\frac{2e^{2x}-6e^x}{e^{2x}-6e^x+5}$.

ה. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־x.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי ציר ה־x ועל ידי הישר $x=\ell n2$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנים אינם יכולים להתאפס:

$$e^x-1\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 0$$
$$e^x-5\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq \ln 5$$

תשובה: $x\neq 0,\ x\neq \ln 5$

סעיף א (2)

אסימפטוטות אנכיות: בנקודות שבהן מכנה מתאפס והמונה לא: $x=0$ ו־$x=\ln 5$.

אסימפטוטות אופקיות:

כאשר $x\to\infty$: $e^x\to\infty$, ולכן שני השברים שואפים ל־0:

$$f(x)\to 0+0+a=a$$

כאשר $x\to-\infty$: $e^x\to 0$, ולכן:

$$f(x)\to \frac{1}{-1}+\frac{5}{-5}+a=a-2$$

תשובה: $x=0,\ x=\ln 5,\ y=a,\ y=a-2$

סעיף ב

נגזור כל שבר לפי $\left(\frac{c}{g}\right)' = -\frac{c\,g'}{g^2}$:

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} - \frac{5e^x}{(e^x-5)^2}$$

בכל תחום ההגדרה $e^x > 0$ והריבועים במכנים חיוביים, ולכן כל אחד משני המחוברים שלילי, וסכומם שלילי: $f'(x) < 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

תשובה: $f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} - \frac{5e^x}{(e^x-5)^2} < 0$ **בכל תחום ההגדרה.**

סעיף ג

האסימפטוטות האופקיות הן $y = a$ ו־$y = a - 2$. הישר $y = 2$ הוא אחת מהן:

$a = 2$, או $a - 2 = 2$ כלומר $a = 4$.

תשובה: $a = 2$ **או** $a = 4$

סעיף ד

עם $a = 2$ נעבור למכנה משותף $(e^x-1)(e^x-5)$:

$$f(x) = \frac{(e^x-5)+5(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x-5)} + \frac{2(e^x-1)(e^x-5)}{(e^x-1)(e^x-5)}$$

נפתח את המונה:

$$e^x - 5 + 5e^x - 5 + 2e^{2x} - 12e^x + 10$$
$$= 2e^{2x} - 6e^x$$

והמכנה: $(e^x-1)(e^x-5) = e^{2x} - 6e^x + 5$. לכן:

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - 6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5}$$

תשובה: הוכח: $f(x) = \frac{2e^{2x} - 6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5}$

סעיף ה (1)

נשווה את המונה לאפס:

$$2e^{2x} - 6e^x = 0$$
$$2e^x(e^x - 3) = 0$$

$e^x > 0$, ולכן $e^x = 3$, כלומר $x = \ln 3$ (בתחום ההגדרה).

תשובה: $(\ln 3,\ 0)$

סעיף ה (2)

עם $a = 2$ האסימפטוטות הן:

- אנכיות: $x = 0$ ו־$x = \ln 5 \approx 1.61$.
- אופקית מימין ($x \to \infty$): $y = 2$.
- אופקית משמאל ($x \to -\infty$): $y = 0$.

לפי סעיף ב, הפונקצייה יורדת בכל אחד משלושת הקטעים:

- $x < 0$: יורדת מ־0 אל $-\infty$.
- $0 < x < \ln 5$: יורדת מ־$+\infty$ אל $-\infty$, וחותכת את ציר ה־x בנקודה $(\ln 3, 0)$.
- $x > \ln 5$: יורדת מ־$+\infty$ אל 2.

סקיצה של f: אסימפטוטות x=0, x=ln5, y=2, y=0; חיתוך עם ציר x ב-(ln3,0)

תשובה: סקיצה: יורדת בכל קטע, חותכת את ציר ה־x ב־$(\ln 3, 0)$. אסימפטוטות אנכיות: $x = 0,\ x = \ln 5$**. אופקיות:** $y = 0,\ y = 2$**.**

סעיף ו

$0 < x < \ln 5$ נמצא בקטע $\ln 2 \approx 0.69$. בקטע זה f יורדת ומתאפסת ב־$x = \ln 3$, ולכן בין $\ln 2$ ל־$\ln 3$ הגרף מעל ציר ה־x. השטח:

$$S = \int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx$$

המונה הוא הנגזרת של המכנה:

$$(e^{2x} - 6e^{x} + 5)' = 2e^{2x} - 6e^{x}$$

ולכן פונקציה קדומה היא:

$$F(x) = \ln\left|e^{2x} - 6e^{x} + 5\right|$$

נציב את הגבולות. נשתמש ב:

$$e^{2\ln 3} = 9, \quad e^{2\ln 2} = 4$$

$$S = \ln|9 - 18 + 5| - \ln|4 - 12 + 5|$$

$$= \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3} \approx 0.288$$

תשובה: $S = \ln\frac{4}{3} \approx 0.288$

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=8\cdot \ell n(x^2+7)-2x$, המוגדרת לכל x .

א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי הפונקצייה $f(x)$ חותכת את ציר ה־ x בנקודה אחת בלבד.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\ell n(f(x)-18)$, המוגדרת בתחום שבו $f(x)>18$.

ד. **(1)** כמה אסימפטוטות מאונכות לציר ה־ x יש לפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

05

פתרון מלא

סעיף א

נגזור ($(\ln u)'=\frac{u'}{u}$):

$$f'(x)=\frac{8\cdot 2x}{x^2+7}-2=\frac{16x-2x^2-14}{x^2+7}$$

$$f'(x)=\frac{-2(x^2-8x+7)}{x^2+7}$$

$$=\frac{-2(x-1)(x-7)}{x^2+7}$$

$f'(x)=0$ עבור $x=1$ ו־$x=7$. המכנה חיובי תמיד, ולכן הסימן נקבע לפי $-2(x-1)(x-7)$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<1$	$-$	↘
1	0	מינ'

$x > 7$	$-$	↘
7	0	מקס'
$+1 < x < 7$		↗

$$f(1) = 8\ln 8 - 2 \approx 14.64$$
$$f(7) = 8\ln 56 - 14 \approx 18.20$$

מינימום ב־$(1,\ 8\ln 8 - 2)$ ומקסימום ב־$(7,\ 8\ln 56 - 14)$.
תשובה: מינימום: $(1,\ 14.64)$**. מקסימום:** $(7,\ 18.20)$**.**

סעיף ב

נגזור שוב (הנגזרת של $2-$ היא 0), לפי כלל המנה:

$$f''(x) = \frac{16(x^2+7) - 16x \cdot 2x}{(x^2+7)^2}$$
$$f''(x) = \frac{16(7 - x^2)}{(x^2+7)^2}$$

$f''(x) = 0$ עבור $x = \pm\sqrt{7}$. המכנה חיובי, ולכן:

- $f'' > 0$ (קעורה כלפי מעלה) כאשר $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$.
- $f'' < 0$ (קעורה כלפי מטה) כאשר $x < -\sqrt{7}$ או $x > \sqrt{7}$.

תשובה: קעורה כלפי מעלה: $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$**; קעורה כלפי מטה:** $x < -\sqrt{7}$ **או** $x > \sqrt{7}$**.**

סעיף ג

נאסוף את הנתונים: מינימום $(1, 14.64)$, מקסימום $(7, 18.20)$, נקודות פיתול ב־$x = \pm\sqrt{7}$, חיתוך עם ציר ה־y ב־$(0,\ 8\ln 7) \approx (0, 15.57)$, וחיתוך אחד עם ציר ה־$x$ (מימין ל־$x = 7$, כי שם הפונקצייה יורדת לאינסוף שלילי).

כאשר $x \to -\infty$: $f(x) \to \infty$; כאשר $x \to \infty$: $f(x) \to -\infty$ (האיבר $2x-$ גובר על הלוגריתם).

סקיצה של f: מינימום (1,14.64), מקסימום (7,18.20), נקודות פיתול ב-x=±√7, חותכת את ציר x פעם אחת

תשובה: סקיצה: יורדת עד מינימום $(1, 14.64)$**, עולה עד מקסימום** $(7, 18.20)$**, ואחר כך יורדת וחותכת את ציר ה־**x **פעם אחת.**

סעיף ד (1)

g מוגדרת כאשר $f(x) > 18$, ויש לה אסימפטוטה אנכית בכל נקודה שבה $f(x) = 18$ (שם $f(x) \to 0^+$ ולכן $g(x) \to -\infty$).

נספור את הפתרונות של $f(x) = 18$ לפי סעיף א:

- $x < 1$: f יורדת מ־∞ אל $14.64 < 18$ – פתרון אחד.
- $1 < x < 7$: f עולה מ־14.64 אל $18 < 18.20$ – פתרון אחד.
- $x > 7$: f יורדת מ־18.20 אל $-\infty$ – פתרון אחד.

לכן יש שלוש נקודות כאלה. נסמן אותן:

$$x_1 < x_2 < x_3$$

תחום ההגדרה של g:

$$x < x_1, \qquad x_2 < x < x_3$$

תשובה: 3 אסימפטוטות אנכיות

סעיף ד (2)

נגזור לפי $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x) - 18}$$

בתחום ההגדרה המכנה חיובי, ולכן ל־g' ול־f' יש אותו סימן.

$f' = 0$ רק ב־$x = 1$ וב־$x = 7$. הנקודה $x = 1$ אינה בתחום של g, כי $f(1) \approx 14.64 < 18$.

לכן הקיצון היחיד הוא ב־$x = 7$. שם f, ולכן גם g, עוברת מעלייה לירידה – זו נקודת מקסימום:

$$g(7) = \ln(f(7) - 18)$$
$$= \ln(8\ln 56 - 32) \approx -1.60$$

תשובה: מקסימום $(7,\ -1.60)$

סעיף ד (3)

- $x < x_1$: כאשר $x \to -\infty$, $f \to \infty$ ולכן $g \to \infty$. g יורדת (כמו f) אל $-\infty$ ליד x_1. בדרך היא חותכת את ציר ה־x (שם $f(x) = 19$).
- $x_2 < x < x_3$: g עולה מ־$-\infty$ אל המקסימום $(7, -1.60)$, ואחר כך יורדת אל $-\infty$. כל הענף הזה מתחת לציר ה־x.

סקיצה של g: שני ענפים, אסימפטוטות אנכיות x1, x2, x3, מקסימום (7,-1.60)

תשובה: סקיצה: שני ענפים; שלוש אסימפטוטות אנכיות; ענף שמאלי יורד מ־∞ ל־$-\infty$, ענף ימני מתחת לציר עם מקסימום $(7, -1.60)$.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^n \cdot (3 - \ell nx)$, המוגדרת בתחום $x > 0$.

n הוא פרמטר טבעי.

א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2.

ב. מצאו את הערך של n.

הציבו $n = 1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ו.

ג. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ה. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

a הוא פרמטר, $1 < a < 3$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = e$ ו־ $x = e^a$ הוא $\ell n10$.

ו. מצאו את הערך של a.

פתרון מלא

סעיף א

תחום ההגדרה: $x > 0$. נשווה ל־0:

$$x^n(3 - \ln x) = 0$$

$x^n > 0$ בתחום, ולכן:

$$3 - \ln x = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = 3 \;\Rightarrow\; x = e^3$$

תשובה: $(e^3,\ 0)$

סעיף ב

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = nx^{n-1}(3 - \ln x) + x^n \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$$
$$= x^{n-1}\left(3n - n\ln x - 1\right)$$

נציב $x = 1$ ($\ln 1 = 0$) ונשווה לשיפוע 2:

$$f'(1) = 1 \cdot (3n - 0 - 1) = 3n - 1$$
$$3n - 1 = 2 \;\Rightarrow\; n = 1$$

תשובה: $n = 1$

סעיף ג

נציב $n=1$ ונקבל $f(x)=x(3-\ln x)$. לפי סעיף ב:

$$f'(x)=3-\ln x-1=2-\ln x$$
$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \ln x=2 \;\Rightarrow\; x=e^2$$
$$f(e^2)=e^2(3-2)=e^2$$

x		$f'(x)$	$f(x)$
$0<x<e^2$	$+$	>0	↗
$x=e^2$	0	$=0$	מקס'
$x>e^2$	$-$	<0	↘

בדיקה: $f'(1)=2>0$ ו־$f'(e^3)=-1<0$.

תשובה: מקסימום $(e^2,\ e^2)$

סעיף ד

נאסוף את הנתונים:

- תחום ההגדרה $x>0$.
- כאשר $x\to 0^+$ מתקיים $f(x)\to 0$ (כי $x\ln x\to 0$), אבל הנקודה $(0,0)$ אינה שייכת לגרף.
- עולה עד המקסימום (e^2,e^2) ויורדת אחריו.
- חותכת את ציר ה־x בנקודה $(e^3,0)$.
- כאשר $x\to\infty$ מתקיים $f(x)\to-\infty$.

סקיצה של f: מתחילה ליד הראשית, מקסימום (e²,e²), חותכת את ציר x ב־e³ ויורדת למינוס אינסוף

תשובה: מקסימום (e^2,e^2)

חיתוך עם ציר ה־x**:** $(e^3,0)$

מתחילה ליד הראשית (שאינה על הגרף) ויורדת ל־$-\infty$

סעיף ה (1)

$g(x)=\frac{1}{f(x)}$ מוגדרת כאשר f מוגדרת ושונה מ־0. f מוגדרת ל־$x>0$ ומתאפסת רק ב־$x=e^3$ (סעיף א).

תשובה: $x>0,\ x\neq e^3$

סעיף ה (2)

אנכיות: כאשר $x\to e^3$ מתקיים $f(x)\to 0$, ולכן $|g(x)|\to\infty$. אסימפטוטה:

$$x=e^3$$

כאשר $x\to 0^+$ מתקיים $f(x)\to 0^+$, ולכן $g(x)\to+\infty$. אסימפטוטה:

$$x=0$$

אופקית: כאשר $x\to\infty$ מתקיים $f(x)\to-\infty$, ולכן $g(x)\to 0^-$. אסימפטוטה (מימין):

$$y=0$$

תשובה: אנכיות: $x=0,\ x=e^3$

אופקית (מימין): $y=0$

סעיף ה (3)

$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, ולכן ל־$g$ סימן נגזרת הפוך לזה של f:

- בקטע $0 < x < e^2$ הפונקצייה f עולה, ולכן g יורדת.
- עבור $x > e^2$ (פרט ל־e^3) הפונקצייה f יורדת, ולכן g עולה.

במקסימום של f יש ל־g מינימום: $g(e^2) = \frac{1}{e^2}$. בקטע $0 < x < e^3$ מתקיים $f > 0$, ולכן גם $g > 0$. עבור $x > e^3$ מתקיים $g < 0$, והיא עולה מ־$-\infty$ אל 0.

סקיצה של g: מינימום (e²,1/e²) בין האסימפטוטות x=0 ו־x=e³, ומימין ל־e³ עולה ממינוס אינסוף אל 0

תשובה: בקטע $0 < x < e^3$: חיובית, מינימום $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$

עבור $x > e^3$: שלילית ועולה אל $y = 0$

סעיף ו

נתון $1 < a < 3$, ולכן $e < e^a < e^3$. הקטע כולו בתוך $0 < x < e^3$, ושם $g > 0$. השטח:

$$S = \int_e^{e^a} \frac{dx}{x(3 - \ln x)}$$

נשים לב שהנגזרת של $3 - \ln x$ היא $-\frac{1}{x}$, ולכן:

$$\int \frac{dx}{x(3 - \ln x)} = -\ln(3 - \ln x) + C$$

$$S = -\ln(3 - a) + \ln(3 - 1)$$

$$= \ln \frac{2}{3 - a}$$

$$\ln \frac{2}{3 - a} = \ln 10$$

$$\frac{2}{3 - a} = 10 \;\Rightarrow\; 3 - a = 0.2$$

$$a = 2.8$$

תשובה: $a = 2.8$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=4e^x-x+9\cdot \ell n(4-e^x)$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. הראו כי $f'(x)=\frac{-4(e^x-1)^2}{4-e^x}$.

ג. **(1)** מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ המקביל לציר ה־ x.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x<\ell n4$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x)+ax$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

a הוא פרמטר.

ו. היעזרו בגרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ומצאו בעבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה $g(x)$ שתי נקודות קיצון.

נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הביטוי $\ln(4-e^x)$ מוגדר כאשר:

$$4-e^x>0 \;\Rightarrow\; e^x<4 \;\Rightarrow\; x<\ln 4$$

שאר האיברים מוגדרים לכל x.

תשובה: $x<\ln 4$

סעיף א (2)

אנכית: כאשר $x\to \ln 4^-$ מתקיים $4-e^x\to 0^+$. לכן $\ln(4-e^x)\to -\infty$, וגם $f(x)\to -\infty$.
אסימפטוטה:

$$x=\ln 4$$

אופקית: אפשר לבדוק רק $x\to -\infty$ (התחום חסום מימין). כאשר $x\to -\infty$:

$$4e^x\to 0, \qquad 9\ln(4-e^x)\to 9\ln 4$$

והאיבר x שואף ל־$-\infty$. לכן $f(x)\to +\infty$, ואין אסימפטוטה אופקית.

תשובה: אנכית: $x=\ln 4$
אין אסימפטוטה אופקית

סעיף ב

נגזור (הנגזרת של $\ln(4-e^x)$ היא $\frac{-e^x}{4-e^x}$):

$$f'(x)=4e^x-1-\frac{9e^x}{4-e^x}$$

מכנה משותף:

$$=\frac{(4e^x-1)(4-e^x)-9e^x}{4-e^x}$$

$$= \frac{16e^x - 4e^{2x} - 4 + e^x - 9e^x}{4 - e^x}$$
$$= \frac{-4e^{2x} + 8e^x - 4}{4 - e^x}$$
$$= \frac{-4\left(e^{2x} - 2e^x + 1\right)}{4 - e^x}$$
$$= \frac{-4(e^x - 1)^2}{4 - e^x}$$

תשובה: הוכח: $f'(x) = \frac{-4(e^x-1)^2}{4-e^x}$

סעיף ג (1)

בתחום $x < \ln 4$ המכנה $4 - e^x$ חיובי, והמונה $-4(e^x - 1)^2$ אינו חיובי. לכן $f'(x) \le 0$ לכל x בתחום.
הנגזרת מתאפסת רק כאשר $e^x = 1$, כלומר ב־$x = 0$.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < 0$	$-$	↘
0	0	פיתול
$0 < x < \ln 4$	$-$	↘

הנגזרת לא מחליפה סימן ב־$x = 0$, ולכן אין שם קיצון: הפונקצייה יורדת בכל תחום הגדרתה.

תשובה: יורדת בכל תחום ההגדרה $x < \ln 4$
אין תחום עלייה

סעיף ג (2)

משיק מקביל לציר ה־x – שיפועו 0, כלומר $f'(x) = 0$, ולפי ג (1) זה קורה רק ב־$x = 0$:

$$f(0) = 4e^0 - 0 + 9\ln(4 - 1)$$
$$= 4 + 9\ln 3$$

תשובה: $y = 4 + 9\ln 3 \approx 13.89$

סעיף ד

נאסוף את הנתונים:

- יורדת בכל התחום $x < \ln 4$.
- כאשר $x \to -\infty$ מתקיים $f \to +\infty$.
- כאשר $x \to \ln 4^-$ מתקיים $f \to -\infty$ (אסימפטוטה $x = \ln 4$).
- בנקודה $(0,\ 4 + 9\ln 3)$ המשיק אופקי (נקודת פיתול).
- הגרף חותך את ציר ה־x פעם אחת, קרוב ל־$\ln 4$ (אין צורך במיקום המדויק – המשוואה אינה נפתרת אלגברית).

סקיצה של f: יורדת מפלוס אינסוף, משיק אופקי בנקודה (0, 4+9ln3), ויורדת למינוס אינסוף ליד האסימפטוטה x=ln4

תשובה: יורדת בכל התחום
משיק אופקי ב־$(0,\ 4 + 9\ln 3)$
אסימפטוטה: $x = \ln 4$

סעיף ה (1)

הנגזרת $f'(x) = \frac{-4(e^x-1)^2}{4-e^x}$ מוגדרת באותו תחום, $x < \ln 4$.

אנכית: כאשר $x \to \ln 4^-$ המכנה שואף ל־0^+ והמונה שואף ל־$-4 \cdot 3^2 = -36$. לכן $f'(x) \to -\infty$, ויש אסימפטוטה:

$$x = \ln 4$$

אופקית: כאשר $x \to -\infty$ מתקיים $e^x \to 0$, ולכן:

$$f'(x) \to \frac{-4(0-1)^2}{4-0} = -1$$

אסימפטוטה (משמאל):

$$y = -1$$

תשובה: אנכית: $x = \ln 4$
אופקית (משמאל): $y = -1$

סעיף ה (2)

לפי ג (1), $f'(x) \leq 0$ ומתאפסת רק ב־$x = 0$. לכן לגרף של f' יש מקסימום בנקודה $(0,0)$, והוא משיק שם לציר ה־x.

הנקודה $x = 0$ היא נקודת הפיתול היחידה של f, ולכן זו נקודת הקיצון היחידה של f'. משמאל ל־0 הנגזרת f' עולה מ־-1 אל 0, ובין 0 ל־$\ln 4$ היא יורדת מ־0 אל $-\infty$.

סקיצה של f': עולה מהאסימפטוטה y=-1 עד מקסימום (0,0), ויורדת למינוס אינסוף ליד x=ln4

תשובה: מקסימום: $(0,0)$
אסימפטוטה משמאל: $y = -1$
אסימפטוטה אנכית: $x = \ln 4$

סעיף ו

$g(x) = f(x) + ax$, ולכן:

$$g'(x) = f'(x) + a$$

נקודת קיצון של g היא נקודה שבה g' מתאפסת ומחליפה סימן, כלומר נקודה שבה הגרף של f' חותך את הישר $y = -a$.

לפי הסקיצה של f' (ה (2)):

- אם $-1 < -a < 0$, הישר $y = -a$ חותך את גרף f' פעמיים: פעם משמאל ל־0 (שם f' עולה מ־-1 ל־0) ופעם מימין ל־0. בכל חיתוך g' מחליפה סימן, ולכן יש שתי נקודות קיצון.
- אם $-a \leq -1$, יש חיתוך אחד בלבד (מימין ל־0), ולכן נקודת קיצון אחת.
- אם $-a = 0$, הישר משיק לגרף בנקודה $(0,0)$ בלי החלפת סימן, ולכן אין קיצון. אם $-a > 0$, אין חיתוך כלל.

לכן שתי נקודות קיצון בדיוק כאשר:

$$-1 < -a < 0 \;\Rightarrow\; 0 < a < 1$$

תשובה: $0 < a < 1$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 4

4. $f'(x)$ הוא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת $g(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־$g(x)$ מוגדרות בתחום $x\neq 0$.

נתון כי הפונקצייה $f(x)$ יורדת בתחום $x>0$ ובתחום $x<0$,

וכי $f'(x)\neq 0$ בכל תחום הגדרתה.

א. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמקו את תשובתכם.

נתון כי $f(x)=\frac{1}{x}$.

ב. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 1.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{\ell na}$ ו־ $x=\frac{1}{\ell n(4a)}$ הוא 5.

ד. מצאו את הערך של a.

פתרון מלא

סעיף א

$f(x)$ יורדת בכל אחד מהתחומים $x>0$ ו־$x<0$, ולכן $f'(x)\leq 0$ שם. נתון $f'(x)\neq 0$, ולכן:

$$f'(x)<0$$

לכל $x\neq 0$. בנוסף $e^{f(x)}>0$ תמיד. מכפלה של מספר שלילי במספר חיובי היא שלילית:

$$g(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}<0$$

תשובה: $g(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה ($x<0$ ו־$x>0$); אין לה תחום חיוביות.

סעיף ב (1)

עם $f(x)=\frac{1}{x}$: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, ולכן:

$$g(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

ליד $x=0$:

- $x\to 0^+$: $\frac{1}{x}\to\infty$, והמכפלה $\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\to\infty$, ולכן $g(x)\to-\infty$.
- $x\to 0^-$: נסמן $u=\frac{1}{x}\to-\infty$. אז $g=-u^2e^u\to 0$ (האקספוננט שואף לאפס מהר יותר).

לכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית מימין בלבד.

כאשר $x\to\pm\infty$: $e^{\frac{1}{x}}\to 1$ ו־$\frac{1}{x^2}\to 0$, ולכן $g(x)\to 0$: אסימפטוטה אופקית $y=0$.

תשובה: $x=0$ (מימין), $y=0$

סעיף ב (2)

נגזור לפי כלל המכפלה ($\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$):

$$g'(x) = \frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$$
$$-\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$$
$$g'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}(2x+1)$$

$\frac{e^{1/x}}{x^4} > 0$, ולכן הסימן של g' הוא הסימן של $2x+1$. $g' = 0$ עבור $x = -\frac{1}{2}$:

x	$g'(x)$	$g(x)$
$x < -\frac{1}{2}$	$-$	↘
$-\frac{1}{2}$	0	מינ'
$-\frac{1}{2} < x < 0$	$+$	↗
$x > 0$	$+$	↗

$$g\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -4e^{-2} = -\frac{4}{e^2} \approx -0.54$$

תשובה: מינימום: $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{4}{e^2}\right) \approx (-0.5,\ -0.54)$

סעיף ג

הגרף כולו מתחת לציר ה־x. משמאל: יורד מ־0 (אסימפטוטה $y=0$) עד המינימום $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{e^2}\right)$, ואז עולה ושואף ל־$0$ כאשר $x \to 0^-$ (הראשית אינה בגרף – עיגול ריק). מימין: עולה מ־$-\infty$ (ליד $x = 0^+$) ושואף ל־0 כאשר $x \to \infty$.

סקיצה של g: מתחת לציר x, מינימום (-0.5,-e²/4), אסימפטוטה x=0 מימין ו-y=0

תשובה: סקיצה: כולה מתחת לציר ה־x; מינימום $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{e^2}\right)$; אסימפטוטות $x = 0$ (מימין) ו־$y = 0$.

סעיף ד

נתון $a > 1$, ולכן:

$$0 < \ln a < \ln(4a)$$

ולכן:

$$0 < \frac{1}{\ln(4a)} < \frac{1}{\ln a}$$

בקטע הזה $g(x) < 0$, ולכן השטח הוא מינוס האינטגרל.

$g = f' \cdot e^f$, ולכן פונקציה קדומה של g היא:

$$G(x) = e^{f(x)} = e^{\frac{1}{x}}$$

בגבולות: $\frac{1}{x} = \ln a$ או $\frac{1}{x} = \ln(4a)$, ולכן:

$$\int_{\frac{1}{\ln(4a)}}^{\frac{1}{\ln a}} g(x)\,dx = e^{\ln a} - e^{\ln(4a)}$$
$$= a - 4a = -3a$$

השטח הוא $3a$:

$$3a = 5 \ \Rightarrow\ a = \frac{5}{3}$$

תשובה: $a = \frac{5}{3}$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{1}{x}\left(a+\frac{1}{(\ell nx)^2}\right)$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד בנקודה שבה $x=\frac{1}{e}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ו.

$g(x)$ היא פונקצייה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x)=f(x)$.

תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע שלפונקצייה $g(x)$ יש נקודת פיתול שנמצאת על ציר ה־ x .

ג. מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

בעבור הפונקצייה $g(x)$ שמצאתם ענו על הסעיפים ד–ו.

ד. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x .

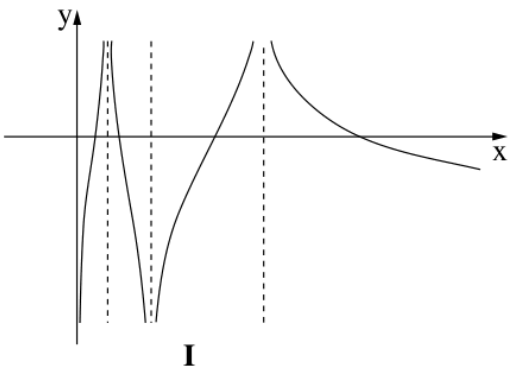
(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

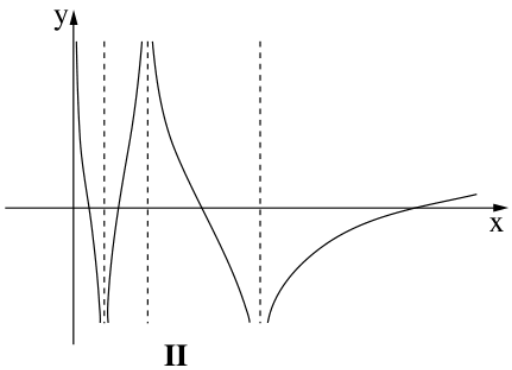
נתונה הפונקצייה $h(x)=\ell n\left|g(x)\right|$.

ו. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

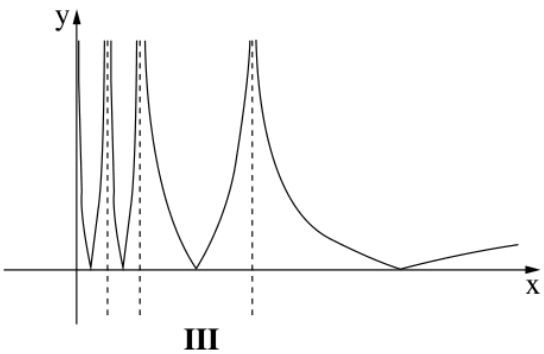
(2) אחד מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקצייה $h(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



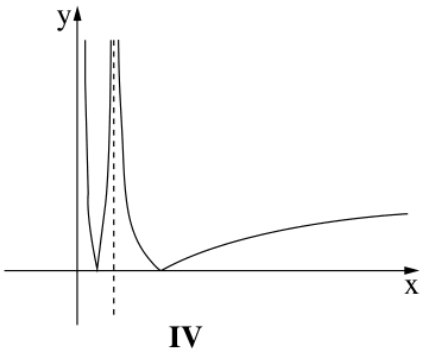
I



II



III



IV

פתרון מלא

סעיף א

$\ln x$ מוגדר עבור $x > 0$. בנוסף אסור שמכנה יתאפס: $x \neq 0$ ו־$\ln x \neq 0$, כלומר $x \neq 1$.

תשובה: $x > 0,\ x \neq 1$

סעיף ב

נכתוב את הפונקצייה כסכום:

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{x \ln^2 x}$$

הנגזרת של המכנה $x \ln^2 x$ היא $\ln^2 x + 2 \ln x$, ולכן:

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{x^2 \ln^4 x}$$

בנקודת קיצון $f' = 0$. נציב $x = \frac{1}{e}$, שבה $\ln x = -1$:

$$-ae^2 - \frac{1 - 2}{e^{-2} \cdot 1} = 0$$
$$-ae^2 + e^2 = 0 \ \Rightarrow \ a = 1$$

בדיקה שעבור $a = 1$ זו נקודת הקיצון היחידה: נסמן $u = \ln x$. המונה של f' (אחרי כינוס) הוא:

$$-(u^4 + u^2 + 2u)$$
$$= -u(u+1)(u^2 - u + 2)$$

$u \neq 0$, ו־$u^2 - u + 2 > 0$ תמיד (דיסקרימיננטה שלילית). לכן $f' = 0$ רק עבור $u = -1$, והסימן מתחלף שם.

תשובה: $a = 1$

סעיף ג

$g'(x) = f(x)$ עם $a = 1$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln^2 x}$$

נמצא פונקציה קדומה. למחובר הראשון: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$. למחובר השני נשתמש בנגזרת:

$$\left(-\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{1}{x \ln^2 x}$$

ולכן:

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} + C$$

$g'' = f'$, ולפי סעיף ב f' מתאפסת ומחליפה סימן רק ב־$x = \frac{1}{e}$. לכן נקודת הפיתול של g היא ב־$x = \frac{1}{e}$, והיא על ציר ה־x:

$$g\left(\tfrac{1}{e}\right) = -1 - \frac{1}{-1} + C = C = 0$$
$$g(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$$

שימו לב: תחום ההגדרה מורכב משני קטעים ($0 < x < 1$ ו־$x > 1$), ולכן להלכה אפשר לבחור קבוע אחר בקטע $x > 1$. השאלה מבקשת פונקצייה אחת כזו – בוחרים את אותו קבוע, כמו במפתח.

תשובה: $g(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$

סעיף ד (1)

- $x \to 0^+$: $\ln x \to -\infty$ ו־$\frac{1}{\ln x} \to 0^-$, ולכן $g(x) \to -\infty$ – אסימפטוטה $x = 0$.
- $x \to 1$: $\ln x \to 0$, ולכן $\frac{1}{\ln x} \to \pm\infty$ – אסימפטוטה $x = 1$.
- $x \to \infty$: $g(x) \to \infty$ – אין אסימפטוטה אופקית.

תשובה: $x = 0,\ x = 1$ **(אין אסימפטוטה אופקית)**

סעיף ד (2)

$$\ln x - \frac{1}{\ln x} = 0$$

נכפול ב־$\ln x \neq 0$:

$$\ln^2 x = 1 \ \Rightarrow\ \ln x = \pm 1$$
$$x = e, \qquad x = \frac{1}{e}$$

תשובה: $\left(\frac{1}{e},\ 0\right)$ **ו־**$(e,\ 0)$

סעיף ד (3)

$$g'(x) = f(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln^2 x}\right)$$

בתחום ההגדרה $x > 0$, ושני הגורמים חיוביים, ולכן $g'(x) > 0$.

תשובה: עולה בתחומים $0 < x < 1$ **ו־**$x > 1$**; אין תחומי ירידה.**

סעיף ה

- $0 < x < 1$: עולה מ־$-\infty$ (ליד $x = 0$) אל $+\infty$ (ליד $x = 1$), וחותכת את ציר ה־x ב־$\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ – שם גם נקודת הפיתול.
- $x > 1$: עולה מ־$-\infty$ (ליד $x = 1$) אל $+\infty$, וחותכת את ציר ה־x ב־$(e, 0)$.

סקיצה של g: שני ענפים עולים, אסימפטוטות x=0 ו-x=1, חיתוכים (e,0/1) ו-(e,0)

תשובה: סקיצה: שני ענפים עולים; אסימפטוטות $x = 0,\ x = 1$**; חיתוכים** $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ **ו־**$(e, 0)$**.**

סעיף ו (1)

$h(x) = \ln|g(x)|$ מוגדרת כאשר g מוגדרת ו־$g(x) \neq 0$:

$$x > 0, \quad x \neq 1$$
$$x \neq \frac{1}{e}, \quad x \neq e$$

תשובה: $x > 0$**,** $x \neq \frac{1}{e},\ x \neq 1,\ x \neq e$

סעיף ו (2)

נבדוק את ההתנהגות של h:

- ליד $x = 0^+$ וליד $x = 1$: $|g| \to \infty$, ולכן $h \to +\infty$.
- ליד $x = \frac{1}{e}$ וליד $x = e$: $|g| \to 0$, ולכן $h \to -\infty$.
- כאשר $x \to \infty$: $g \to \infty$, ולכן $h \to \infty$; ובתחום $x > e$ הפונקצייה g חיובית ועולה, ולכן גם h עולה.

כלומר ל־h יש ארבע אסימפטוטות אנכיות: $x=0,\ \frac{1}{e},\ 1,\ e$. ליד ציר ה־$y$ הגרף עולה לפלוס אינסוף, ליד $x=\frac{1}{e}$ יורד למינוס אינסוף, ליד $x=1$ עולה לפלוס אינסוף, ליד $x=e$ יורד למינוס אינסוף, ומימין ל־e הוא עולה.

- גרפים III ו־IV אף פעם לא יורדים למינוס אינסוף – לא מתאימים.
- בגרף I הגרף יורד למינוס אינסוף ליד ציר ה־y, והענף הימני שלו יורד – לא מתאים.
- גרף II מתאים לכל התכונות.

תשובה: גרף II

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-x}+b$, המוגדרת לכל x.

b הוא פרמטר.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־y.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=1.5$.

ב. מצאו את הערך של b (מצאו את שתי האפשרויות).

הציבו בפונקצייה $f(x)$ את הערך של b הקטן ביותר שמצאתם, וענו על הסעיפים ג–ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־y היא אחת משתי נקודות הפיתול של הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת לכל x.

ד. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. לפניכם טענה: $\int_0^1 (f(x)-1.5)\,dx > \frac{1}{e-1}$.

האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה $e^x - x$ חיובי לכל x (לכן אין אסימפטוטה אנכית).

כאשר $x \to \infty$: נחלק מונה ומכנה ב־e^x:

$$\frac{e^x + x}{e^x - x} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} \to \frac{1+0}{1-0} = 1$$

לכן $f(x) \to 1 + b$.

כאשר $x \to -\infty$: מתקיים $e^x \to 0$, ונחלק ב־x:

$$\frac{e^x + x}{e^x - x} = \frac{\frac{e^x}{x} + 1}{\frac{e^x}{x} - 1} \to \frac{0+1}{0-1} = -1$$

לכן $f(x) \to b - 1$.

תשובה: מימין: $y = b + 1$

משמאל: $y = b - 1$

סעיף א (2)

$$f(0) = \frac{1+0}{1-0} + b = 1 + b$$

תשובה: $(0,\ 1+b)$

סעיף א (3)

נגזור לפי כלל המנה (הפרמטר b נעלם בגזירה):

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)(e^x-x)-(e^x+x)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$$

נפתח את המונה:

$$e^{2x}-xe^x+e^x-x$$
$$-\left(e^{2x}-e^x+xe^x-x\right)$$
$$=2e^x-2xe^x=2e^x(1-x)$$
$$f'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$$

$f'(x)=0$ רק כאשר $x=1$. המכנה ו־$2e^x$ חיוביים, ולכן הסימן נקבע לפי $1-x$:

x		$f'(x)$	$f(x)$
$x<1$	$+$		↗
1	0		מקס'
$1<x$	$-$		↘

$$f(1)=\frac{e+1}{e-1}+b$$

תשובה: מקסימום $\left(1,\ \frac{e+1}{e-1}+b\right)$

סעיף ב

לפי א (1) האסימפטוטות האופקיות הן $y=b+1$ ו־$y=b-1$. אחת מהן היא $y=1.5$:

$$b+1=1.5\ \Rightarrow\ b=0.5$$
$$b-1=1.5\ \Rightarrow\ b=2.5$$

תשובה: $b=0.5$ **או** $b=2.5$

סעיף ג

נציב $b=0.5$ (הערך הקטן) ונאסוף את הנתונים:

- אסימפטוטה $y=1.5$ כאשר $x\to\infty$, ואסימפטוטה $y=-0.5$ כאשר $x\to-\infty$.
- חיתוך עם ציר ה־y בנקודה $(0,\ 1.5)$.
- עולה עד המקסימום $(1,\ 2.66)\approx\left(1,\ \frac{e+1}{e-1}+0.5\right)$, ואחריו יורדת אל האסימפטוטה $y=1.5$.
- משמאל הגרף מתחיל קרוב ל־$y=-0.5$ ועולה, ולכן חותך את ציר ה־x פעם אחת (אין צורך במיקום המדויק – המשוואה אינה נפתרת אלגברית).

סקיצה של f עבור b=0.5: אסימפטוטות y=-0.5 משמאל ו־y=1.5 מימין, עוברת דרך (0,1.5), מקסימום (1, 2.66)

תשובה: אסימפטוטה משמאל: $y=-0.5$

אסימפטוטה מימין: $y=1.5$

חיתוך עם ציר ה־y: $(0,\ 1.5)$

מקסימום: $(1,\ 2.66)$

סעיף ד (1)

$$f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$

כאשר $x \to \infty$**:** נחלק ב־e^{2x}:

$$f'(x) = \frac{\frac{2(1-x)}{e^x}}{\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)^2} \to \frac{0}{1} = 0$$

כאשר $x \to -\infty$**:** המונה $2e^x(1-x) \to 0$ (e^x שואף ל־0 מהר יותר מש־$1-x$ גדל), והמכנה $(e^x - x)^2 \to \infty$, ולכן $f'(x) \to 0$.

אין אסימפטוטה אנכית, כי f' מוגדרת לכל x והמכנה חיובי.

תשובה: $y = 0$ **בשני הצדדים**

סעיף ד (2)

נאסוף את הנתונים:

- $f'(0) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{1^2} = 2$. הנקודה $x = 0$ היא נקודת פיתול של f, ולכן נקודת קיצון של f': מקסימום $(0, 2)$.
- משמאל ל־1 הנגזרת חיובית, ב־$x = 1$ היא מתאפסת, ומימין ל־1 היא שלילית.
- ל־f יש נקודת פיתול נוספת מימין ל־1, ושם ל־f' יש מינימום (שלילי).
- בשני הצדדים f' שואפת ל־0.

סקיצה של f': מקסימום (0,2), מתאפסת ב־x=1, מינימום שלילי מימין ל־1, ושואפת ל־0 בשני הצדדים

תשובה: מקסימום: $(0,\ 2)$

מתאפסת ב־$x = 1$

מינימום שלילי מימין ל־1

אסימפטוטה: $y = 0$

סעיף ה

הטענה נכונה.

עם $b = 0.5$, בקטע $0 \le x \le 1$ הפונקצייה f עולה מ־$f(0) = 1.5$ עד $f(1) = \frac{e+1}{e-1} + 0.5$. נגדיר $h(x) = f(x) - 1.5$:

$$h(0) = 0$$

$$h(1) = \frac{e+1}{e-1} - 1 = \frac{2}{e-1}$$

לפי סעיף ד (2), f' יורדת בקטע $0 < x \le 1$ (מהמקסימום שלה ב־0 ועד המינימום שמימין ל־1). לכן f – וגם h – קעורה ($\cap$) בקטע. נראה שהגרף של h נמצא מעל המיתר שמחבר את $(0,0)$ ו־$\left(1, \frac{2}{e-1}\right)$:

נגדיר $d(x) = h(x) - \frac{2}{e-1}x$ (ההפרש בין הגרף למיתר). אז $d(0) = d(1) = 0$, ו־$d'(x) = h'(x) - \frac{2}{e-1}$ יורדת בקטע (כי $h' = f'$ יורדת). אילו $d'(0) \le 0$, היה $d' < 0$ בכל הקטע, d יורדת ו־$d(1) < 0$ – סתירה. באותו אופן $d'(1) < 0$. לכן d' מחליפה סימן פעם אחת מ־$+$ ל־$-$: d עולה ואחר כך יורדת, ולכן $d(x) > 0$ לכל $0 < x < 1$.

השטח מתחת למיתר הוא שטח משולש:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$

הגרף של h נמצא ממש מעל המיתר בתוך הקטע, ולכן:

$$\int_0^1 \left(f(x) - 1.5\right) dx > \frac{1}{e-1}$$

(לבדיקה בלבד – לא נדרש ולא מותר כדרך פתרון בבחינה: האינטגרל בערך 0.769, ו־$\frac{1}{e-1} \approx 0.582$.)

תשובה: הטענה נכונה.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x\cdot \ell n(x)}{1+\ell n(x)}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה־ x של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1+\ell n(x)}{x\cdot \ell n(x)}$.

ד. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתון הביטוי $\int_{e^k}^{e^{2k}}\left(\frac{1}{x\cdot \ell n(x)}+\frac{1}{x}\right)dx$, k הוא פרמטר גדול מ־ 1.

ה. **(1)** קבעו איזה מן הביטויים I–II שווה לערך של הביטוי הנתון. נמקו את קביעתכם.

I. $k+\ell n(k)$ **II.** $k+\ell n2$

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=e^3$ ו־ $x=e^6$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

צריך $x>0$ (בגלל $\ln x$), והמכנה שונה מ־0:

$$1+\ln x\neq 0 \;\Rightarrow\; \ln x\neq -1 \;\Rightarrow\; x\neq \frac{1}{e}$$

תשובה: $x>0,\ x\neq \frac{1}{e}$

סעיף א (2)

ב־ $x=\frac{1}{e}$ המכנה מתאפס, והמונה שם:

$$\frac{1}{e}\cdot \ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}\neq 0$$

לכן $x=\frac{1}{e}$ היא אסימפטוטה אנכית.

ב־ $x\to 0^+$ אין אסימפטוטה: $x\ln x\to 0$ ו־ $1+\ln x\to -\infty$, ולכן $f(x)\to 0$.

תשובה: $x=\frac{1}{e}$

סעיף א (3)

$$f(x)=0 \;\Rightarrow\; x\ln x=0$$

בתחום $x>0$, ולכן $\ln x=0$, כלומר $x=1$.

תשובה: $(1,\ 0)$

סעיף ב

נגזור לפי כלל המנה. הנגזרת של המונה: $(x\ln x)' = \ln x + 1$.

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(1+\ln x) - x\ln x \cdot \frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}$$
$$= \frac{(1+\ln x)^2 - \ln x}{(1+\ln x)^2}$$
$$= \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{(1+\ln x)^2}$$

נסמן $t = \ln x$. במונה $t^2 + t + 1$ הדיסקרימיננטה שלילית ($1 - 4 < 0$) והמקדם של t^2 חיובי, ולכן המונה חיובי תמיד. גם המכנה חיובי, ולכן $f'(x) > 0$ בכל התחום.

תשובה: עולה בתחום $0 < x < \frac{1}{e}$

עולה בתחום $x > \frac{1}{e}$

אין תחום ירידה

סעיף ג

נאסוף את הנתונים:

- בתחום $0 < x < \frac{1}{e}$: מתחילה ליד הראשית ($f \to 0$, הנקודה $(0,0)$ אינה על הגרף) ועולה ל־$+\infty$ כאשר $x \to \frac{1}{e}^-$.
- בתחום $x > \frac{1}{e}$: עולה מ־$-\infty$, חותכת את ציר ה־x ב־$(1,0)$ וממשיכה לעלות.

סקיצה של f: עולה מהראשית אל פלוס אינסוף משמאל לאסימפטוטה x=1/e, ומימינה עולה ממינוס אינסוף דרך (1,0)

תשובה: עולה בשני הענפים

אסימפטוטה: $x = \frac{1}{e}$

חיתוך עם ציר ה־x: $(1,0)$

סעיף ד (1)

צריך $x > 0$, והמכנה $x\ln x \neq 0$, כלומר $\ln x \neq 0$:

$$x \neq 1$$

(ב־$x = \frac{1}{e}$ הפונקצייה g מוגדרת: $g(\frac{1}{e}) = 0$.)

תשובה: $0 < x < 1$ **או** $x > 1$

סעיף ד (2)

אנכיות: כאשר $x \to 1$ המכנה $x\ln x \to 0$ והמונה שואף ל־1, ולכן אסימפטוטה:

$$x = 1$$

כאשר $x \to 0^+$ מתקיים $x\ln x \to 0^-$ ו־$1 + \ln x \to -\infty$, ולכן $g(x) \to +\infty$. אסימפטוטה:

$$x = 0$$

אופקית: נכתוב $g(x) = \frac{1}{x\ln x} + \frac{1}{x}$. כאשר $x \to \infty$ שני המחוברים שואפים ל־0. אסימפטוטה:

$$y = 0$$

תשובה: אנכיות: $x = 0,\ x = 1$

אופקית: $y = 0$

סעיף ד (3)

מתקיים $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ (פרט ל־$x=\frac{1}{e}$, שם $g=0$). לכן $g'=-\frac{f'}{f^2}<0$: g יורדת בתחום $0<x<1$ ובתחום $x>1$.

- בתחום $0<x<1$: יורדת מ־$+\infty$, חותכת את ציר ה־x ב־$\left(\frac{1}{e},0\right)$ ושואפת ל־$-\infty$ כאשר $x\to 1^-$.
- בתחום $x>1$: יורדת מ־$+\infty$ אל האסימפטוטה $y=0$, וחיובית.

סקיצה של g: משמאל ל־x=1 יורדת מפלוס אינסוף דרך (e,0/1) למינוס אינסוף; מימין ל־1 יורדת מפלוס אינסוף אל y=0

תשובה: יורדת בשני הענפים

חיתוך עם ציר ה־x: $\left(\frac{1}{e},0\right)$

אסימפטוטות: $x=0,\ x=1,\ y=0$

סעיף ה (1)

נפרק את הביטוי שבאינטגרל לשני מחוברים:

$$\frac{1+\ln x}{x\ln x}=\frac{1}{x\ln x}+\frac{1}{x}$$

פונקציה קדומה של $\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}$ היא $\ln(\ln x)$ (לפי $\int\frac{f'}{f}=\ln|f|$, ובקטע $\ln x>0$):

$$\int_{e^k}^{e^{2k}}\left(\frac{1}{x\ln x}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\Big[\ln(\ln x)+\ln x\Big]_{e^k}^{e^{2k}}$$
$$=\ln(2k)+2k-\ln k-k$$
$$=\ln\frac{2k}{k}+k=k+\ln 2$$

לכן הביטוי II הוא הנכון.

תשובה: ביטוי II: $k+\ln 2$

סעיף ה (2)

בקטע $e^3\le x\le e^6$ מתקיים $x>1$, ושם $g(x)>0$. לכן השטח הוא האינטגרל של g מ־e^3 עד e^6, וזה הביטוי מ־ה (1) עם $k=3$:

$$S=3+\ln 2\approx 3.69$$

תשובה: $S=3+\ln 2\approx 3.69$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^x}{a-e^x}$, a הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(3) בעבור $a>0$ ובעבור $a<0$.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה־ y של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$ בעבור $a=3$ ואיזה מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$ בעבור $a=-3$. נמקו את קביעותיכם.

הציבו $a=3$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ה.

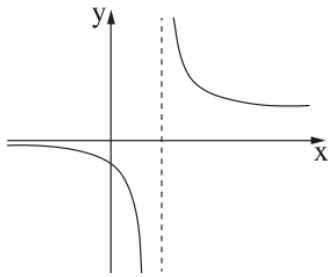
נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{f(x)+2}$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

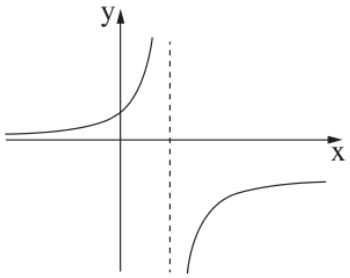
(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

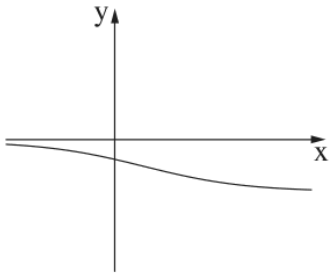
ה. לפניכם טענה: $\int_{-4}^{-2}g(x)\,dx > \int_{2}^{3}g(x)\,dx$. האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.



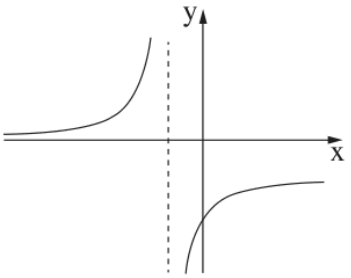
I



II



III



IV

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה אינו יכול להתאפס, כלומר צריך $e^x \neq a$.

- כאשר $a > 0$, המשוואה $e^x = a$ מתקיימת ב־$x = \ln a$, ולכן התחום הוא $x \neq \ln a$.
- כאשר $a < 0$ תמיד $e^x > a$, ולכן המכנה לא מתאפס והפונקצייה מוגדרת לכל x.

תשובה: כאשר $a > 0$ התחום הוא $x \neq \ln a$; כאשר $a < 0$ – כל x.

סעיף א (2)

אסימפטוטות המאונכות לציר ה־y הן אופקיות:

כאשר $x \to \infty$ נחלק מונה ומכנה ב־e^x:

$$f(x) = \frac{1}{ae^{-x} - 1} \to \frac{1}{0 - 1} = -1$$

כאשר $x \to -\infty$: $e^x \to 0$, ולכן:

$$f(x) \to \frac{0}{a - 0} = 0$$

זה נכון גם עבור $a > 0$ וגם עבור $a < 0$.

תשובה: $y = -1$ (כאשר $x \to \infty$) ו־$y = 0$ (כאשר $x \to -\infty$), בשני המקרים.

סעיף א (3)

לפי כלל המנה:

$$f'(x) = \frac{e^x(a - e^x) - e^x \cdot (-e^x)}{(a - e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{a\, e^x}{(a - e^x)^2}$$

המכנה חיובי ו־$e^x > 0$, ולכן סימן f' הוא סימן a:

- כאשר $a > 0$, $f' > 0$: הפונקצייה עולה בתחומים $x < \ln a$ ו־$x > \ln a$.
- כאשר $a < 0$, $f' < 0$: הפונקצייה יורדת לכל x.

תשובה: כאשר $a > 0$ – עולה ב־$x < \ln a$ וב־$x > \ln a$; כאשר $a < 0$ – יורדת לכל x.

סעיף ב

עבור $a = 3$: יש אסימפטוטה אנכית $x = \ln 3$, מימין לציר ה־y (כי $\ln 3 > 0$). האסימפטוטות האופקיות: $y = 0$ משמאל ו־$y = -1$ מימין. הפונקצייה עולה בכל ענף. משמאל לאסימפטוטה המכנה חיובי ולכן הפונקצייה חיובית, ומימין לה היא שלילית. זה גרף II.

עבור $a = -3$:

$$f(x) = -\frac{e^x}{3 + e^x}$$

אין אסימפטוטה אנכית, הפונקצייה שלילית ויורדת לכל x, מ־0 (משמאל) אל -1 (מימין). זה גרף III.

תשובה: עבור $a = 3$ – גרף II; עבור $a = -3$ – גרף III.

סעיף ג (1)

הפונקצייה g מוגדרת כאשר f מוגדרת, כלומר $x \neq \ln 3$, וגם המכנה $f(x) + 2 \neq 0$. נבדוק מתי הוא מתאפס:

$$\frac{e^x}{3-e^x} = -2$$
$$e^x = -6 + 2e^x \;\Rightarrow\; e^x = 6$$

כלומר $x \neq \ln 6$.

נוח לפשט:

$$f(x) + 2 = \frac{6-e^x}{3-e^x}$$
$$g(x) = \frac{3-e^x}{6-e^x}, \quad x \neq \ln 3$$

תשובה: $x \neq \ln 3,\ x \neq \ln 6$

סעיף ג (2)

אנכית: בנקודה $x = \ln 6$ המכנה $6 - e^x$ מתאפס, והמונה שם הוא $3 - 6 = -3 \neq 0$. לכן $x = \ln 6$ אסימפטוטה אנכית.

בנקודה $x = \ln 3$ אין אסימפטוטה: שם $g \to 0$, וזו נקודה חסרה.

אופקיות:

$$x \to \infty:\ g = \frac{3e^{-x}-1}{6e^{-x}-1} \to 1$$
$$x \to -\infty:\ g \to \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

תשובה: אנכית: $x = \ln 6$**. אופקיות:** $y = 1$ **(מימין) ו־** $y = \frac{1}{2}$ **(משמאל).**

סעיף ד

נגזור:

$$g'(x) = \frac{-e^x(6-e^x) + e^x(3-e^x)}{(6-e^x)^2}$$
$$g'(x) = \frac{-3e^x}{(6-e^x)^2} < 0$$

לכן g יורדת בכל ענף:

- $x < \ln 3$ ו־$\ln 3 < x < \ln 6$: יורדת מ־$\frac{1}{2}$ אל $-\infty$, ועוברת ב־$(\ln 3, 0)$ – נקודה שאינה בגרף (עיגול ריק), ולכן מחריגים אותה מתחום הירידה.
- $x > \ln 6$: יורדת מ־$+\infty$ אל 1.


סקיצה של g: יורדת בשני ענפים, אסימפטוטות x=ln6, y=1, y=1/2, נקודה חסרה (ln3,0)

תשובה: סקיצה: יורדת בשני ענפים; אסימפטוטות $x = \ln 6,\ y = 1,\ y = \frac{1}{2}$**; נקודה חסרה** $(\ln 3, 0)$**.**

סעיף ה

נשווה כל אינטגרל לשטח של מלבן.

הקטע השמאלי נמצא משמאל ל־$\ln 6$. שם g יורדת מתחת ל־$\frac{1}{2}$ ונשארת חיובית, ולכן $0 < g(x) < \frac{1}{2}$. אורך הקטע הוא 2:

$$\int_{-4}^{-2} g\,dx < 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

הקטע הימני נמצא מימין ל־$\ln 6 \approx 1.79$. שם g יורדת אל 1, ולכן $g(x) > 1$. אורך הקטע הוא 1:

$$\int_2^3 g\,dx > 1 \cdot 1 = 1$$

לכן האינטגרל השמאלי קטן מהימני, והטענה אינה נכונה. בחישוב מקורב:

$$\int_{-4}^{-2} g\,dx \approx 0.99, \quad \int_2^3 g\,dx \approx 1.66$$

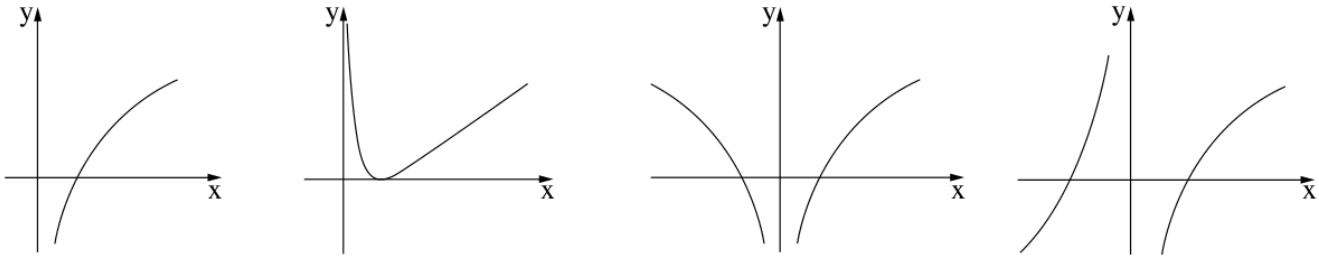
תשובה: הטענה אינה נכונה ($\int_{-4}^{-2} g < 1 < \int_2^3 g$).

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 5

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\ln(x^n)$, n הוא מספר טבעי זוגי.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) לפניכם ארבעה גרפים, I–IV. קבעו איזה מהם מייצג את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.



I II III IV

הציבו $n=2$ בפונקציה $f(x)$, וענו על סעיפים ב–ד.

נתונה הפונקציה $g(x)=(f(x))^2-4$, המוגדרת לכל $x\neq 0$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה־x.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $k(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$, בתחום $x>0$.

ד. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $k(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $k(x)$, על ידי ציר ה־x ועל ידי הישרים $x=e^2$ ו־$x=e^3$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הלוגריתם מוגדר כאשר $x^n>0$. מכיוון ש־n זוגי, $x^n>0$ לכל $x\neq 0$.

תשובה: $x\neq 0$

סעיף א (2)

מכיוון ש־n זוגי, $(-x)^n=x^n$ ו־$f(-x)=f(x)$: הפונקציה זוגית והגרף שלה סימטרי ביחס לציר ה־y.
בנוסף היא מוגדרת גם עבור $x<0$.

- גרפים III ו־IV מופיעים רק עבור $x>0$ – נפסלים.
- גרף I אינו סימטרי ביחס לציר ה־y – נפסל.

לכן הגרף המתאים הוא II.

תשובה: גרף II (מוגדרת לכל $x\neq 0$ וזוגית).

סעיף ב (1)

עם $n=2$: $f(x)=\ln(x^2)$, ו:

$$g(x)=\ln^2(x^2)-4=0$$

$$\ln(x^2)=2,\qquad \ln(x^2)=-2$$
$$x^2=e^2\ \Rightarrow\ x=\pm e$$
$$x^2=e^{-2}\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{1}{e}$$

תשובה: $(\pm e,\ 0)$**,** $\left(\pm\frac{1}{e},\ 0\right)$

סעיף ב (2)

לפי כלל השרשרת, עם $f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$:

$$g'(x)=2\ln(x^2)\cdot\frac{2}{x}=\frac{4\ln(x^2)}{x}$$

$g'=0$ כאשר $\ln(x^2)=0$, כלומר $x=\pm1$.

x	$g'(x)$	$g(x)$
$x<-1$	$-$	↘
-1	0	מינ'
$-1<x<0$	$+$	↗
$0<x<1$	$-$	↘
1	0	מינ'
$x>1$	$+$	↗

$$g(\pm1)=\ln^2 1-4=-4$$

תשובה: מינימום: $(1,-4)$ **ו־**$(-1,-4)$

סעיף ג

הפונקצייה g זוגית. כאשר $x\to0$: $\ln(x^2)\to-\infty$, ולכן $g\to+\infty$ – אסימפטוטה $x=0$. כאשר $x\to\pm\infty$: $g\to+\infty$. מינימום ב־$(\pm1,-4)$, וחיתוכים עם ציר ה־x ב־$\pm\frac{1}{e}$ וב־$\pm e$.

סקיצה של g: זוגית, אסימפטוטה x=0, מינימום (1±,-4), חיתוכים e, ±e/±1

תשובה: סקיצה: סימטרית לציר ה־y**; אסימפטוטה** $x=0$**; מינימום** $(\pm1,-4)$**; חיתוכים** $\pm e,\ \pm\frac{1}{e}$**.**

סעיף ד (1)

k מוגדרת בתחום $x>0$ כאשר המכנה $g(x)\neq0$. לפי סעיף ב(1) (עבור $x>0$): $x\neq\frac{1}{e}$ ו־$x\neq e$.

תשובה: $x>0,\ x\neq\frac{1}{e},\ x\neq e$

סעיף ד (2)

בקטע $e^2\le x\le e^3$ מתקיים $x>e$, ולכן $g(x)>0$ וגם $g'(x)>0$. כלומר $k(x)>0$, והשטח שווה לאינטגרל.

הפונקצייה k היא מהצורה $\frac{g'}{g}$, ולכן פונקציה קדומה שלה היא:

$$K(x)=\ln|g(x)|$$

עבור $x>0$ מתקיים $\ln(x^2)=2\ln x$, ולכן:

$$g(e^2)=4^2-4=12$$
$$g(e^3)=6^2-4=32$$
$$S=\ln 32-\ln 12=\ln\frac{8}{3}\approx0.98$$

תשובה: $S = \ln \frac{8}{3} \approx 0.98$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=e^x-\frac{1}{1-e^x}$. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל $x\neq 0$.

א. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) האם לגרף הפונקצייה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים? נמקו את תשובתכם.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=-x+\ell n(e^x-1)$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) הראו כי $g'(x)=f(x)-e^x$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

בנקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ מעבירים אנך לציר ה־x.

ד. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי ציר ה־x, על ידי האנך ועל ידי הישר $x=\ell n(b)$.

$b>2$ הוא פרמטר. הביעו את תשובתכם באמצעות b.

נתון כי השטח שמצאתם בסעיף ד שווה ל־$b-2+\ell n(1.5)$.

ה. מצאו את הערך של b.

פתרון מלא

סעיף א (1)

אסימפטוטה אנכית: המכנה $1-e^x$ מתאפס כאשר $x=0$ והמונה שונה מאפס. לכן:

$$x=0$$

אסימפטוטה אופקית: כאשר $x\to-\infty$ מתקיים

$$e^x\to 0$$

$$f(x)\to 0-\frac{1}{1-0}=-1$$

כאשר $x\to\infty$ הביטוי e^x שואף לאינסוף והשבר שואף ל־0. לכן גם $f(x)$ שואפת לאינסוף ואין אסימפטוטה בצד ימין. האסימפטוטה האופקית היא בצד שמאל:

$$y=-1$$

תשובה: אנכית: $x=0$
אופקית (משמאל): $y=-1$

סעיף א (2)

ציר ה־y: הנקודה $x=0$ אינה בתחום ההגדרה ולכן אין חיתוך.

ציר ה־x: נשווה ל־0 ונסמן $t=e^x$ כאשר $t>0$:

$$t-\frac{1}{1-t}=0$$
$$t(1-t)=1$$
$$t^2-t+1=0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

הדיסקרימיננטה שלילית ולכן אין פתרון.

תשובה: אין נקודות חיתוך עם הצירים.

סעיף א (3)

הנגזרת של $\frac{1}{1-e^x}$ היא $\frac{e^x}{(1-e^x)^2}$, ולכן:

$$f'(x) = e^x - \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$$
$$= e^x \left(1 - \frac{1}{(1-e^x)^2}\right)$$

$f'(x) = 0$ כאשר $(1-e^x)^2 = 1$:

$$1 - e^x = 1 \;\Rightarrow\; e^x = 0$$

(אין פתרון)

$$1 - e^x = -1 \;\Rightarrow\; e^x = 2 \;\Rightarrow\; x = \ln 2$$
$$f(\ln 2) = 2 - \frac{1}{1-2} = 3$$

סימן הנגזרת לפי $(1-e^x)^2$ לעומת 1:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < 0$	$-$	↘
$0 < x < \ln 2$	$-$	↘
$\ln 2$	0	מינ'
$x > \ln 2$	$+$	↗

תשובה: מינימום: $(\ln 2,\ 3)$

סעיף ב

נאסוף את הנתונים:

- משמאל ל־0 הגרף מתחיל קרוב לאסימפטוטה $y = -1$ ויורד. ליד 0 הוא יורד למינוס אינסוף.
- מימין ל־0 הגרף יורד מפלוס אינסוף עד המינימום $(\ln 2, 3)$ ואחריו עולה לאינסוף.
- אין חיתוך עם הצירים.

סקיצה של f: משמאל ל־0 יורדת מהאסימפטוטה y=-1 למינוס אינסוף, מימין ל־0 יורדת מפלוס אינסוף עד מינימום (ln2,3) ועולה

תשובה: משמאל ל־0: יורדת מהאסימפטוטה $y = -1$ **אל** $-\infty$

מימין ל־0: מינימום $(\ln 2, 3)$

אסימפטוטות: $x = 0$ **ו־**$y = -1$

סעיף ג (1)

$$e^x - 1 > 0 \;\Rightarrow\; e^x > 1 \;\Rightarrow\; x > 0$$

תשובה: $x > 0$

סעיף ג (2)

נגזור את g:

$$g'(x) = -1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$
$$= \frac{-(e^x - 1) + e^x}{e^x - 1}$$
$$= \frac{1}{e^x - 1}$$

מצד שני:

$$f(x) - e^x = -\frac{1}{1 - e^x}$$
$$= \frac{1}{e^x - 1}$$

ולכן לכל $x > 0$ מתקיים $g'(x) = f(x) - e^x$.

תשובה: הוכח $g'(x) = \frac{1}{e^x - 1} = f(x) - e^x$

סעיף ד

האנך עובר בנקודה $x = \ln 2$. בתחום שמימין ל־0 הפונקציה חיובית כי המינימום שלה הוא 3. לכן השטח הוא האינטגרל של f בין $\ln 2$ ל־$\ln b$.

מסעיף ג (2) נובע:

$$f(x) = e^x + g'(x)$$

ולכן פונקציה קדומה של f היא $e^x + g(x)$:

$$S = \Big[e^x + g(x)\Big]_{\ln 2}^{\ln b}$$
$$g(\ln b) = -\ln b + \ln(b - 1)$$
$$g(\ln 2) = -\ln 2 + \ln 1 = -\ln 2$$
$$S = b - 2 - \ln b$$
$$\quad + \ln(b - 1) + \ln 2$$
$$S = b - 2 + \ln \frac{2(b - 1)}{b}$$

תשובה: $S = b - 2 + \ln \frac{2(b-1)}{b}$

סעיף ה

$$b - 2 + \ln \frac{2(b - 1)}{b} = b - 2 + \ln 1.5$$
$$\frac{2(b - 1)}{b} = 1.5$$
$$2b - 2 = 1.5b \;\Rightarrow\; b = 4$$

תשובה: $b = 4$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{a+\ell nx}{x}$, המוגדרת בתחום $x>0$. a הוא פרמטר.

א. בתת־סעיפים (1)–(3) הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{x}$, המוגדרת בתחום $x\neq 0$.

נתון כי גרף הפונקצייה $f(x)$ וגרף הפונקצייה $g(x)$ נחתכים בנקודה שבה $x=e^2$.

ג. מצאו את הערך של a .

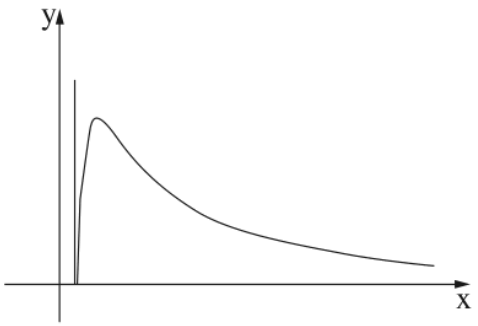
הציבו את הערך של a שמצאתם וענו על סעיפים ד–ה.

נתונה הפונקצייה $h(x)$, המוגדרת בתחום $x>0$. גרף הפונקצייה $h(x)$ עובר בנקודה $(e^5\ ,\ 2.5)$.

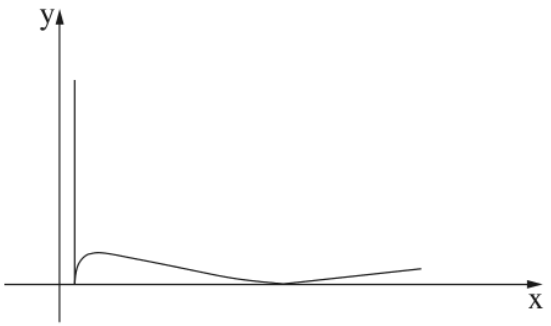
נגזרת הפונקצייה $h(x)$ מקיימת $h'(x)=f(x)-g(x)$.

ד. מצאו את הפונקצייה $h(x)$.

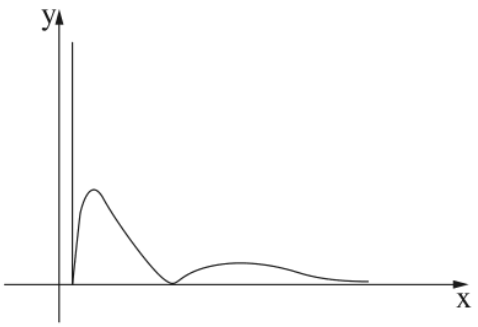
ה. קבעו איזה גרף מבין הגרפים I–IV מייצג את הפונקצייה $|h(x)|$. נמקו את קביעתכם.



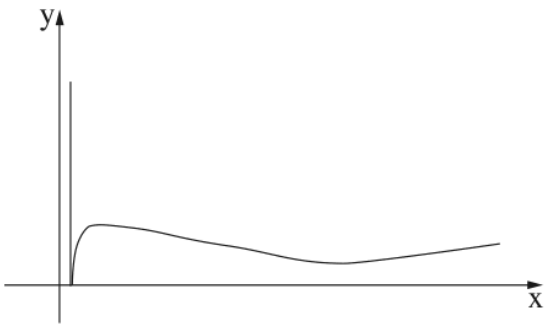
II



I



IV



III

פתרון מלא

סעיף א (1)

אסימפטוטה אנכית: כאשר $x \to 0^+$ המונה שואף למינוס אינסוף והמכנה שואף ל־0 מצד חיובי. לכן:

$$f(x) \to -\infty$$
$$x = 0$$

אסימפטוטה אופקית: כאשר $x \to \infty$ הלוגריתם גדל לאט הרבה יותר מ־x. לכן:

$$\frac{a + \ln x}{x} \to 0$$
$$y = 0$$

תשובה: אנכית: $x = 0$
אופקית: $y = 0$

סעיף א (2)

$$a + \ln x = 0$$
$$\ln x = -a$$
$$x = e^{-a}$$

תשובה: $(e^{-a},\ 0)$

סעיף א (3)

לפי כלל המנה:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (a + \ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{1 - a - \ln x}{x^2}$$

נשווה ל־0:

$$\ln x = 1 - a$$
$$x = e^{1-a}$$
$$f\left(e^{1-a}\right) = \frac{a + 1 - a}{e^{1-a}}$$
$$= e^{a-1}$$

המכנה x^2 חיובי. המונה $1 - a - \ln x$ חיובי משמאל לנקודה ושלילי מימין לה. לכן הפונקציה עולה ואחר כך יורדת והנקודה היא מקסימום.

תשובה: מקסימום: $\left(e^{1-a},\ e^{a-1}\right)$

סעיף ב

- ליד ציר ה־y הגרף מתחיל במינוס אינסוף ועולה.
- הוא חותך את ציר ה־x בנקודה $(e^{-a}, 0)$.
- הוא ממשיך לעלות עד המקסימום $\left(e^{1-a}, e^{a-1}\right)$.
- אחר כך הוא יורד ומתקרב לציר ה־x מלמעלה.

סקיצה של f: עולה ממינוס אינסוף ליד ציר y, חותכת את ציר x ב־e בחזקת מינוס a, מקסימום ב־e בחזקת a-1 ויורדת אל 0

תשובה: עולה מ־$-\infty$ דרך $(e^{-a},0)$
מקסימום $\left(e^{1-a},e^{a-1}\right)$
ואז יורדת אל $y=0$

סעיף ג
בנקודה $x=e^2$ ערכי הפונקציות שווים:

$$\frac{a+\ln e^2}{e^2}=\frac{1}{e^2}$$
$$a+2=1\ \Rightarrow\ a=-1$$

תשובה: $a=-1$

סעיף ד
עם $a=-1$:

$$h'(x)=\frac{\ln x-1}{x}-\frac{1}{x}=\frac{\ln x-2}{x}$$
$$=\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{2}{x}$$

פונקציה קדומה של $\ln x\cdot\frac{1}{x}$ היא $\frac{(\ln x)^2}{2}$, ולכן:

$$h(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}-2\ln x+C$$

נציב את הנקודה $\left(e^5,2.5\right)$:

$$\frac{25}{2}-10+C=2.5\ \Rightarrow\ C=0$$

תשובה: $h(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}-2\ln x$

סעיף ה
נכתוב את h כמכפלה:

$$h(x)=\ln x\left(\frac{\ln x}{2}-2\right)$$

- **אפסים:** כאשר $\ln x=0$ וכאשר $\ln x=4$. אלה הנקודות $x=1$ ו־$x=e^4$.
- **קיצון:** הנגזרת מתאפסת כאשר $\ln x=2$. בנקודה $x=e^2$ הערך הוא $h=2-4=-2$ וזה מינימום.
- **קצוות:** כאשר $x\to 0^+$ הפונקציה שואפת לאינסוף. גם כאשר $x\to\infty$ היא שואפת לאינסוף.

לכן הגרף של $|h(x)|$:

- יורד מאינסוף עד 0 בנקודה $x=1$.
- עולה עד 2 בנקודה $x=e^2$.
- חוזר ל־0 בנקודה $x=e^4$.
- אחר כך עולה בלי הגבלה.

הנקודה $x=1$ קרובה מאוד לציר ה־y ביחס ל־e^4 שהוא בערך 54.6.

הגרף צריך לגעת בציר ה־x פעמיים ולעלות בסוף. רק גרף I מתאים. בגרפים II ו־III יש נגיעה אחת בלבד בציר. בגרף IV הגרף שואף ל־0 בסוף במקום לעלות.

תשובה: גרף I

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $k(x) = xe^x$, ונתונה הפונקצייה $m(x) = 2e^x - 1$, המוגדרות לכל x .

א. **(1)** מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה־ y בעבור כל אחת מן הפונקציות $k(x)$ ו־ $m(x)$.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות $k(x)$ ו־ $m(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של כל אחד מן הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו־ $m(x)$ עם ציר ה־ y .

הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו־ $m(x)$ נחתכים בשתי נקודות בדיוק, נקודה אחת שבה $x = a$ ונקודה נוספת שבה $x = b$, $b > a$.

ב. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקצייה $k(x)$ ושל גרף הפונקצייה $m(x)$.

נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$, המוגדרת לכל $x \neq 1$.

ג. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ד. הסבירו מדוע למשוואה $f'(x) = 0$ יש בדיוק שני פתרונות.

ה. **(1)** הסבירו מדוע $1 < b$.

(2) הביעו באמצעות a ו־ b את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

כאשר $x \to -\infty$: $e^x \to 0$, ולכן:

$$m(x) = 2e^x - 1 \to -1$$

וגם $k(x) = xe^x \to 0$ (האקספוננט שואף לאפס מהר יותר משהגורם x גדל).

כאשר $x \to \infty$ שתי הפונקציות שואפות לאינסוף, ולכן אין שם אסימפטוטה אופקית.

תשובה: $k(x): \quad y = 0$

$m(x): \quad y = -1$

סעיף א (2)

נגזור את k לפי כלל המכפלה:

$$k'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

הגורם e^x חיובי תמיד, ולכן הסימן נקבע לפי $x + 1$:

x	$k(x)$	$k'(x)$
$x < -1$		↘
-1		מינ'
$x > -1$		↗

הנגזרת של m:

$$m'(x) = 2e^x > 0$$

לכן הפונקצייה m עולה לכל x.

תשובה: הפונקצייה k יורדת ב־$x < -1$ ועולה ב־$x > -1$.
הפונקצייה m עולה לכל x.

סעיף א (3)

$$k(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$
$$m(0) = 2e^0 - 1 = 1$$

תשובה: $k: \ (0,0)$
$m: \ (0,1)$

סעיף ב

הגרף של k: משמאל הוא שואף ל־0 מתחת לציר, יורד עד המינימום, עובר בראשית ועולה לאינסוף. המינימום: $\left(-1, \ -\frac{1}{e}\right)$

הגרף של m: עולה תמיד, משמאל שואף ל־-1, וחותך את ציר ה־y ב־$(0,1)$.

נקודות החיתוך: הגרפים נחתכים ב־$x = a$ שלילי וב־$x = b$ חיובי. משמאל ל־a הגרף של k מעל הגרף של m; בין a ל־b הגרף של m מעל; ומימין ל־b שוב הגרף של k מעל.

סקיצה של k ו־m באותה מערכת צירים, עם נקודות החיתוך x=a ו־x=b

תשובה: סקיצה: לגרף של k מינימום $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ ואסימפטוטה $y = 0$. הגרף של m עולה, עם אסימפטוטה $y = -1$. שתי נקודות חיתוך.

סעיף ג (1)

אסימפטוטה אנכית: המכנה מתאפס ב־$x = 1$, והמונה שם הוא $e - 1 \neq 0$. לכן:

$$x = 1$$

אסימפטוטה אופקית: כאשר $x \to -\infty$ המונה שואף ל־-1 והמכנה ל־$-\infty$, ולכן:

$$f(x) \to 0$$

כאשר $x \to \infty$ הפונקצייה שואפת לאינסוף, ושם אין אסימפטוטה.

תשובה: $x = 1$
$y = 0$ **(כאשר** $x \to -\infty$**)**

סעיף ג (2)

$$e^x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$$

תשובה: $(0, \ 0)$

סעיף ד

נגזור לפי כלל המנה:

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - (e^x - 1)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{xe^x - 2e^x + 1}{(x-1)^2}$$

המונה שווה בדיוק להפרש $k(x) - m(x)$:

$$xe^x-(2e^x-1)=xe^x-2e^x+1$$

לכן $f'(x)=0$ בדיוק כאשר $k(x)=m(x)$, כלומר בנקודות החיתוך של שני הגרפים.

נתון שיש בדיוק שתי נקודות חיתוך. שתיהן שונות מ־1, כי ב־$x=1$ הערכים שונים:

$$k(1)=e,\qquad m(1)=2e-1$$

לכן למשוואה יש בדיוק שני פתרונות:

$$x=a,\quad x=b$$

תשובה: המונה של f' שווה ל־$k(x)-m(x)$, ולכן $f'=0$ רק בשתי נקודות החיתוך: $x=a$ ו־$x=b$.

סעיף ה (1)

נסמן את ההפרש:

$$h(x)=k(x)-m(x)=(x-2)e^x+1$$

נגזור:

$$h'(x)=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x$$

לכן h יורדת משמאל ל־1 ועולה מימין ל־1, ויש לה מינימום ב־$x=1$:

$$h(1)=1-e<0$$

בכל צד של 1 הפונקצייה h מונוטונית, ולכן יש לה שם לכל היותר שורש אחד. יש לה בדיוק שני שורשים, ולכן אחד בכל צד:

$$a<1<b$$

תשובה: המינימום של $k-m$ הוא ב־$x=1$ והוא שלילי, ולכן יש שורש אחד מכל צד של 1. לכן $b>1$.

סעיף ה (2)

המכנה של f' חיובי, ולכן הסימן של f' הוא הסימן של $h=k-m$.

לפי הסקיצה בסעיף ב, $h>0$ כאשר הגרף של k מעל הגרף של m, כלומר משמאל ל־a ומימין ל־b. בין a ל־b מתקיים $h<0$. הנקודה $x=1$ אינה בתחום ההגדרה:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<a$	$+$	↗
$a<x<1$	$-$	↘
$1<x<b$	$-$	↘
$x>b$	$+$	↗

תשובה: עלייה: $x<a$ או $x>b$.

ירידה: $a<x<1$ או $1<x<b$.

סעיף ו

משמאל לאסימפטוטה $x=1$: כאשר $x\to-\infty$ הפונקצייה שואפת ל־0. עבור $x<0$ המונה והמכנה שליליים, ולכן $f>0$.

הפונקצייה עולה עד מקסימום ב־$x=a$. הנקודה a שלילית, כי h יורדת משמאל ל־1 וכבר $h(0)=-1<0$.

אחר כך f יורדת, עוברת בראשית, ושואפת למינוס אינסוף ליד $x=1$ משמאל.

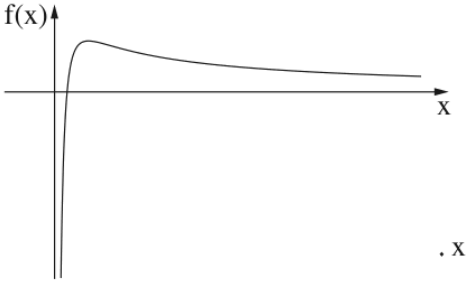
מימין ל־$x=1$: הפונקצייה יורדת מפלוס אינסוף עד מינימום ב־$x=b$, ואחר כך עולה לאינסוף.

סקיצה של f: אסימפטוטות x=1 ו־y=0, מקסימום ב־x=a, מינימום ב־x=b, עוברת בראשית

תשובה: סקיצה: אסימפטוטות $x=1$ ו־$y=0$; מקסימום ב־$x=a$; מינימום ב־$x=b$; עוברת בראשית.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 5

5. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=\frac{2\ell n(x)-1}{x}$, המוגדרת בתחום $x>0$.



א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

נתונה הפונקצייה $g(x)$ המוגדרת בתחום $x>0$ ומקיימת: $g'(x)=f(x)$.
שיעור ה־ y של נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ הוא $-\frac{1}{4}$.

ב. **(1)** מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x .

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

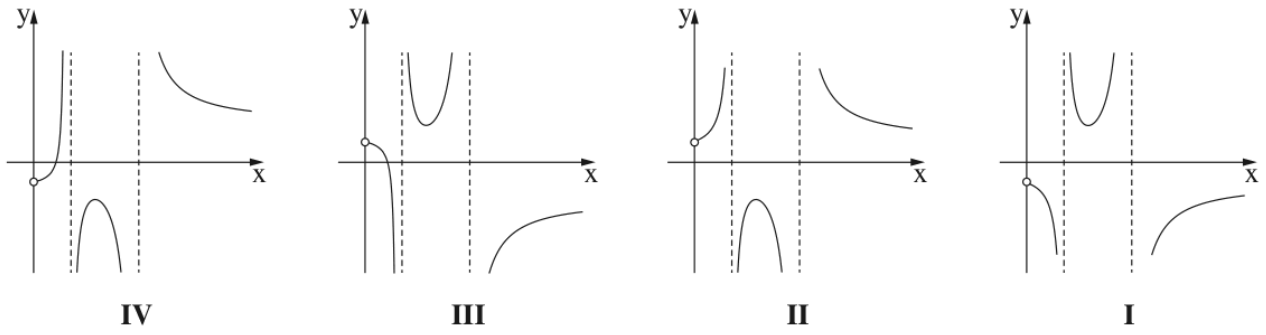
נתונה הפונקצייה $h(x)$ המוגדרת כך: $h(x)=1+\frac{b}{g(x)}$, b הוא פרמטר גדול מ־ $\frac{1}{4}$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) קבעו אם גרף הפונקצייה $h(x)$ חותך את ציר ה־ x . נמקו את קביעתכם.

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $h(x)$, וקבעו את סוגה. הביעו את תשובתכם באמצעות b , אם יש צורך.

ה. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקצייה $h(x)$.



פתרון מלא

סעיף א

$$\frac{2\ln x-1}{x}=0$$

$$2\ln x-1=0 \;\Rightarrow\; \ln x=\frac{1}{2}$$

$$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

תשובה: $(\sqrt{e},\ 0)$

סעיף ב (1)

הנגזרת של g היא f:

$$g'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x}$$

נמצא פונקציה קדומה בעזרת שתי נגזרות מוכרות:

$$(\ln^2 x)'=\frac{2\ln x}{x},\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

ולכן:

$$g(x) = \ln^2 x - \ln x + C$$

לפי הגרף, f מחליפה סימן רק ב־$x = \sqrt{e}$, ולכן שם נקודת הקיצון של g. בנקודה זו $\ln x = \frac{1}{2}$:

$$g(\sqrt{e}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + C = -\frac{1}{4} + C$$

נתון ששיעור ה־y של הקיצון הוא $-\frac{1}{4}$, ולכן $C = 0$:

$$g(x) = \ln^2 x - \ln x$$

תשובה: $g(x) = \ln^2 x - \ln x$

סעיף ב (2)

$$\ln x(\ln x - 1) = 0$$
$$\ln x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$$
$$\ln x = 1 \;\Rightarrow\; x = e$$

תשובה: $(1,\ 0)$ **ו־**$(e,\ 0)$

סעיף ב (3)

לפי הגרף של f, שהיא הנגזרת של g: משמאל ל־$\sqrt{e}$ היא שלילית ומימין לו חיובית. לכן g יורדת ואחר כך עולה, עם מינימום:

$$\left(\sqrt{e},\ -\tfrac{1}{4}\right)$$

כאשר x שואף ל־0 מימין, $\ln x$ שואף למינוס אינסוף, ולכן g שואפת לפלוס אינסוף – הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה. כאשר x שואף לאינסוף, גם g שואפת לאינסוף.

סקיצה של g: אסימפטוטה x=0, חיתוכים (1,0) ו-(e,0), מינימום (√e,-1/4)

תשובה: סקיצה: מינימום $\left(\sqrt{e}, -\frac{1}{4}\right)$**; חיתוכים** $(1,0)$ **ו־**$(e,0)$**; אסימפטוטה** $x = 0$**.**

סעיף ג (1)

הפונקצייה h מוגדרת כאשר g מוגדרת, כלומר $x > 0$, וגם המכנה $g(x)$ שונה מאפס. לפי סעיף ב(2) g מתאפסת ב־1 וב־e, ולכן:

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq e$$

תשובה: $x > 0,\ x \neq 1,\ x \neq e$

סעיף ג (2)

נבדוק מתי h מתאפסת:

$$1 + \frac{b}{g(x)} = 0 \iff g(x) = -b$$

הערך המינימלי של g הוא $-\frac{1}{4}$, כלומר:

$$g(x) \geq -\frac{1}{4}$$

נתון $b > \frac{1}{4}$, ולכן:

$$-b < -\frac{1}{4}$$

לכן אין x שבו $g(x) = -b$, והגרף של h אינו חותך את ציר ה־x.

תשובה: לא. הגרף של h **אינו חותך את ציר ה־**x**, כי הערך המינימלי של** g **הוא** $-\frac{1}{4}$**, שגדול מ־**$-b$**.**

סעיף ד

נגזור:

$$h'(x) = -\frac{b\,g'(x)}{g^2(x)}$$

הגורמים b ו־g^2 חיוביים, ולכן הסימן של h' הפוך לסימן של g'.

הנגזרת g' מתאפסת רק ב־$x = \sqrt{e}$, ועוברת שם משלילי לחיובי. לכן h' עוברת שם מחיובי לשלילי, וזו נקודת מקסימום:

$$h(\sqrt{e}) = 1 + \frac{b}{-\frac{1}{4}} = 1 - 4b$$

תשובה: מקסימום: $(\sqrt{e},\ 1-4b)$

סעיף ה

נבדוק את ההתנהגות של h בכל קטע.

בקטע בין 0 ל־1: שם g חיובית ויורדת לאפס, ולכן h גדולה מ־1 ועולה לפלוס אינסוף ליד $x = 1$. ליד ציר ה־y הפונקצייה g שואפת לאינסוף, ולכן h שואפת ל־1.

בקטע בין 1 ל־e: שם g שלילית, ולכן h שואפת למינוס אינסוף בשני הקצוות. נקודת המקסימום שלה היא $(\sqrt{e},\ 1-4b)$, והיא מתחת לציר ה־x כי $b > \frac{1}{4}$.

מימין ל־e: שם g חיובית ועולה, ולכן h יורדת מפלוס אינסוף ושואפת ל־1.

הגרף המתאים הוא גרף II.

תשובה: גרף II

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{e^x-b}{(e^x-4)^2}$, b הוא פרמטר חיובי, $b\neq 4$.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\ell n(12)$.

ב. מצאו את הערך של b , ואת סוג נקודת הקיצון.

הציבו בפונקצייה $f(x)$ את הערך של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ג–ו.

נתונה הפונקצייה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $g(x)$ המאונכות לצירים.

ד. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ה. מהו שיעור ה־ y של נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

ו. קבעו אם הערך של $\int_{-2}^{-1}(f(x)-g(x))dx$ קטן או גדול מ־ $1\frac{1}{2}$. נמקו את קביעתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה מתאפס כאשר $e^x=4$:

$$x\neq \ln 4$$

תשובה: $x\neq \ln 4$

סעיף א (2)

אסימפטוטה אנכית: כאשר $x=\ln 4$ המכנה מתאפס והמונה שווה ל־$4-b$ שאינו 0 כי $b\neq 4$:

$$x=\ln 4$$

אסימפטוטות אופקיות: כאשר $x\to\infty$ המכנה גדל כמו e^{2x} והמונה רק כמו e^x:

$$f(x)\to 0 \;\Rightarrow\; y=0$$

כאשר $x\to-\infty$ מתקיים $e^x\to 0$:

$$f(x)\to\frac{-b}{(-4)^2}=-\frac{b}{16}$$

$$y=-\frac{b}{16}$$

תשובה: $x = \ln 4$
$y = 0$ **(מימין)**
$y = -\frac{b}{16}$ **(משמאל)**

סעיף א (3)

ציר ה־y: נציב $x = 0$:

$$f(0) = \frac{1-b}{(1-4)^2} = \frac{1-b}{9}$$

ציר ה־x: המונה מתאפס:

$$e^x = b \;\Rightarrow\; x = \ln b$$

תשובה: $\left(0,\ \frac{1-b}{9}\right)$
$(\ln b,\ 0)$

סעיף ב

לפי כלל המנה ואחרי הוצאת הגורם המשותף $e^x(e^x-4)$:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-4)^2 - (e^x-b)\cdot 2(e^x-4)e^x}{(e^x-4)^4}$$
$$= \frac{e^x\left[(e^x-4) - 2(e^x-b)\right]}{(e^x-4)^3}$$
$$= \frac{e^x(2b-4-e^x)}{(e^x-4)^3}$$

בנקודה $x = \ln 12$ הנגזרת מתאפסת:

$$2b - 4 - 12 = 0 \;\Rightarrow\; b = 8$$

סוג הקיצון: ליד $x = \ln 12$ המכנה חיובי כי $e^x > 4$. הגורם $12 - e^x$ חיובי משמאל לנקודה ושלילי מימין לה. לכן זו נקודת מקסימום:

$$f(\ln 12) = \frac{12-8}{8^2} = \frac{1}{16}$$

תשובה: $b = 8$
מקסימום: $\left(\ln 12,\ \frac{1}{16}\right)$

סעיף ג (1)

הפונקציה g מוגדרת כאשר f מוגדרת ושונה מ־0. עם $b = 8$ הפונקציה f מתאפסת בנקודה $x = \ln 8$:

$x \neq \ln 4$
$x \neq \ln 8$

תשובה: $x \neq \ln 4$ **וגם** $x \neq \ln 8$

סעיף ג (2)

$$g(x) = \frac{(e^x-4)^2}{e^x - 8}$$

אסימפטוטה אנכית: המכנה מתאפס בנקודה $x = \ln 8$ והמונה שם 16:

$x = \ln 8$

בנקודה $x=\ln 4$ אין אסימפטוטה. שם g שואפת ל־0 ויש בגרף "חור".

אסימפטוטה אופקית: כאשר $x \to -\infty$:

$$g(x) \to \frac{16}{-8} = -2$$

$$y = -2$$

כאשר $x \to \infty$ הפונקציה שואפת לאינסוף ואין אסימפטוטה בצד ימין.

תשובה: $x = \ln 8$

$y = -2$ (משמאל)

סעיף ד

נתוני f עם $b = 8$:

- משמאל לאסימפטוטה $x = \ln 4$ הפונקציה יורדת מ־$-\frac{1}{2}$ למינוס אינסוף.
- מימין לה היא עולה ממינוס אינסוף דרך $(\ln 8, 0)$ עד המקסימום $\left(\ln 12, \frac{1}{16}\right)$. אחר כך היא יורדת אל 0.

נתוני $g = \frac{1}{f}$:

- משמאל ל־$\ln 4$ היא עולה מ־-2 אל 0. בנקודה $x = \ln 4$ יש חור.
- בין $\ln 4$ ל־$\ln 8$ היא יורדת מ־0 למינוס אינסוף.
- מימין ל־$\ln 8$ היא יורדת מאינסוף עד המינימום $(\ln 12, 16)$ ואחר כך עולה.

סקיצה של f בכחול ושל g באדום עם אסימפטוטות x=ln4 ו־x=ln8

תשובה: ראו סקיצה

סעיף ה

בנקודת חיתוך מתקיים $f(x) = g(x) = \frac{1}{f(x)}$. לכן:

$$f(x)^2 = 1$$

$$f(x) = \pm 1$$

נסמן $t = e^x$ ונבדוק כל אפשרות.

האפשרות $f = 1$:

$$t - 8 = (t-4)^2$$

$$t^2 - 9t + 24 = 0$$

הדיסקרימיננטה $81 - 96$ שלילית ואין פתרון.

האפשרות $f = -1$:

$$t - 8 = -(t-4)^2$$

$$t^2 - 7t + 8 = 0$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

שני הפתרונות חיוביים ושונים מ־4 ומ־8. לכן יש שתי נקודות חיתוך ושיעור ה־y של שתיהן הוא -1.

תשובה: $y = -1$

סעיף ו

בקטע בין -2 ל־-1 מתקיים $e^x < 4$. שם המכנה של f' שלילי והמונה חיובי ולכן f יורדת. בנוסף f שלילית שם.

נסמן $u = f(x)$. אז ההפרש הוא:

$$f(x) - g(x) = u - \frac{1}{u}$$

הביטוי הזה עולה כשהערך של u עולה כי הנגזרת שלו $1 + \frac{1}{u^2}$ חיובית. לכן ההפרש יורד בקטע והערך הגדול ביותר שלו הוא בנקודה $x = -2$:

$$f(-2) = \frac{e^{-2} - 8}{(e^{-2} - 4)^2} \approx -0.526$$

$$f(-2) - g(-2) \approx -0.526 + 1.900$$

$$\approx 1.37$$

בכל הקטע ההפרש קטן מ־1.5 ואורך הקטע הוא 1. לכן:

$$\int_{-2}^{-1} \big(f(x) - g(x)\big)dx < 1.5 \cdot 1 = 1.5$$

תשובה: קטן מ־$1\frac{1}{2}$

בגרות קיץ תשפ״ד (2024) – מועד א׳ • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=x\left((\ell n(x))^2-2\ell n(x)+2\right)$, המוגדרת בתחום $x>0$.

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודת הפיתול של הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. **(1)** סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונות הפונקציות $g(x)=(\ell n(x))^2-4$, $h(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ המוגדרות בתחום $x>0$.

ה. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x.

דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x העבירו אנכים לציר ה־ x.

ו. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$ ועל ידי האנכים.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן $L=\ln x$. לפי כלל המכפלה:

$$f'(x)=\left(L^2-2L+2\right)+x\left(\frac{2L}{x}-\frac{2}{x}\right)$$
$$=L^2-2L+2+2L-2$$
$$=(\ln x)^2$$

הנגזרת אינה שלילית בכל התחום. היא מתאפסת רק בנקודה $x=1$ ושם אין החלפת סימן. לכן הפונקציה עולה בכל התחום ואין תחום ירידה.

תשובה: עולה: $x>0$
אין תחום ירידה

סעיף ב

$$f''(x)=\frac{2\ln x}{x}$$

הנגזרת השנייה מתאפסת בנקודה $x=1$. משמאל לנקודה היא שלילית ומימין חיובית ולכן יש שם החלפת קעירות:

$$f(1)=1\cdot(0-0+2)=2$$

תשובה: $(1,\ 2)$

סעיף ג

נשלים לריבוע את הביטוי שבסוגריים:

$$(\ln x)^2-2\ln x+2$$
$$=(\ln x-1)^2+1>0$$

גם x חיובי בכל התחום. לכן הפונקציה חיובית בכל התחום ואין לה תחום שליליות.

תשובה: חיובית: $x > 0$
אין תחום שליליות

סעיף ד (1)

- כאשר $x \to 0^+$ הפונקציה שואפת ל־0. הנקודה $(0, 0)$ אינה בתחום.
- הפונקציה עולה בכל התחום.
- בנקודה $(1, 2)$ יש נקודת פיתול עם משיק אופקי.
- הפונקציה חיובית ואינה חותכת את הצירים.

סקיצה של f: עולה מהראשית, נקודת פיתול עם משיק אופקי ב־(1,2), ממשיכה לעלות
תשובה: ראו סקיצה

סעיף ד (2)
הנגזרת היא $f'(x) = (\ln x)^2$:

- כאשר $x \to 0^+$ היא שואפת לאינסוף.
- היא יורדת עד 0 בנקודה $x = 1$ ונוגעת שם בציר ה־x. זו נקודת המינימום שלה והיא מתאימה לנקודת הפיתול של f.
- אחר כך היא עולה לאט.

סקיצה של הנגזרת: יורדת מאינסוף ליד ציר y, נוגעת בציר x ב־(1,0) ועולה לאט
תשובה: ראו סקיצה

סעיף ה
נקודות החיתוך עם ציר ה־x:

$$(\ln x)^2 = 4$$
$$\ln x = \pm 2$$
$$x = e^{-2}$$
$$x = e^2$$

בין שתי הנקודות g שלילית.
פונקציה קדומה: בסעיף א ראינו ש־$f'(x) = (\ln x)^2$. לכן f היא פונקציה קדומה של $(\ln x)^2$:

$$\int g(x)\,dx = f(x) - 4x$$
$$f(e^2) - 4e^2 = 2e^2 - 4e^2 = -2e^2$$
$$f(e^{-2}) - 4e^{-2} = 10e^{-2} - 4e^{-2} = 6e^{-2}$$

השטח הוא מינוס האינטגרל:

$$S = -\left(-2e^2 - 6e^{-2}\right)$$
$$= 2e^2 + \frac{6}{e^2}$$

תשובה: $2e^2 + \frac{6}{e^2}$

סעיף ו
האנכים הם $x = e^{-2}$ ו־$x = e^2$. בקטע הזה h חיובית כי f חיובית, ו־g אינה חיובית. לכן h מעל g.

$$h(x) = \frac{(\ln x)^2 - 2\ln x + 2}{x}$$

פונקציה קדומה של h מתקבלת מהצבה $L = \ln x$:

$$\int h(x)\,dx = \frac{(\ln x)^3}{3} - (\ln x)^2 + 2\ln x$$

$$\begin{aligned}\int_{e^{-2}}^{e^2} h\,dx &= \left(\tfrac{8}{3} - 4 + 4\right) \\ &\quad - \left(-\tfrac{8}{3} - 4 - 4\right) \\ &= \frac{40}{3}\end{aligned}$$

השטח הוא האינטגרל של $h - g$:

$$S = \frac{40}{3} + \left(2e^2 + \frac{6}{e^2}\right)$$

תשובה: $\frac{40}{3} + 2e^2 + \frac{6}{e^2}$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 4

4. נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{a-x^2}{e^x}$, $g(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$ המוגדרות לכל x.

a הוא פרמטר.

א. מצאו את הערך של a שבעבורו $f(x)=g'(x)$ לכל ערך של x.

הציבו את הערך של a שמצאתם, וענו על הסעיפים ב–ה שלפניכם.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של גרף הפונקצייה $f(x)$ ושל גרף הפונקצייה $g(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x.

ה. חשבו את הערך של הביטוי: $\int_1^2 \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^4}\right)\cdot\left(\frac{x^2-1}{e^x}\right)dx$.

פתרון מלא

סעיף א

נגזור את g לפי כלל המנה:

$$g(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$$

$$g'(x)=\frac{2(x+1)e^x-(x+1)^2e^x}{e^{2x}}$$

נצמצם ב־e^x ונוציא גורם משותף:

$$g'(x)=\frac{(x+1)(2-x-1)}{e^x}$$

$$=\frac{(x+1)(1-x)}{e^x}=\frac{1-x^2}{e^x}$$

נשווה לפונקציה f:

$$\frac{a-x^2}{e^x}=\frac{1-x^2}{e^x}\ \Rightarrow\ a=1$$

תשובה: $a=1$

סעיף ב (1)

עבור $a=1$:

$$f(x)=\frac{1-x^2}{e^x}$$

חיתוך עם ציר ה־y:

$$f(0)=1 \;\Rightarrow\; (0,1)$$

חיתוך עם ציר ה־x (המכנה חיובי תמיד):

$$1-x^2=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 1$$

תשובה: $(0,1)$
$(-1,0),\ (1,0)$

סעיף ב (2)

חיתוך עם ציר ה־y:

$$g(0)=\frac{1}{1}=1 \;\Rightarrow\; (0,1)$$

חיתוך עם ציר ה־x:

$$(x+1)^2=0 \;\Rightarrow\; x=-1$$

תשובה: $(0,1)$
$(-1,0)$

סעיף ב (3)

הפונקצייה g: לפי סעיף א הנגזרת שלה היא f, שמתאפסת ב־$x=\pm 1$:

x	$g'(x)$	$g(x)$
$x<-1$	$-$	↘
-1	0	מינ'
$-1<x<1$	$+$	↗
1	0	מקס'
$x>1$	$-$	↘

$$g(-1)=0, \qquad g(1)=\frac{4}{e}$$

הפונקצייה f: נגזור:

$$f'(x)=\frac{-2x\,e^x-(1-x^2)e^x}{e^{2x}}$$
$$=\frac{x^2-2x-1}{e^x}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר:

$$x^2-2x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1\pm\sqrt{2}$$

המונה הוא פרבולה ישרה, ולכן הנגזרת חיובית מחוץ לשורשים ושלילית ביניהם:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<1-\sqrt{2}$	$+$	↗
$1-\sqrt{2}$	0	מקס'
בין השורשים	$-$	↘
$1+\sqrt{2}$	0	מינ'
$x>1+\sqrt{2}$	$+$	↗

$$f(1-\sqrt{2}) \approx 1.25$$
$$f(1+\sqrt{2}) \approx -0.43$$

תשובה: לפונקצייה g:
$$\min(-1,\ 0)$$
$$\max\left(1,\ \frac{4}{e}\right)$$
לפונקצייה f:
$$\max(1-\sqrt{2},\ 1.25)$$
$$\min(1+\sqrt{2},\ -0.43)$$

סעיף ג

כאשר $x \to \infty$ שתי הפונקציות שואפות ל־0, כי e^x גדל מהר יותר מכל פולינום. לכן $y=0$ אסימפטוטה מימין לשתיהן.

כאשר $x \to -\infty$ הפונקצייה g שואפת לפלוס אינסוף, והפונקצייה f למינוס אינסוף.

נשים לב: הפונקצייה f היא הנגזרת של g (לפי סעיף א). לכן היא חיובית בדיוק בתחום שבו g עולה, ומתאפסת בנקודות הקיצון.

סקיצה של f ו־g באותה מערכת צירים: g עם מינימום (-1,0) ומקסימום (e/1,4); f חותכת את ציר x ב־1± ואת ציר y ב־1

תשובה: סקיצה בסרטוט. מימין, שתי הפונקציות שואפות לאפס.

סעיף ד

הפונקצייה f חיובית בין שתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה־x:

$$-1 < x < 1$$

לפי סעיף א, הפונקצייה g היא פונקציה קדומה של f:

$$S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = g(1) - g(-1)$$
$$= \frac{4}{e} - 0 = \frac{4}{e} \approx 1.47$$

תשובה: $\frac{4}{e} \approx 1.47$

סעיף ה

נשים לב שהגורם הראשון הוא $\frac{1}{g^2(x)}$:

$$\frac{e^{2x}}{(x+1)^4} = \frac{1}{g^2(x)}$$

והגורם השני הוא מינוס הנגזרת של g:

$$\frac{x^2-1}{e^x} = -g'(x)$$

לכן האינטגרנד הוא נגזרת של $\frac{1}{g}$:

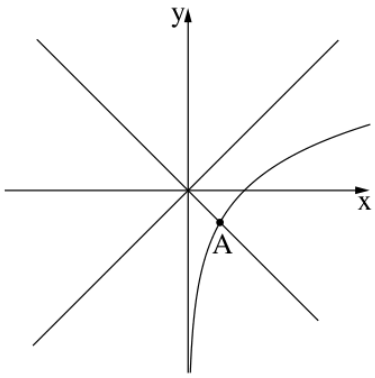
$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$
$$\int_1^2 \frac{-g'(x)}{g^2(x)}dx = \left[\frac{1}{g(x)}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{e^x}{(x+1)^2} \right]_1^2$$
$$= \frac{e^2}{9} - \frac{e}{4} \approx 0.14$$

תשובה: $\frac{e^2}{9} - \frac{e}{4} \approx 0.14$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 5

5. בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של הפונקצייה $f(x)=\ell n(x)$ המוגדרת בתחום $x>0$,



ומתוארים הישרים $y=x$ ו־ $y=-x$.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם אחד מן הישרים.

נסמן את שיעור ה־ x של הנקודה A ב־ a.

היעזרו בסרטוט, וענו על הסעיפים א–ה שלפניכם.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתונה הפונקצייה: $g(x)=\frac{\ell n(x)-x}{\ell n(x)+x}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x (אם יש כאלה).

(3) מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה־ x של הפונקצייה $g(x)$.

ב. הסבירו מדוע מתקיים $0<a<1$.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)=e^{g(x)}$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הלוגריתם מוגדר רק עבור מספרים חיוביים, ולכן $x>0$ בתחום.

בנוסף, המכנה חייב להיות שונה מאפס:

$$\ln x + x \neq 0 \iff \ln x \neq -x$$

השוויון מתקיים בנקודת החיתוך של הגרף של f עם הישר היורד, כלומר בנקודה A.

לפי הסרטוט יש נקודת חיתוך אחת כזו, ושיעור ה־x שלה הוא a.

לכן תחום ההגדרה:

$$x>0, \quad x\neq a$$

תשובה: $x>0,\ x\neq a$

סעיף א (2)

הפונקצייה מתאפסת כאשר המונה מתאפס:

$$\ln x - x = 0 \iff \ln x = x$$

לפי הסרטוט, הגרף של f כולו מתחת לישר העולה ואינו חותך אותו. לכן למשוואה אין פתרון.

תשובה: אין נקודות חיתוך כאלה.

סעיף א (3)

נחלק את המונה והמכנה ב־x:

$$g(x)=\frac{\frac{\ln x}{x}-1}{\frac{\ln x}{x}+1}$$

כאשר $x \to \infty$ מתקיים $\frac{\ln x}{x} \to 0$, ולכן:

$$g(x) \to \frac{0-1}{0+1} = -1$$

כאשר $x \to 0^+$ הפונקצייה שואפת ל־1, אבל $x \leq 0$ אינו בתחום, ולכן זו אינה אסימפטוטה (רק נקודת קצה פתוחה).
האסימפטוטה המקבילה לציר ה־x:

$$y = -1 \quad (x \to \infty)$$

תשובה: $y = -1$

סעיף ב
הנקודה A נמצאת על הגרף של f, שמוגדר רק עבור $x > 0$. לכן a חיובי.
היא נמצאת גם על הישר היורד, ולכן שיעור ה־y שלה שלילי:

$$\ln a = -a < 0$$

הלוגריתם שלילי רק עבור מספרים שקטנים מ־1, ולכן:

$$0 < a < 1$$

תשובה: הנקודה A על גרף הלוגריתם ועל הישר היורד, ולכן:
$\ln a = -a < 0$
הלוגריתם שלילי רק בין 0 ל־1, ולכן:
$0 < a < 1$

סעיף ג (1)
נסמן $L = \ln x$ ונגזור לפי כלל המנה:

$$g'(x) = \frac{N}{(L+x)^2}$$

כאשר המונה הוא:

$$N = \left(\tfrac{1}{x} - 1\right)(L+x)$$
$$-(L-x)\left(\tfrac{1}{x} + 1\right)$$

נפתח את המונה:

$$N = \frac{L}{x} + 1 - L - x$$
$$-\frac{L}{x} - L + 1 + x$$
$$N = 2 - 2L$$

ולכן:

$$g'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(\ln x + x)^2}$$

המכנה חיובי, והנגזרת מתאפסת כאשר $\ln x = 1$:

$$x = e$$

משמאל ל־e הנגזרת חיובית ומימין לו שלילית, ולכן זו נקודת מקסימום:

$$g(e) = \frac{1-e}{1+e} \approx -0.46$$

תשובה: מקסימום $\left(e,\ \frac{1-e}{1+e}\right)$

סעיף ג (2)

הסימן של הנגזרת נקבע לפי המונה:

$$1-\ln x$$

הנקודה a אינה בתחום ההגדרה, ומתקיים:

$$a<1<e$$

x	$g'(x)$	$g(x)$
$0<x<a$	$+$	↗
$a<x<e$	$+$	↗
e	0	מקס'
$x>e$	$-$	↘

תשובה: עלייה:

$$0<x<a,\ \ a<x<e$$

ירידה:

$$x>e$$

סעיף ד

נבדוק את ההתנהגות ליד $x=a$. בנקודה זו המונה הוא:

$$\ln a-a=-2a<0$$

המכנה הוא פונקציה עולה שמתאפסת בנקודה a. לכן הוא שלילי משמאל לנקודה וחיובי מימינה:

$$x\to a^-:\ \ g\to+\infty$$

$$x\to a^+:\ \ g\to-\infty$$

כלומר $x=a$ היא אסימפטוטה אנכית.

משמאל ל־a: הגרף מתחיל ליד הנקודה $(0,1)$ (לא כלולה) ועולה לפלוס אינסוף.

מימין ל־a: הגרף עולה ממינוס אינסוף עד המקסימום ב־$x=e$, ואז יורד ושואף לאסימפטוטה האופקית. כל החלק הזה מתחת לציר ה־x.

סקיצה של g: אסימפטוטה אנכית x=a, אסימפטוטה y=-1, מקסימום ב-x=e, מתחילה ליד (0,1)

תשובה: סקיצה בסרטוט. אסימפטוטות:

$$x=a,\ \ y=-1$$

מקסימום ב־$x=e$

סעיף ה

הפונקצייה e^t עולה וחיובית, ולכן h מוגדרת באותו תחום כמו g, עולה ויורדת באותם תחומים, ותמיד חיובית.

נעביר את הגבולות של g:

$$x\to0^+:\ h\to e^1=e$$

$$x\to a^-:\ h\to+\infty$$

$$x\to a^+:\ h\to e^{-\infty}=0$$

$$x\to\infty:\ h\to e^{-1}=\frac{1}{e}$$

נקודת המקסימום של h היא גם ב־$x = e$:

$$h(e) = e^{\frac{1-e}{1+e}} \approx 0.63$$

לכן לגרף יש אסימפטוטה אנכית (רק משמאל לנקודה a) ואסימפטוטה אופקית:

$$x = a, \qquad y = \frac{1}{e}$$

סקיצה של h=eˆg: מתחילה ליד (e,0), עולה לאינסוף ליד x=a, מימין ל-a מתחילה ליד 0, מקסימום ב-x=e, שואפת ל-e/1

תשובה: סקיצה בסרטוט. הגרף חיובי. אסימפטוטות:
$x = a, \;\; y = \frac{1}{e}$
מקסימום ב־$x = e$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{\ell n(x)+\ell n(a)}{\ell n(x)-\ell n(a)}$, a הוא פרמטר גדול מ־ 1 .

בסעיפים א–ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצאו את תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

לפניכם טענה: למשוואה $f(x)=f'(x)$ קיים בדיוק פתרון אחד בתחום $x>a$.

ב. קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקצייה $g(x)$, המקיימת: $g(x)=\ell n\big(f(x)\big)$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב־ S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=2$ ו־ $x=5$.
נתון: $1<a<2$.

ד. הביעו באמצעות S את ערך האינטגרל $\int_2^5 \ell n(2\cdot f(x))dx$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הלוגריתם מוגדר רק עבור $x>0$. המכנה מתאפס כאשר $\ln x=\ln a$ כלומר $x=a$:

$$x>0$$
$$x\neq a$$

תשובה: $x>0$ **וגם** $x\neq a$

סעיף א (2)

אסימפטוטה אנכית: בנקודה $x=a$ המכנה מתאפס והמונה שווה ל־$2\ln a$ שאינו 0:

$$x=a$$

אסימפטוטה אופקית: כאשר $x\to\infty$ גם המונה וגם המכנה שואפים לאינסוף. נחלק כל אחד מהם ב־$\ln x$:

$$f(x)=\frac{1+\frac{\ln a}{\ln x}}{1-\frac{\ln a}{\ln x}}\to 1$$
$$y=1$$

כאשר $x\to 0^+$ גם כן $f(x)\to 1$, אבל זה קצה התחום ולא אסימפטוטה. בגרף יש שם נקודה ריקה $(0,1)$.

תשובה: $x=a$
$y=1$

סעיף א (3)

ציר ה־y: הנקודה $x=0$ אינה בתחום ולכן אין חיתוך.

ציר ה־x: המונה מתאפס:

$$\ln x = -\ln a$$
$$x = \frac{1}{a}$$

תשובה: $\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$

סעיף א (4)

לפי כלל המנה:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - \ln a) - \frac{1}{x}(\ln x + \ln a)}{(\ln x - \ln a)^2}$$
$$= \frac{-2\ln a}{x(\ln x - \ln a)^2}$$

הפרמטר a גדול מ־1 ולכן $\ln a > 0$. המכנה חיובי בכל התחום. לכן הנגזרת שלילית בכל התחום.

תשובה: יורדת: $0 < x < a$

יורדת: $x > a$

סעיף א (5)

- משמאל לאסימפטוטה $x=a$: הגרף מתחיל קרוב לנקודה הריקה $(0,1)$, יורד, חותך את ציר ה־x בנקודה $\frac{1}{a}$ ויורד למינוס אינסוף.
- מימין לאסימפטוטה: הגרף יורד מפלוס אינסוף ומתקרב ל־$y=1$ מלמעלה.

סקיצה של f: משמאל ל־a יורדת מ־1 דרך (a,0/1) למינוס אינסוף, מימין ל־a יורדת מאינסוף אל y=1

תשובה: ראו סקיצה

סעיף ב

בתחום $x > a$ מתקיים $\ln x > \ln a > 0$. לכן המונה גדול מהמכנה ושניהם חיוביים:

$$f(x) > 1 > 0$$

מסעיף א (4) הנגזרת שלילית בכל התחום:

$$f'(x) < 0$$

פונקציה חיובית לא יכולה להיות שווה לפונקציה שלילית. לכן אין למשוואה אף פתרון בתחום, והטענה לא נכונה.

תשובה: הטענה לא נכונה – אין פתרון.

סעיף ג (1)

הלוגריתם מוגדר רק כאשר $f(x) > 0$:

$$\frac{\ln x + \ln a}{\ln x - \ln a} > 0$$

המונה והמכנה צריכים להיות באותו סימן. שניהם חיוביים כאשר $\ln x > \ln a$. שניהם שליליים כאשר $\ln x < -\ln a$:

$$x > a$$
$$0 < x < \frac{1}{a}$$

תשובה: $0 < x < \frac{1}{a}$ **או** $x > a$

סעיף ג (2)

- בתחום $0 < x < \frac{1}{a}$ הפונקציה f יורדת מ־1 ל־0. לכן g יורדת מ־0 למינוס אינסוף ויש אסימפטוטה $x = \frac{1}{a}$.
- בתחום $x > a$ הפונקציה f יורדת מאינסוף ל־1. לכן g יורדת מאינסוף ל־0. יש אסימפטוטה $x = a$ והגרף מתקרב ל־$y = 0$ מלמעלה.

סקיצה של g: משמאל ל־a/1 יורדת מ־0 למינוס אינסוף, מימין ל־a יורדת מאינסוף אל 0

תשובה: ראו סקיצה

סעיף ד

מתקיים $a < 2$ ולכן כל הקטע בין 2 ל־5 נמצא בתחום $x > a$. שם $g(x) > 0$ ולכן:

$$S = \int_2^5 g(x)\,dx$$

לפי חוקי הלוגריתמים:

$$\ln\big(2f(x)\big) = \ln 2 + \ln f(x)$$
$$= \ln 2 + g(x)$$
$$\int_2^5 \ln\big(2f(x)\big)dx$$
$$= \int_2^5 \ln 2\,dx + \int_2^5 g(x)\,dx$$
$$= 3\ln 2 + S$$

תשובה: $3\ln 2 + S$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^x}{e^x-4}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקצייה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. הפונקציות $g(x)$ ו־$f(x)$ מוגדרות באותו התחום.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית שלה ועל ידי הישרים $x=\ell n5$ ו־$x=\ell n8$.

ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $s(x)=\int_x^{\ell n3}\big(f(t)-g(t)\big)dt$, המוגדרת בתחום $x<\ell n3$.

ד. מצאו את שיעור ה־x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $s(x)$ וקבעו את סוגה.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה מתאפס כאשר $e^x=4$:

$$x\neq \ln 4$$

תשובה: $x\neq \ln 4$

סעיף א (2)

אסימפטוטה אנכית: בנקודה $x=\ln 4$ המכנה מתאפס והמונה שווה ל־4:

$$x=\ln 4$$

אסימפטוטות אופקיות: כאשר $x\to\infty$ נחלק מונה ומכנה ב־e^x:

$$f(x)=\frac{1}{1-4e^{-x}}\to 1$$
$$y=1$$

כאשר $x\to-\infty$ המונה שואף ל־0 והמכנה ל־-4:

$$f(x)\to 0$$
$$y=0$$

תשובה: $x=\ln 4$
(מימין) $y=1$
(משמאל) $y=0$

סעיף א (3)
לפי כלל המנה:

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-4)-e^x\cdot e^x}{(e^x-4)^2}$$
$$=\frac{-4e^x}{(e^x-4)^2}$$

הנגזרת שלילית בכל התחום. לכן אין תחום עלייה.
תשובה: יורדת: $x<\ln 4$
יורדת: $x>\ln 4$

סעיף א (4)

- משמאל לאסימפטוטה $x=\ln 4$ הגרף מתחיל קרוב ל־$y=0$ מלמטה. הוא יורד דרך $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$ למינוס אינסוף.
- מימין לאסימפטוטה הגרף יורד מאינסוף ומתקרב ל־$y=1$ מלמעלה.

סקיצה של f: משמאל ל־ln4 יורדת מ־0 דרך (1/3-,0) למינוס אינסוף, מימין יורדת מאינסוף אל y=1
תשובה: ראו סקיצה

סעיף ב (1)

$$g(x)=\frac{e^x-4}{e^x}=1-4e^{-x}$$

התחום הוא $x\neq\ln 4$ כמו של f.

- כאשר $x\to\infty$ הפונקציה שואפת ל־1. זו אסימפטוטה אופקית $y=1$.
- כאשר $x\to-\infty$ הפונקציה שואפת למינוס אינסוף ואין אסימפטוטה.
- בנקודה $x=\ln 4$ הפונקציה שואפת ל־0. אין שם אסימפטוטה אלא נקודה ריקה $(\ln 4,0)$.

תשובה: $y=1$

סעיף ב (2)
הנגזרת $g'(x)=4e^{-x}$ חיובית, ולכן g עולה בתחום $x<\ln 4$ ובתחום $x>\ln 4$ (הנקודה $x=\ln 4$ אינה בתחום ההגדרה). הגרף חותך את ציר ה־y בנקודה $(0,-3)$, עובר דרך הנקודה הריקה $(\ln 4,0)$ ומתקרב ל־$y=1$ מלמטה.
סקיצה של g: עולה דרך (3-,0), נקודה ריקה ב־(ln4,0), מתקרבת ל־y=1
תשובה: ראו סקיצה

סעיף ב (3)
בתחום הזה $g(x)<1$ ולכן האסימפטוטה מעל הגרף:

$$S=\int_{\ln 5}^{\ln 8}\big(1-g(x)\big)dx$$
$$=\int_{\ln 5}^{\ln 8}4e^{-x}dx$$
$$=\Big[-4e^{-x}\Big]_{\ln 5}^{\ln 8}$$

$$= -\frac{4}{8} + \frac{4}{5} = \frac{3}{10}$$

תשובה: 0.3

סעיף ג

$$\frac{e^x}{e^x - 4} = \frac{e^x - 4}{e^x}$$
$$e^{2x} = (e^x - 4)^2$$
$$e^{2x} = e^{2x} - 8e^x + 16$$
$$e^x = 2 \;\Rightarrow\; x = \ln 2$$
$$f(\ln 2) = \frac{2}{2-4} = -1$$

תשובה: $(\ln 2,\ -1)$

סעיף ד

לפי המשפט היסודי, כאשר המשתנה הוא הגבול התחתון:

$$s'(x) = -\big(f(x) - g(x)\big)$$

נסמן $t = e^x$ ונחשב:

$$f - g = \frac{t^2 - (t-4)^2}{t(t-4)} = \frac{8(t-2)}{t(t-4)}$$

בתחום $x < \ln 3$ מתקיים $t < 3$ ולכן המכנה $t(t-4)$ שלילי.

- כאשר $x < \ln 2$ המונה שלילי. לכן $f - g > 0$ ו־$s' < 0$, כלומר s יורדת.
- כאשר $\ln 2 < x < \ln 3$ המונה חיובי. לכן $f - g < 0$ ו־$s' > 0$, כלומר s עולה.

לכן בנקודה $x = \ln 2$ יש מינימום.

תשובה: $x = \ln 2$ **– מינימום**

בגרות קיץ תשפ״ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 4

4. $f(x)$ היא פונקצייה המוגדרת לכל x, ו־ $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת שלה, המוגדרת גם היא לכל x.

נתון: $f'(x) = -2x \cdot e^{-\frac{x^2}{a}}$, a הוא פרמטר.

לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$.

א. מצאו את a.

נתון: $f(0) = a$.

ב. מצאו את הפונקצייה $f(x)$.

ג. **(1)** האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית **<u>או</u>** אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

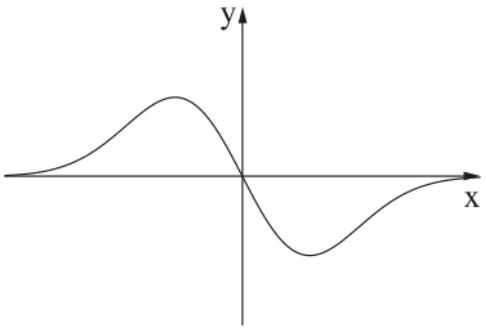
נתונות הפונקציות $h(x) = \frac{1}{f'(x)}$, $m(x) = e^{h(x)}$.

שלושה מבין הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתארים את הפונקציות $f'(x)$, $h(x)$, $m(x)$.

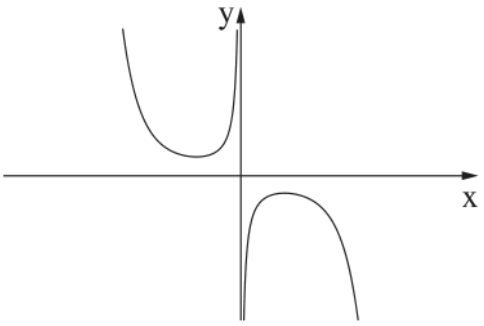
ד. התאימו לכל פונקצייה את הגרף המתאר אותה.

ה. **(1)** מצאו את תחומי הירידה של הפונקצייה $m(x)$.

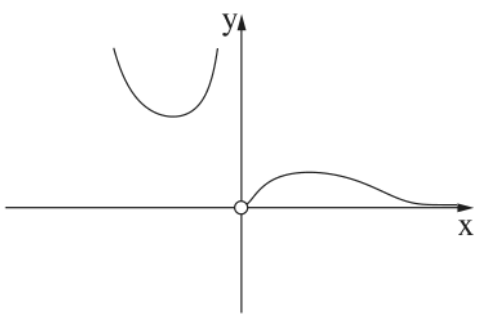
(2) קבעו אם הביטוי $\int_1^2 h(x) \cdot m(x)\,dx$ חיובי או שלילי. נמקו את קביעתכם.



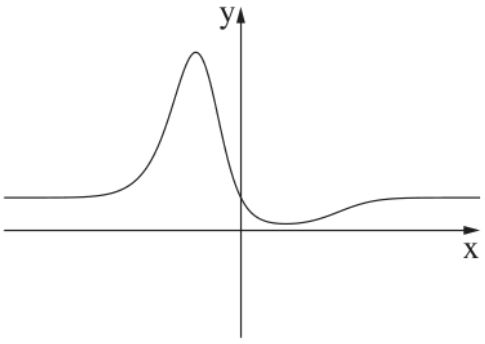
I



II



III



IV

פתרון מלא

סעיף א

נקודת פיתול של f היא נקודה שבה f'' מתאפסת ומחליפה סימן. נגזור את f':

$$f''(x) = -2e^{-\frac{x^2}{a}} - 2x \cdot \left(-\frac{2x}{a}\right) e^{-\frac{x^2}{a}}$$

$$= e^{-\frac{x^2}{a}} \left(\frac{4x^2}{a} - 2\right)$$

נציב $x = \sqrt{2}$ ונשווה לאפס:

$$\frac{4 \cdot 2}{a} - 2 = 0 \;\Rightarrow\; a = 4$$

הגורם שבסוגריים מחליף שם סימן, ולכן זו אכן נקודת פיתול.

תשובה: $a = 4$

סעיף ב

עבור $a = 4$:

$$f'(x) = -2x\, e^{-\frac{x^2}{4}}$$

נשים לב שהנגזרת של המעריך היא $-\frac{x}{2}$, ולכן:

$$\left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right)' = -\frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$f'(x) = 4 \cdot \left(-\frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}\right)$$

לכן:

$$f(x) = 4e^{-\frac{x^2}{4}} + C$$

נציב את הנתון $f(0) = a = 4$:

$$4 + C = 4 \;\Rightarrow\; C = 0$$

$$f(x) = 4e^{-\frac{x^2}{4}}$$

תשובה: $f(x) = 4e^{-\frac{x^2}{4}}$

סעיף ג (1)

נציב $-x$:

$$f(-x) = 4e^{-\frac{(-x)^2}{4}} = 4e^{-\frac{x^2}{4}} = f(x)$$

לכן הפונקצייה **זוגית**, והגרף שלה סימטרי לציר ה־y.

תשובה: הפונקצייה זוגית.

סעיף ג (2)

הפונקצייה מוגדרת ורציפה לכל x, ולכן אין לה אסימפטוטה אנכית.

כאשר x שואף לפלוס או למינוס אינסוף, המעריך שואף למינוס אינסוף:

$$x \to \pm\infty : \quad f(x) \to 0$$

לכן לשני הכיוונים יש אסימפטוטה אופקית:

$y = 0$

תשובה: $y = 0$ **(לשני הכיוונים); אין אסימפטוטה אנכית.**

סעיף ג (3)

הנגזרת מתאפסת רק ב־$x = 0$:

$$f'(x) = -2x\, e^{-\frac{x^2}{4}} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < 0$	$+$	↗
0	0	מקס'
$0 < x$	$-$	↘

$$f(0) = 4$$

תשובה: מקסימום: $(0,\ 4)$

סעיף ג (4)

הגרף בצורת פעמון וסימטרי לציר ה־y. נקודת המקסימום שלו היא $(0, 4)$, והאסימפטוטה $y = 0$ משני הצדדים.

לפי סעיף א, יש לגרף שתי נקודות פיתול:

$$x = \pm\sqrt{2}$$

סקיצה של f(x)=4e^(-x²/4): פעמון סימטרי עם מקסימום (0,4) ואסימפטוטה y=0

תשובה: סקיצה בסרטוט.

סעיף ד

הנגזרת: פונקציה אי־זוגית שמוגדרת לכל x ועוברת בראשית. משמאל לראשית היא חיובית, מימין לה שלילית, ובשני הכיוונים שואפת לאפס. זה **גרף I**.

הפונקצייה h**:** זו ההופכית של הנגזרת:

$$h(x) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{e^{\frac{x^2}{4}}}{2x}$$

היא אינה מוגדרת בראשית, ושם יש לה אסימפטוטה אנכית. היא אי־זוגית: חיובית משמאל לראשית ושלילית מימין לה. בשני הכיוונים הערך המוחלט שלה שואף לאינסוף. זה **גרף II**.

הפונקצייה m**:** חזקה של e, ולכן חיובית בכל התחום.

משמאל לראשית h חיובית, ולכן שם הערכים של m גדולים מ־1.

מימין לראשית h שלילית, ולכן שם m בין אפס לאחד, ושואפת לאפס גם ליד הראשית וגם באינסוף. זה **גרף III**.

תשובה: גרף I – $f'(x)$

גרף II – $h(x)$

גרף III – $m(x)$

סעיף ה (1)

לפי כלל השרשרת:

$$m'(x) = h'(x)\, e^{h(x)}$$

הגורם e^h חיובי, ולכן m יורדת בדיוק במקום שבו h יורדת. נגזור את h:

$$h'(x) = -\frac{(x^2-2)\,e^{\frac{x^2}{4}}}{4x^2}$$

הנגזרת שלילית כאשר:

$$x^2 - 2 > 0$$

כלומר באחד משני התחומים:

$$x < -\sqrt{2}$$
$$x > \sqrt{2}$$

תשובה: $x < -\sqrt{2}$ **או** $x > \sqrt{2}$

סעיף ה (2)

בתחום שבין 1 ל־2 הנגזרת f' שלילית, ולכן גם h שלילית. הפונקצייה m חיובית תמיד.
לכן המכפלה שלילית בכל התחום:

$$h(x) \cdot m(x) < 0, \qquad 1 < x < 2$$

אינטגרל של פונקצייה שלילית על קטע הוא שלילי, ולכן הביטוי **שלילי**.
לבדיקה, החישוב המספרי נותן:

$$\int_1^2 h(x)\,m(x)\,dx \approx -0.33$$

תשובה: שלילי. בקטע הזה h שלילית ו־m חיובית, ולכן המכפלה שלילית.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{1-\ell nx}{\ell nx}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\ell n(-f(x))$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(3) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב־ a את שיעור ה־ x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ וגרף הפונקצייה $g(x)$.

ג. מבין הביטויים I–III קבעו איזה ביטוי הוא הגדול ביותר ואיזה ביטוי הוא הקטן ביותר (אין צורך למצוא את הערך של a). נמקו את תשובתכם.

I. $\int_{a+1}^{a+2}(g(x)-f(x))\,dx$ II. $\int_{a+3}^{a+4}(g(x)-f(x))\,dx$ III. המספר 1

פתרון מלא

סעיף א (1)

הלוגריתם מוגדר רק עבור מספרים חיוביים, והמכנה חייב להיות שונה מאפס:

$$\ln x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 1$$

תחום ההגדרה:

$$x > 0, \quad x \neq 1$$

תשובה: $x > 0,\ \ x \neq 1$

סעיף א (2)

נכתוב את הפונקצייה בצורה נוחה:

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} - 1$$

אסימפטוטה אנכית: ליד $x = 1$ המכנה שואף לאפס והמונה ל־1, ולכן:

$$x = 1$$

אסימפטוטה אופקית: כאשר $x \to \infty$ המנה $\frac{1}{\ln x}$ שואפת לאפס:

$$f(x) \to -1 \;\Rightarrow\; y = -1$$

גם ליד הראשית (מימין) הפונקצייה שואפת לאותו ערך, אבל שם זו רק נקודה ריקה, כי הפונקצייה לא מוגדרת משמאל לאפס:

$$x \to 0^+ : \quad f(x) \to -1$$

תשובה: $x = 1$
$y = -1$

סעיף א (3)
נגזור:

$$f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x}$$

בכל תחום ההגדרה המכנה חיובי, ולכן הנגזרת שלילית תמיד.
הפונקצייה יורדת בכל אחד מהתחומים, ואין לה תחומי עלייה:

$$0 < x < 1, \qquad x > 1$$

תשובה: ירידה:
$0 < x < 1, \;\; x > 1$
אין תחומי עלייה.

סעיף א (4)
נקודת חיתוך עם ציר ה־x:

$$\ln x = 1 \;\Rightarrow\; x = e$$

משמאל ל־1: הגרף יורד מהנקודה הריקה $(0, -1)$ למינוס אינסוף.
מימין ל־1: הגרף יורד מפלוס אינסוף, חותך את ציר ה־x בנקודה $(e, 0)$, ושואף לאסימפטוטה האופקית.
סקיצה של f: אסימפטוטות x=1 ו-y=-1, נקודה ריקה (0,-1), חיתוך (e,0), יורדת בשני הענפים
תשובה: סקיצה בסרטוט.

סעיף ב (1)
הלוגריתם דורש ארגומנט חיובי, כלומר f שלילית:

$$\frac{1}{\ln x} - 1 < 0 \iff \frac{1 - \ln x}{\ln x} < 0$$

מנה שלילית כאשר המונה והמכנה בסימנים הפוכים:
מכנה שלילי – בין 0 ל־1. שם המונה חיובי, ולכן התחום מתאים.
מכנה חיובי – מימין ל־1. שם צריך מונה שלילי:

$$\ln x > 1 \;\Rightarrow\; x > e$$

תחום ההגדרה:

$$0 < x < 1, \qquad x > e$$

תשובה: $0 < x < 1$ **או** $x > e$

סעיף ב (2)
ליד 1 משמאל: הפונקצייה f שואפת למינוס אינסוף, ולכן הארגומנט שואף לאינסוף:

$$x \to 1^- : \;\; g(x) \to \infty$$

ליד e מימין: הפונקצייה f שואפת לאפס משמאל לציר, ולכן הארגומנט שואף לאפס מלמעלה:

$$x \to e^+ : \;\; g(x) \to -\infty$$

באינסוף:

$$-f(x) \to 1 \;\Rightarrow\; g(x) \to \ln 1 = 0$$

גם ליד הראשית g שואפת לאפס, אבל שם זו רק נקודה ריקה.

תשובה: $x = 1, \quad x = e$
$y = 0$

סעיף ב (3)
הפונקצייה חיובית כאשר הארגומנט גדול מ־1:

$$-f(x) > 1 \iff \frac{1}{\ln x} < 0$$
$$\iff 0 < x < 1$$

בתחום השני הארגומנט בין 0 ל־1, ולכן שם g שלילית:

$$x > e: \quad 0 < 1 - \frac{1}{\ln x} < 1$$

תשובה: חיובית: $0 < x < 1$
שלילית: $x > e$

סעיף ב (4)
בתחום הראשון: הגרף מתחיל בנקודה הריקה שבראשית ועולה לפלוס אינסוף ליד האסימפטוטה $x = 1$.
בתחום השני: הגרף עולה ממינוס אינסוף ליד האסימפטוטה $x = e$ ושואף לציר ה־x מלמטה.
הפונקצייה עולה בשני התחומים, כי הארגומנט $-f$ עולה.
סקיצה של g: בתחום 0<x<1 עולה מ-0 לאינסוף; בתחום x>e עולה ממינוס אינסוף ושואפת ל-0
תשובה: סקיצה בסרטוט.

סעיף ג
בתחום הראשון g חיובית ו־f שלילית, ולכן אין שם חיתוך. החיתוך בנקודה a נמצא בתחום שבו $x > e$.
בתחום זה g עולה ו־f יורדת, ולכן ההפרש עולה. הוא מתאפס ב־a, ולכן מימין ל־a הוא חיובי:

$$x > a: \quad g(x) - f(x) > 0$$

ההפרש עולה, ולכן על הקטע הימני יותר ערכיו גדולים יותר:

$$\int_{a+1}^{a+2} (g - f)\, dx < \int_{a+3}^{a+4} (g - f)\, dx$$

באינסוף ההפרש שואף להפרש האסימפטוטות:

$$g - f \to 0 - (-1) = 1$$

ההפרש עולה אל 1 ולכן תמיד קטן מ־1. אורך הקטע הוא 1, ולכן כל אחד מהאינטגרלים קטן מ־1:

$$\mathrm{I} < \mathrm{II} < \mathrm{III} = 1$$

לבדיקה, בחישוב מספרי:

$$a \approx 10.08, \qquad \mathrm{I} \approx 0.07, \qquad \mathrm{II} \approx 0.13$$

תשובה: הגדול ביותר: III
הקטן ביותר: I

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=(e^x-1)^n-4$, המוגדרת לכל x. n הוא מספר טבעי גדול או שווה ל־ 2.

ענו על סעיף א עבור n זוגי ועבור n אי־זוגי.

א. **(1)** מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (אם יש כאלה).

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ענו על הסעיפים ב–ג עבור $n=2$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=3e^x-7$, המוגדרת לכל x.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך שבין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין גרף הפונקצייה $g(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=|f(x)|$, המוגדרת לכל x.

ג. **(1)** כמה נקודות קיצון יש לפונקצייה $h(x)$? מצאו את שיעורי הנקודות הללו, וקבעו את סוגן.

(2) מצאו את תחום הערכים של k שעבורו הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקצייה $h(x)$ ב־ 3 נקודות.

פתרון מלא

סעיף א (1)

כאשר $x\to\infty$ הפונקציה שואפת לאינסוף. כאשר $x\to-\infty$ מתקיים $e^x\to 0$ ולכן:

$$f(x)\to(-1)^n-4$$

עבור n זוגי: $(-1)^n=1$:

$$y=-3$$

עבור n אי־זוגי: $(-1)^n=-1$:

$$y=-5$$

תשובה: n **זוגי:** $y=-3$
n **אי־זוגי:** $y=-5$

סעיף א (2)

$$f'(x)=n\left(e^x-1\right)^{n-1}e^x$$

הנגזרת מתאפסת רק כאשר $e^x=1$ כלומר $x=0$, ושם $f(0)=-4$. הסימן של הנגזרת נקבע לפי $\left(e^x-1\right)^{n-1}$. הביטוי e^x-1 שלילי משמאל ל־0 וחיובי מימין.

עבור n זוגי: החזקה $n-1$ אי־זוגית. הנגזרת שלילית משמאל ל־0 וחיובית מימין. לכן $(0,-4)$ מינימום.

עבור n אי־זוגי: החזקה $n-1$ זוגית. הנגזרת אינה שלילית בשני הצדדים ואין החלפת סימן. לכן אין נקודת קיצון. בנקודה $(0,-4)$ יש משיק אופקי.

תשובה: n **זוגי: מינימום** $(0,-4)$
n **אי־זוגי: אין קיצון**

סעיף א (3)

עבור n זוגי: הגרף מתחיל קרוב ל־$y=-3$, יורד עד המינימום $(0,-4)$ ועולה לאינסוף. הוא חותך את ציר ה־x כאשר $e^x-1=\sqrt[n]{4}$. למשל עבור $n=2$ זו הנקודה $(\ln 3,0)$.

סקיצה עבור n זוגי: יורדת מ־y=-3 למינימום (0,-4) ועולה

עבור n אי־זוגי: הגרף מתחיל קרוב ל־$y=-5$ ועולה כל הזמן. בנקודה $(0,-4)$ יש משיק אופקי.

סקיצה עבור n אי־זוגי: עולה מ־y=-5 עם משיק אופקי ב־(0,-4)

תשובה: ראו סקיצות

סעיף ב (1)

עם $n=2$:

$$f(x)=(e^x-1)^2-4=e^{2x}-2e^x-3$$

נשווה ל־$g(x)$ ונסמן $t=e^x$:

$$t^2-2t-3=3t-7$$
$$t^2-5t+4=0$$

כלומר $t=1$ או $t=4$.

עבור $t=1$ מתקבל $x=0$ ו־$y=3-7=-4$.

עבור $t=4$ מתקבל $x=\ln 4$ ו־$y=12-7=5$.

תשובה: $(0,\ -4)$
$(\ln 4,\ 5)$

סעיף ב (2)

בין נקודות החיתוך $1<t<4$ ולכן $t^2-5t+4<0$. כלומר g מעל f:

$$g-f=-e^{2x}+5e^x-4$$
$$S=\int_0^{\ln 4}\left(-e^{2x}+5e^x-4\right)dx$$
$$=\left[-\tfrac{1}{2}e^{2x}+5e^x-4x\right]_0^{\ln 4}$$
$$=(-8+20-4\ln 4)-\left(-\tfrac{1}{2}+5\right)$$
$$=7.5-4\ln 4\approx 1.95$$

תשובה: $7.5-4\ln 4\approx 1.95$

סעיף ג (1)

הפונקציה f שלילית כאשר $x<\ln 3$ וחיובית כאשר $x>\ln 3$. הפונקציה $h=|f|$ מקפלת את החלק השלילי מעל ציר ה־x:

- המינימום של f בנקודה $(0,-4)$ הופך למקסימום $(0,4)$.
- בנקודת האפס $x=\ln 3$ הגרף נוגע בציר ה־x ויוצר "שפיץ". זו נקודת מינימום $(\ln 3,0)$.
- האסימפטוטה $y=-3$ הופכת ל־$y=3$.

תשובה: שתי נקודות קיצון:
מקסימום $(0,4)$
מינימום $(\ln 3,0)$

סעיף ג (2)

נעקוב אחרי הגרף של h:

- משמאל ל־0 הוא עולה מהאסימפטוטה $y=3$ עד 4.
- בין 0 ל־$\ln 3$ הוא יורד מ־4 עד 0.
- מימין ל־$\ln 3$ הוא עולה מ־0 לאינסוף.

ישר אופקי פוגש כל אחד משלושת החלקים רק כאשר הוא מעל האסימפטוטה ומתחת למקסימום:

$$3 < k < 4$$

תשובה: $3 < k < 4$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\ell n(x)+\frac{1}{x}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=(x+1)(1-\ell n(x))$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x.

(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת תחום הקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקצייה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=\frac{1}{x}\cdot g'(x)$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $g(x)$.

ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=e$ ו־ $x=1$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הלוגריתם מוגדר עבור $x>0$ והמכנה שונה מ־0:

$$x>0$$

תשובה: $x>0$

סעיף א (2)

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

הנגזרת מתאפסת בנקודה $x=1$. משמאל לה הנגזרת שלילית ומימין חיובית:

$$f(1)=0+1=1$$

תשובה: מינימום: $(1,\ 1)$

סעיף א (3)

- כאשר $x\to 0^+$ האיבר $\frac{1}{x}$ שולט והפונקציה שואפת לאינסוף. לכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית.
- הפונקציה יורדת עד המינימום $(1,1)$ ואחר כך עולה לאט לאינסוף.
- המינימום הוא 1 ולכן הפונקציה חיובית בכל התחום.

סקיצה של f: יורדת מאינסוף ליד ציר y עד מינימום (1,1) ועולה לאט

תשובה: ראו סקיצה

סעיף ב (1)

$$(x+1)(1-\ln x)=0$$

הגורם $x+1$ חיובי בתחום. לכן:

$$\ln x=1\ \Rightarrow\ x=e$$

תשובה: $(e,\ 0)$

סעיף ב (2)
לפי כלל המכפלה:

$$g'(x) = (1 - \ln x) + (x+1) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$$
$$= 1 - \ln x - 1 - \frac{1}{x}$$
$$= -\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

מסעיף א הפונקציה f חיובית תמיד. לכן $g'(x) < 0$ בכל התחום.

תשובה: יורדת: $x > 0$
אין תחום עלייה

סעיף ב (3)

$$g''(x) = -f'(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

- כאשר $0 < x < 1$ הנגזרת השנייה חיובית ולכן g קעורה כלפי מעלה.
- כאשר $x > 1$ הנגזרת השנייה שלילית ולכן g קעורה כלפי מטה.

תשובה: קעורה כלפי מעלה: $0 < x < 1$
קעורה כלפי מטה: $x > 1$

סעיף ב (4)

- כאשר $x \to 0^+$ הגורם $1 - \ln x$ שואף לאינסוף ולכן g שואפת לאינסוף.
- הפונקציה יורדת כל הזמן. בנקודה $(1, 2)$ יש נקודת פיתול.
- היא חותכת את ציר ה־x בנקודה $(e, 0)$ ויורדת למינוס אינסוף.

סקיצה של g: יורדת מאינסוף, נקודת פיתול (1,2), חותכת את ציר x ב־(e,0) ויורדת
תשובה: ראו סקיצה

סעיף ג
מסעיף ב (2):

$$h(x) = \frac{g'(x)}{x} = -\frac{f(x)}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2}$$

בקטע בין 1 ל־e הפונקציה h שלילית ולכן השטח הוא מינוס האינטגרל:

$$S = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

פונקציה קדומה של $\frac{\ln x}{x}$ היא $\frac{(\ln x)^2}{2}$:

$$S = \left[\tfrac{1}{2}(\ln x)^2 - \tfrac{1}{x}\right]_1^e$$
$$= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{e}\right) - (0 - 1)$$
$$= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{e} \approx 1.13$$

תשובה: $\frac{3}{2} - \frac{1}{e} \approx 1.13$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

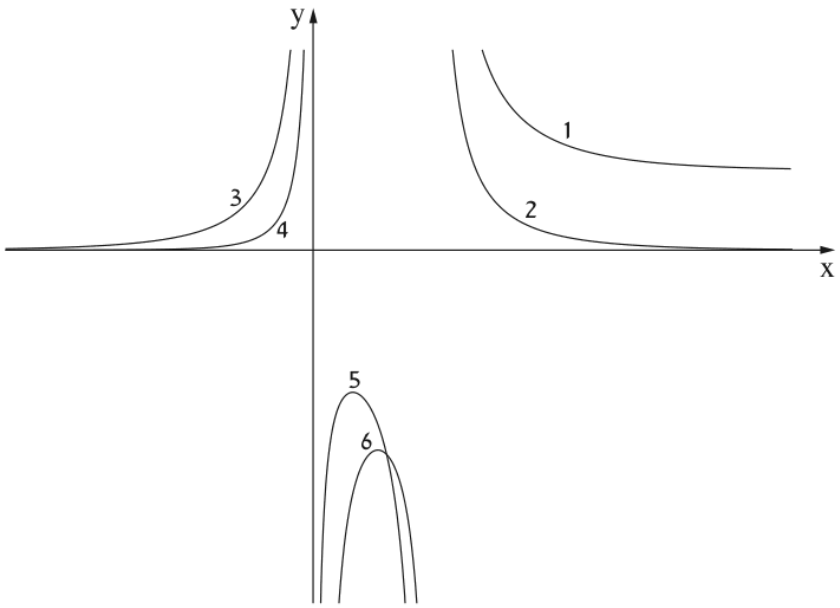
(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\dfrac{5e^{x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$ המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין גרף הפונקצייה $g(x)$.

לפניכם סרטוט הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$. כל אחד מן החלקים של הגרפים מסומן בסרטוט בספרה אחרת.



ג. רשמו לאיזו פונקצייה שייך כל אחד מן החלקים המסומנים בסרטוט. נמקו את תשובתכם.

ד. לפניכם שני ביטויים, I–II. קבעו בנוגע לכל אחד מן הביטויים אם הוא שלילי או חיובי. נמקו <u>ללא חישוב</u>.

$$\textbf{I.}\ \int_{-4}^{-1}(f(x)-g(x))\,dx \qquad \textbf{II.}\ \int_{\ell n\frac{8}{5}}^{\ell n2}(f(x)-g(x))\,dx$$

ה. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ ובין הישרים $x=\ell n9$ ו־ $x=\ell n16$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נפרק את המכנה. נסמן $t=e^x$:

$$e^{2x}-5e^x+4=t^2-5t+4$$
$$=(t-1)(t-4)$$
$$=(e^x-1)(e^x-4)$$

המכנה מתאפס כאשר $e^x=1$, כלומר $x=0$, או כאשר $e^x=4$, כלומר $x=\ln 4$.

תשובה: $x \neq 0,\ x \neq \ln 4$

סעיף א (2)

אסימפטוטות אנכיות: בנקודות שבהן המכנה מתאפס המונה $2e^{2x} \neq 0$, ולכן $x = 0$ ו־$x = \ln 4$ הן אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטות אופקיות:

כאשר $x \to -\infty$: $e^x \to 0$, המונה שואף ל־0 והמכנה ל־4:

$$f(x) \to \frac{0}{4} = 0$$

כאשר $x \to \infty$: נחלק מונה ומכנה ב־e^{2x}:

$$f(x) = \frac{2}{1 - 5e^{-x} + 4e^{-2x}} \to \frac{2}{1} = 2$$

תשובה: אנכיות: $x = 0$ **ו־**$x = \ln 4$**. אופקיות:** $y = 0$ **ו־**$y = 2$**.**

סעיף א (3)

נגזור לפי כלל המנה (נסמן $D = e^{2x} - 5e^x$, $D' = 2e^{2x} - 5e^x$):

$$f'(x) = \frac{4e^{2x}D - 2e^{2x}D'}{D^2}$$

$$= \frac{2e^{2x}\left(2D - D'\right)}{D^2}$$

$$2D - D' =$$

$$2e^{2x} - 10e^x + 8 - 2e^{2x} + 5e^x$$

$$= 8 - 5e^x$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(8 - 5e^x)}{D^2}$$

המכנה $D^2 > 0$ ו־$2e^{2x} > 0$, לכן סימן הנגזרת הוא סימן $8 - 5e^x$. היא מתאפסת כאשר $e^x = \frac{8}{5}$, כלומר $x = \ln \frac{8}{5}$ (שנמצא בין 0 ל־$\ln 4$).

x	$x < 0$	$0 < x < \ln \frac{8}{5}$	$x = \ln \frac{8}{5}$	$\ln \frac{8}{5} < x < \ln 4$	$x > \ln 4$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	↗	↗	מקס'	↘	↘

תשובה: עלייה: $x < 0$ **וגם** $0 < x < \ln \frac{8}{5}$**. ירידה:** $\ln \frac{8}{5} < x < \ln 4$ **וגם** $x > \ln 4$**.**

סעיף ב

לשתי הפונקציות אותו מכנה, ולכן נשווה מונים:

$$2e^{2x} = 5e^x \quad / : e^x$$

$$2e^x = 5 \ \Rightarrow \ x = \ln \frac{5}{2}$$

נחשב את y (עם $e^x = \frac{5}{2}$):

$$g\left(\ln \tfrac{5}{2}\right) = \frac{5 \cdot \frac{5}{2}}{\frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4}$$

$$= \frac{12.5}{-2.25} = -\frac{50}{9}$$

תשובה: $\left(\ln\frac{5}{2},\ -\frac{50}{9}\right)$

סעיף ג

כאשר $x > \ln 4$: $f(x) \to 2$ ו־$g(x) \to 0$ (נחלק ב־e^{2x}: $g = \frac{5e^{-x}}{1-5e^{-x}+4e^{-2x}} \to 0$). לכן חלק 1, השואף ל־$y = 2$, שייך ל־$f$, וחלק 2 שייך ל־$g$.

כאשר $x < 0$:

$$f(x) - g(x) = \frac{e^x(2e^x - 5)}{(e^x - 1)(e^x - 4)}$$

כאן $e^x < 1$, לכן $2e^x - 5 < 0$, ושני גורמי המכנה שליליים (המכנה חיובי). מכאן $f(x) - g(x) < 0$: גרף f מתחת לגרף g. לכן חלק 4 (התחתון) שייך ל־f וחלק 3 ל־g.

כאשר $0 < x < \ln 4$: לפי סעיף א, ל־f יש מקסימום ב־$x = \ln\frac{8}{5} \approx 0.47$ שערכו $f = -\frac{32}{9} \approx -3.56$. ל־$g$:

$$g'(x) = \frac{5e^x(4 - e^{2x})}{D^2}$$

מתאפסת ב־$x = \ln 2 \approx 0.69$, ושם $g(\ln 2) = \frac{10}{-2} = -5$. כלומר המקסימום של f גבוה יותר ושמאלי יותר – זהו חלק 5, וחלק 6 שייך ל־g.

תשובה: f: חלקים 1, 4, 5; g: חלקים 2, 3, 6

סעיף ד

ביטוי I: בתחום $-4 \le x \le -1$ (כלומר $x < 0$) ראינו בסעיף ג כי גרף f מתחת לגרף g, כלומר $f(x) - g(x) < 0$. אינטגרל של פונקצייה שלילית על קטע שבו הגבול התחתון קטן מהעליון הוא שלילי.

ביטוי II: הקטע $\ln\frac{8}{5} \le x \le \ln 2$ נמצא בתוך $0 < x < \ln 4$ ומשמאל לנקודת החיתוך $x = \ln\frac{5}{2}$. משמאל לנקודת החיתוך, בתחום זה, גרף f (חלק 5) מעל גרף g (חלק 6), כפי שרואים בסקיצה מסעיף ג (הגרפים אינם נחתכים בקטע, ולכן הסדר ביניהם קבוע בכולו). לכן $f(x) - g(x) > 0$ בקטע, והאינטגרל חיובי.

תשובה: ביטוי I שלילי, ביטוי II חיובי

סעיף ה

בתחום $\ln 9 \le x \le \ln 16$ (מימין ל־$\ln 4$) גרף f (חלק 1) מעל גרף g (חלק 2), ולכן:

$$S = \int_{\ln 9}^{\ln 16} \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

$$f(x) - g(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x}{e^{2x} - 5e^x + 4}$$

המונה הוא בדיוק הנגזרת של המכנה, ולכן הפונקצייה הקדומה היא $\ln$ של המכנה (המכנה חיובי בתחום):

$$S = \Big[\ln\left(e^{2x} - 5e^x + 4\right)\Big]_{\ln 9}^{\ln 16}$$

$$= \ln(256 - 80 + 4) - \ln(81 - 45 + 4)$$

$$= \ln 180 - \ln 40 = \ln 4.5$$

$$S \approx 1.5$$

תשובה: $S = \ln 4.5 \approx 1.5$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=4x(\ell n(x^2)-1)$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

(3) הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא אי־זוגית.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) האם יש לפונקצייה $f(x)$ נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $g(x)$ המאונכות לצירים.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

(4) בכמה נקודות הגרפים של $f(x)$ ו־ $g(x)$ נחתכים זה עם זה? נמקו את תשובתכם.

ד. כתבו דוגמה לפונקצייה קדומה של $g(x)$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הביטוי $\ln(x^2)$ מוגדר כאשר $x^2>0$, כלומר לכל $x\neq 0$.

תשובה: $x\neq 0$

סעיף א (2)

$$4x\left(\ln(x^2)-1\right)=0$$

$x=0$ אינו בתחום, ולכן:

$$\ln(x^2)=1 \;\Rightarrow\; x^2=e$$
$$x=\pm\sqrt{e}$$

תשובה: $(\pm\sqrt{e},\ 0)$

סעיף א (3)

התחום $x\neq 0$ סימטרי סביב 0, ו־$(-x)^2=x^2$:

$$f(-x)=4(-x)\left(\ln\left((-x)^2\right)-1\right)$$
$$=-4x\left(\ln(x^2)-1\right)=-f(x)$$

לכן הפונקצייה אי־זוגית.

תשובה: $f(-x)=-f(x)$ **לכל** $x\neq 0$ **– הפונקצייה אי־זוגית.**

סעיף ב (1)

לפי כלל המכפלה, ו־$\left(\ln(x^2)\right)'=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$:

$$f'(x)=4\left(\ln(x^2)-1\right)+4x\cdot\frac{2}{x}$$
$$=4\ln(x^2)+4$$
$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \ln(x^2)=-1$$
$$x^2=\frac{1}{e}\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	$x<-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}<x<0$	0	$0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$x>\frac{1}{\sqrt{e}}$
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
f	↗	מקס'	↘	↘	מינ'	↗	

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{4}{\sqrt{e}}(-1-1)=-\frac{8}{\sqrt{e}}$$

ומאי־הזוגיות: $f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{8}{\sqrt{e}}$.

תשובה: מקסימום $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}},\ \frac{8}{\sqrt{e}}\right)$**; מינימום:** $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\ -\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$

סעיף ב (2)

$$f''(x)=\left(4\ln(x^2)+4\right)'=\frac{8}{x}$$

$f''(x)\neq 0$ לכל x בתחום. הסימן של f'' מתחלף רק ב־$x=0$ (שלילי משמאל, חיובי מימין), אבל $x=0$ אינו בתחום ההגדרה – לכן אין נקודת פיתול.

תשובה: אין נקודות פיתול: $f''(x)=\frac{8}{x}\neq 0$**, ובנקודה** $x=0$ **הפונקצייה אינה מוגדרת.**

סעיף ב (3)

כאשר $x\to 0$ גם $f(x)\to 0$ (הגורם $x\ln(x^2)$ שואף ל־0), ולכן בראשית יש „חור" בגרף. כאשר $x\to\infty$, $f\to\infty$, וכאשר $x\to-\infty$, $f\to-\infty$.

סקיצה של f: מקסימום ב-(e, 8/√e√/1–), מינימום ב-(e, –8/√e√/1), חיתוך ב-±e√, חור בראשית

תשובה: גרף אי־זוגי עם „חור" בראשית: מקסימום $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$**, מינימום** $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$**, וחיתוך עם ציר ה־**$x$ **ב־**$\pm\sqrt{e}$.

סעיף ג (1)

$g(x)=\frac{1}{f(x)}$ מוגדרת כאשר f מוגדרת וגם $f(x)\neq 0$, כלומר $x\neq 0$ ו־$x\neq\pm\sqrt{e}$.

תשובה: $x\neq 0,\ x\neq\pm\sqrt{e}$

סעיף ג (2)

אנכיות: כאשר $x\to\pm\sqrt{e}$ וכאשר $x\to 0$, $f(x)\to 0$ ולכן $g(x)\to\pm\infty$: האסימפטוטות $x=\sqrt{e}$, $x=-\sqrt{e}$, $x=0$.

אופקית: כאשר $x\to\pm\infty$, $|f(x)|\to\infty$ ולכן $g(x)\to 0$: האסימפטוטה $y=0$.

תשובה: $x=0,\ x=\pm\sqrt{e},\ y=0$

סעיף ג (3)

g אי־זוגית (כמו f), סימנה כסימן f, והיא עולה היכן ש־f יורדת ולהפך. לכן לגרף g יש מינימום ב־$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{\sqrt{e}}{8}\right)$ ומקסימום ב־$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{\sqrt{e}}{8}\right)$.

סקיצה של g=1/f עם אסימפטוטות x=0, x=±√e, y=0

תשובה: גרף אי־זוגי עם אסימפטוטות $x=0,\ x=\pm\sqrt{e},\ y=0$**, מינימום** $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{\sqrt{e}}{8}\right)$ **ומקסימום** $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{\sqrt{e}}{8}\right)$.

סעיף ג (4)

$$f(x)=g(x)=\frac{1}{f(x)} \ \Rightarrow \ f^2(x)=1$$

כלומר $f(x)=1$ או $f(x)=-1$.

נספור לפי הגרף של f עבור $x>0$: f יורדת מ־0 (ליד הראשית) עד $-4.85\approx -\frac{8}{\sqrt{e}}$, ואחר כך עולה עד ∞.

- $f(x)=-1$: פעם אחת בירידה ופעם אחת בעלייה – 2 פתרונות.
- $f(x)=1$: רק בעלייה, אחרי $x=\sqrt{e}$ – פתרון 1.

כלומר 3 פתרונות עבור $x>0$, ומאי־הזוגיות עוד 3 עבור $x<0$.

תשובה: 6 **נקודות חיתוך**

סעיף ד

$$g(x)=\frac{1}{4x\left(\ln(x^2)-1\right)}$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{2}{x}}{\ln(x^2)-1}$$

המונה $\frac{2}{x}$ הוא הנגזרת של $\ln(x^2)-1$, ולכן (צורה $\frac{h'}{h}$):

$$G(x)=\frac{1}{8}\ln\left|\ln(x^2)-1\right|$$

בדיקה: $G'(x)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2/x}{\ln(x^2)-1}=g(x)$.

תשובה: $G(x)=\frac{1}{8}\ln\left|\ln(x^2)-1\right|$ **(בתוספת קבוע)**

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=x^2e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א. **(1)** מצאו את התחום שבו הפונקצייה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה־ x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ג–ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

הפונקצייה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקצייה $g(x)$ $\left(g'(x)=f(x)\right)$.

ד. **(1)** מהו תחום העלייה של הפונקצייה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב־ B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקצייה $g(x)$ הוא הגבוה מבין כל נקודות הפיתול שלה.

נתון כי שיעור ה־ y של הנקודה B הוא $\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

x^2 ו־ e^{a-x^3} מוגדרים לכל x.

תשובה: כל x

סעיף א (2)

לפי כלל המכפלה ($\left(e^{a-x^3}\right)'=-3x^2e^{a-x^3}$):

$$f'(x)=2xe^{a-x^3}-3x^4e^{a-x^3}$$
$$=xe^{a-x^3}\left(2-3x^3\right)$$

$e^{a-x^3}>0$, ולכן $f'(x)=0$ כאשר $x=0$ או $x^3=\frac{2}{3}$, כלומר $x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\approx 0.87$.

x	$x<0$	0	$0<x<0.87$	0.87	$x>0.87$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	מינ'	↗	מקס'	↘

(בטבלה 0.87 מייצג את $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.)

תשובה: מינימום ב־$x=0$, מקסימום ב־$x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\approx 0.87$

סעיף ב

גרף f' חותך את ציר ה־x ב־$x=0$ וב־$x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, וביניהן $f'(x)>0$. לכן השטח הכלוא הוא:

$$S=\int_0^{\sqrt[3]{2/3}} f'(x)\,dx$$
$$=f\left(\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}\right)-f(0)$$
$$=\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}e^{a-\frac{2}{3}}-0$$

נשווה לנתון:

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}e^{a-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\tfrac{4e}{9}}=\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}e^{\frac{1}{3}}$$
$$a-\tfrac{2}{3}=\tfrac{1}{3}\ \Rightarrow\ a=1$$

תשובה: $a=1$

סעיף ג

עם $a=1$: $f(x)=x^2e^{1-x^3}\geq 0$. נקודות הקיצון: מינימום $(0,0)$ ומקסימום $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}e^{\frac{1}{3}}\right)\approx (0.87,\ 1.07)$.

כאשר $x\to-\infty$: $f\to\infty$. כאשר $x\to\infty$: $e^{1-x^3}\to 0$ מהר, ו־$f\to 0$.

סקיצה של f: מינימום בראשית, מקסימום ב-(0.87,1.07), שואפת ל-0 מימין

תשובה: הגרף מעל ציר ה־x או עליו: מינימום $(0,0)$, מקסימום בקירוב $(0.87,\ 1.07)$, ואחריו הגרף שואף ל־0.

סעיף ד (1)

g היא פונקצייה קדומה של f, ולכן $g'(x)=f(x)=x^2e^{1-x^3}$.

$g'(x)\geq 0$ לכל x, ומתאפסת רק בנקודה הבודדת $x=0$. לכן g עולה בכל תחום הגדרתה.

תשובה: g עולה לכל x (אין תחומי ירידה)

סעיף ד (2)

$g''(x)=f'(x)$. נקודות פיתול של g הן נקודות שבהן $g''=f'$ מחליפה סימן – אלה נקודות הקיצון של f:

$x=0$ ו־$x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ (לפי טבלת הסימנים בסעיף א).

תשובה: 2 נקודות פיתול

סעיף ה

נמצא פונקציות קדומות של f (המונה x^2 הוא, עד כדי קבוע, הנגזרת של המעריך):

$$\int x^2e^{1-x^3}dx=-\frac{1}{3}e^{1-x^3}+C$$

הנקודה B היא נקודת הפיתול עם $x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; שם $1-x^3=\frac{1}{3}$:

$$-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}}+C=\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$$
$$C=\frac{e}{3}$$

$$g(x) = \frac{e - e^{1-x^3}}{3}$$

תשובה: $g(x) = \frac{e}{3} - \frac{1}{3}e^{1-x^3}$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 5

5. נתונה פונקצייה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקצייה מוגדרת לכל x ורציפה, הפונקצייה היא אי־זוגית, הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה של הפונקצייה, ולפונקצייה יש נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם $(-1,-a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=\ell n\left(f(x)\right)$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $h(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקצייה $h(x)$ חותך את ציר ה־x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך את ציר ה־x בשתי נקודות.

נתון: $f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת: $g'(x)=f(x)$ וגם: $g(0)=0$.

ג. **(1)** מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

(2) האם הפונקצייה $g(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל $\int_{-5}^{t} g(x)dx$, $t>-5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים $2\cdot\int_{-5}^{t} g(x)dx=\int_{-5}^{5} g(x)dx$? נמקו.

פתרון מלא

סעיף א

f אי־זוגית, ולכן גרפה סימטרי ביחס לראשית ו־$f(0)=0$. יש לה בדיוק שתי נקודות קיצון, $(-1,-a)$ ו־$(1,a)$ עם $a>0$, ואסימפטוטה $y=0$.

לכן: משמאל ל־$x=-1$ הגרף יורד מ־0 (האסימפטוטה) עד המינימום $(-1,-a)$, עולה דרך הראשית עד המקסימום $(1,a)$, ואחר כך יורד ושואף שוב ל־0.

סקיצה אפשרית של f: מינימום (–1,–a), מקסימום (a,1), עוברת בראשית, אסימפטוטה y=0

תשובה: גרף אי־זוגי שעובר בראשית, עם מינימום $(-1,-a)$ ומקסימום $(1,a)$, ושואף ל־0 בשני הצדדים.

סעיף ב (1)

$h(x)=\ln f(x)$ מוגדרת כאשר $f(x)>0$. לפי הסקיצה (ומכיוון שלפונקצייה אין קיצון נוסף), $f(x)>0$ בדיוק כאשר $x>0$.

תשובה: $x>0$

סעיף ב (2)

כאשר $x\to 0^+$: $f(x)\to 0^+$, ולכן $h(x)\to-\infty$ – אסימפטוטה אנכית $x=0$.

כאשר $x\to\infty$: $f(x)\to 0^+$, ולכן $h(x)\to-\infty$ – אין אסימפטוטה אופקית.

תשובה: $x=0$ **בלבד**

סעיף ב (3)

$\ln$ פונקצייה עולה, ולכן ל־h יש מקסימום באותה נקודה כמו ל־f: $(1,\ \ln a)$, והיא עולה משמאל לה ויורדת מימין לה (בשני הצדדים שואפת ל־$-\infty$).

הגרף יחתוך את ציר ה־x בשתי נקודות בדיוק כאשר המקסימום מעל ציר ה־x:

$$\ln a > 0 \ \Rightarrow \ a > 1$$

תשובה: $a>1$

סעיף ב (4)

עבור $a>1$: אסימפטוטה $x=0$, עלייה עד המקסימום $(1,\ln a)$ שמעל ציר ה־x, ירידה לאחריו, ושני חיתוכים עם ציר ה־x (אחד משני צידי $x=1$).

סקיצה של h=ln f עבור a>1: אסימפטוטה x=0, מקסימום (1, ln a), שני חיתוכים עם ציר x

תשובה: אסימפטוטה $x=0$**, מקסימום** $(1,\ln a)$ **מעל ציר ה־**x**, ושתי נקודות חיתוך עם ציר ה־**x**.**

סעיף ג (1)

g קדומה של $f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$. המונה הוא פי 2 מהנגזרת של המכנה $\left(1+x^2\right)'=2x$):

$$g(x)=2\ln(1+x^2)+C$$

$g(0)=0$: $2\ln 1+C=0$, ולכן $C=0$.

$$g(x)=2\ln(1+x^2)$$

תשובה: $g(x)=2\ln(1+x^2)$

סעיף ג (2)

$$g(-x)=2\ln\left(1+(-x)^2\right)$$
$$=2\ln(1+x^2)=g(x)$$

לכן g זוגית.

תשובה: זוגית

סעיף ד

g זוגית, ולכן השטח מתחת לגרפה בקטע $[-5,0]$ שווה לשטח בקטע $[0,5]$:

$$\int_{-5}^{0} g(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-5}^{5} g(x)\,dx$$

לכן $t=0$ מקיים את השוויון $2\int_{-5}^{t} g(x)dx=\int_{-5}^{5} g(x)dx$.

זהו הערך היחיד: $g(x)>0$ לכל $x\neq 0$, ולכן $\int_{-5}^{t} g(x)dx$ גדל ממש ככל ש־t גדל, ומקבל כל ערך פעם אחת בלבד.

תשובה: $t=0$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$ המוגדרת לכל x.

א. **(1)** מְצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ y (אם יש כאלה).

(2) מְצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ y.

(3) מְצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(4) סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x - x}$ המוגדרת לכל x.

ב. **(1)** מְצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $g(x)$ המאונכות לציר ה־ y.

(2) מְצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x (אם יש כאלה).

(3) הוכיחו כי $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x - x)^2}$.

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ ומְצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקצייה $g(x)$. נַמקו את התשובה.

ד. סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ה. חַשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = -1$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

$f(x) = (x-2)e^x + 1$, מוגדרת לכל x – אין אסימפטוטות אנכיות.

כאשר $x \to -\infty$: $(x-2)e^x \to 0$, ולכן $f(x) \to 1$.

כאשר $x \to \infty$: $f(x) \to \infty$.

$$y = 1 \quad (x \to -\infty)$$

תשובה: $y = 1$ **(כאשר** $x \to -\infty$**); אין אסימפטוטה אנכית**

סעיף א (2)

נציב $x = 0$:

$$f(0) = (0-2)e^0 + 1 = -1$$

תשובה: $(0, -1)$

סעיף א (3)

$$f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$$

$e^x > 0$, ולכן $f'(x) = 0$ רק ב־$x = 1$. משמאל ל־1 הנגזרת שלילית ומימין חיובית:

$$f(1) = -e + 1 \approx -1.718$$

תשובה: מינימום $(1,\ 1-e) \approx (1, -1.718)$

סעיף א (4)

סקיצה של f

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ב (1)

המכנה חיובי לכל x ($e^x \geq x+1 > x$).

כאשר $x \to \infty$ נחלק מונה ומכנה ב־e^x:

$$g(x) = \frac{e^{-x}-1}{1-xe^{-x}} \to \frac{0-1}{1-0} = -1$$

כאשר $x \to -\infty$: המונה שואף ל־1 והמכנה ל־∞, ולכן $g(x) \to 0$.

תשובה: $y=-1$ **(כאשר** $x \to \infty$**),** $y=0$ **(כאשר** $x \to -\infty$**)**

סעיף ב (2)

$$1-e^x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

תשובה: $(0,0)$

סעיף ב (3)

$$g'(x) = \frac{-e^x(e^x-x)-(1-e^x)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$$

נפתח את המונה:

$$-e^{2x}+xe^x+(e^x-1)^2$$
$$= -e^{2x}+xe^x+e^{2x}-2e^x+1$$
$$= xe^x-2e^x+1 = f(x)$$
$$g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$$

תשובה: הוכחה: המונה של g' שווה ל־$f(x)$.

סעיף ג

המכנה $(e^x-x)^2$ חיובי, ולכן סימן g' הוא סימן f.

מהסקיצה של f: היא חותכת את ציר ה־x פעמיים – בנקודה $x_1<0$ (כי $f \to 1$ משמאל ו־$f(0)=-1$) ובנקודה $x_2>1$ (כי המינימום שלילי ו־$f \to \infty$).

$f>0$ עבור $x<x_1$, $f<0$ עבור $x_1<x<x_2$, $f>0$ עבור $x>x_2$.

לכן ל־g יש מקסימום ב־x_1 ומינימום ב־x_2 – שתי נקודות קיצון. (אין צורך למצוא את x_1 ו־x_2 במדויק; המשוואה $f(x)=0$ אינה נפתרת אלגברית, ופתרון מקורב במחשבון אינו מותר בבחינה.)

תשובה: שתי נקודות קיצון: מקסימום אחת ומינימום אחת

סעיף ד

סקיצה של g והשטח המבוקש

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה

בתחום $-1 \leq x \leq 0$ מתקיים $g(x) \geq 0$ (המונה $1-e^x \geq 0$), והגרף פוגש את ציר ה־x ב־$x=0$.

שימו לב שהמונה הוא מינוס הנגזרת של המכנה: $(e^x-x)' = e^x-1$.

$$S = \int_{-1}^{0} \frac{1-e^x}{e^x-x}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[-\ln(e^x - x) \Big]_{-1}^{0} \\
&= -\ln 1 + \ln\left(e^{-1} + 1\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) \approx 0.313
\end{aligned}
$$

תשובה: $S = \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) \approx 0.313$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = x + \ell n(x^2 - 8)$.

א. **(1)** מְצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מְצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מְצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקִבעו את סוגה.

(4) סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$.

ב. **(1)** מְצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מְצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מְצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) סַרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקצייה $g(x) = e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ג. **(1)** מְצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקִבעו את סוגה.

(2) מְצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $g(x)$.

ד. חַשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה $y = f'(x) \cdot g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = -4$ ו־ $x = -5$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הביטוי שבתוך הלוגריתם חייב להיות חיובי:

$$x^2 - 8 > 0$$

תשובה: $x < -\sqrt{8}$ **או** $x > \sqrt{8}$

סעיף א (2)

כאשר $x^2 - 8 \to 0^+$: $\ln(x^2 - 8) \to -\infty$, ולכן יש אסימפטוטות אנכיות $x = \pm\sqrt{8}$.

כאשר $x \to \pm\infty$ הפונקציה שואפת ל־$\pm\infty$ – אין אסימפטוטה אופקית.

תשובה: $x = \sqrt{8}$, $x = -\sqrt{8}$

סעיף א (3)

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 8} = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 8}$$
$$= \frac{(x+4)(x-2)}{x^2 - 8}$$

$x = 2$ לא בתחום ההגדרה, ולכן הנקודה היחידה היא $x = -4$. עבור $x < -4$ הנגזרת חיובית, ועבור $-4 < x < -\sqrt{8}$ שלילית:

$$f(-4) = -4 + \ln 8 \approx -1.92$$

תשובה: מקסימום $(-4,\ -4+\ln 8) \approx (-4, -1.92)$

סעיף א (4)

סקיצה של f

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ב (1)

המכנה x^2-8 חיובי בתחום של f ומתאפס רק בקצותיו, ולכן:

תשובה: $x<-\sqrt{8}$ **או** $x>\sqrt{8}$

סעיף ב (2)

ב־$x=\pm\sqrt{8}$ המכנה מתאפס והמונה לא ($\pm 4\sqrt{2}\neq 0$) – אסימפטוטות אנכיות.

כאשר $x\to\pm\infty$ היחס שואף ל־1.

תשובה: $x=\pm\sqrt{8}$ **ו־** $y=1$

סעיף ב (3)

מסעיף א (3): $f'(x)=0$ רק ב־$x=-4$. ציר ה־y ($x=0$) אינו בתחום.

תשובה: $(-4,0)$**; אין חיתוך עם ציר ה־**y

סעיף ב (4)

סקיצה של f'

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ג (1)

$$g'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

$e^{f(x)}>0$, ולכן ל־g' ול־f' אותו סימן, ו־g מקבלת מקסימום באותה נקודה כמו f.

$$g(-4)=e^{-4+\ln 8}=\frac{8}{e^4}\approx 0.147$$

תשובה: מקסימום $\left(-4,\ \frac{8}{e^4}\right) \approx (-4,\ 0.147)$

סעיף ג (2)

g' ו־f' באותו סימן, ולכן תחומי העלייה והירידה של g זהים לאלה של f:

תשובה: עולה: $x<-4$ **ו־**$x>\sqrt{8}$**; יורדת:** $-4<x<-\sqrt{8}$

סעיף ד

$g'(x)=f'(x)e^{f(x)}=f'(x)\cdot g(x)=y$. בתחום $-5\le x\le -4$ מתקיים $f'(x)\ge 0$, ולכן $y\ge 0$.

$$S=\int_{-5}^{-4} g'(x)\,dx=g(-4)-g(-5)$$

$g(x)=e^{x+\ln(x^2-8)}=(x^2-8)e^x$:

$$S=8e^{-4}-17e^{-5}\approx 0.1465-0.1145$$

$$S\approx 0.032$$

תשובה: $S=8e^{-4}-17e^{-5}\approx 0.032$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 4

4. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax}{\ell n(x)-a}$, $a>0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א–ב, בטא את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ב. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האנך לציר ה־ x העובר בנקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x=e^{a+2}$ ועל ידי ציר ה־ x , הוא 3 .

ג. מצא את a .

פתרון מלא

סעיף א (1)

$x>0$ (בגלל $\ln x$), והמכנה שונה מאפס: $\ln x \neq a$, כלומר $x \neq e^a$.

תשובה: $x>0,\ x\neq e^a$

סעיף א (2)

$$f'(x)=\frac{a(\ln x-a)-ax\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x-a)^2}$$
$$=\frac{a(\ln x-a-1)}{(\ln x-a)^2}$$

$f'(x)=0$ כאשר $\ln x=a+1$, כלומר $x=e^{a+1}$. משמאל לנקודה הנגזרת שלילית ($a>0$) ומימין חיובית:

$$f\left(e^{a+1}\right)=\frac{a\,e^{a+1}}{1}=a\,e^{a+1}$$

תשובה: מינימום $\left(e^{a+1},\ a\,e^{a+1}\right)$

סעיף א (3)

כאשר $x\to 0^+$: $f(x)\to -0^-$. אסימפטוטה אנכית $x=e^a$. בתחום $0<x<e^a$ הפונקציה שלילית ויורדת.

סקיצה של f

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ב (1)

$$g(x)=\frac{\ln x-a}{ax}$$

g מוגדרת רק היכן ש־f מוגדרת (f לא מתאפסת בתחום שלה, כי $x>0$):

תשובה: $x > 0,\ x \neq e^a$

סעיף ב (2)

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot ax - a(\ln x - a)}{a^2 x^2}$$
$$= \frac{1 + a - \ln x}{a\, x^2}$$

$g'(x) = 0$ ב-$x = e^{a+1}$; משמאל חיובית ומימין שלילית:

$$g\left(e^{a+1}\right) = \frac{1}{a\, e^{a+1}}$$

תשובה: מקסימום $\left(e^{a+1},\ \frac{1}{a\, e^{a+1}}\right)$

סעיף ב (3)

בנקודה $(e^a, 0)$ יש „חור" בגרף, כי g לא מוגדרת שם.

סקיצה של g והשטח מסעיף ג

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ג

בתחום $e^{a+1} \le x \le e^{a+2}$ מתקיים $1 \le \ln x - a \le 2$, ולכן $g(x) > 0$.

$$S = \int_{e^{a+1}}^{e^{a+2}} \frac{\ln x - a}{a} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$
$$= \frac{1}{a}\left[\frac{(\ln x - a)^2}{2}\right]_{e^{a+1}}^{e^{a+2}}$$
$$= \frac{1}{2a}\left(2^2 - 1^2\right) = \frac{3}{2a}$$
$$\frac{3}{2a} = 3 \ \Rightarrow\ a = \frac{1}{2}$$

תשובה: $a = \frac{1}{2}$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 5

5. נתונה הפונקציה: $f(x)=9^{-x}-6\cdot 3^{-x}+m$, m הוא פרמטר.

א. בתת־סעיפים (1)–(3) בטא את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה־ x .

ב. מצא את הערך של הפרמטר m .

ג. **(1)** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) היעזר בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $\ell n(f(x))$.

ד. הסבר מדוע: $\int_0^1 [\ell n(f(x))-\ell n\,(4)]dx<\ell n\left(\frac{9}{4}\right)$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הפונקציה מוגדרת לכל x.

תשובה: כל x

סעיף א (2)

נסמן $t=3^{-x}>0$, אז $f=t^2-6t+m$.

כאשר $x\to\infty$: $t\to 0$, ולכן $f\to m$. כאשר $x\to-\infty$: $t\to\infty$, ו־$f\to\infty$.

תשובה: $y=m$ (כאשר $x\to\infty$)

סעיף א (3)

$$f'(x)=-2\ln 3\cdot 9^{-x}+6\ln 3\cdot 3^{-x}$$
$$=-2\ln 3\cdot 3^{-x}\left(3^{-x}-3\right)$$

$f'(x)=0$ כאשר $3^{-x}=3$, כלומר $x=-1$.

עבור $x<-1$: $3^{-x}>3$ ולכן $f'<0$. עבור $x>-1$: $f'>0$.

$$f(-1)=9-18+m=m-9$$

תשובה: מינימום $(-1,\ m-9)$

סעיף ב

הגרף משיק לציר ה־x בנקודת המינימום, ולכן $m-9=0$.

תשובה: $m=9$

סעיף ג (1)

$$f(x)=\left(3^{-x}-3\right)^2$$

מינימום $(-1,0)$, חיתוך עם ציר ה־y: $f(0)=4$, אסימפטוטה $y=9$ כאשר $x\to\infty$.

סקיצה של f

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ג (2)

$\ln f(x)$ מוגדרת כאשר $f(x)>0$, כלומר $x\neq -1$. כאשר $x\to -1$: $f\to 0^+$ ו־$-\ln f\to -\infty$ - אסימפטוטה אנכית $x=-1$.

כאשר $x\to\infty$: $\ln f\to \ln 9$. העלייה והירידה כמו של f (כי $\ln$ עולה).

חיתוך עם ציר ה־y: $(0,\ln 4)$.

חיתוך עם ציר ה־x: $f(x)=1$, כלומר $3^{-x}=2$ או $3^{-x}=4$:

$$x=-\log_3 2\approx -0.63$$

$$x=-\log_3 4\approx -1.26$$

סקיצה של ln f והשטח מסעיף ד

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ד

בתחום $0<x\leq 1$ הפונקציה f עולה ונשארת מתחת לאסימפטוטה $y=9$:

$$4<f(x)<9$$

$$0<\ln f(x)-\ln 4<\ln 9-\ln 4=\ln\frac{9}{4}$$

אורך תחום האינטגרציה הוא 1, ולכן האינטגרל (השטח בין $y=\ln f(x)$ ל־$y=\ln 4$ קטן משטח מלבן שגובהו $\ln\frac{9}{4}$ ורוחבו 1:

$$\int_0^1 (\ln f(x)-\ln 4)\,dx<\ln\frac{9}{4}$$

(בחישוב מספרי האינטגרל $0.352\approx$, ו־$\ln\frac{9}{4}\approx 0.811$.)

תשובה: כי $\ln f(x)-\ln 4<\ln\frac{9}{4}$ לכל x בתחום שאורכו 1.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 4

4. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{2x}-3e^{x}+m}{4}$. m הוא פרמטר.

ידוע כי הישר $y=-1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את m .

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}+1$.

ג. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון פרמטר t בתחום $0<t<\ell n4$.

ה. מצא את הערך של t שבעבורו ערך הביטוי $\int_0^t g(x)dx$ הוא מקסימלי. נמק את תשובתך.

פתרון מלא

סעיף א (1)

e^x ו־e^{2x} מוגדרות לכל x, ולכן:

תשובה: כל x

סעיף א (2)

כאשר $x\to-\infty$: $e^x\to0$ ו־$e^{2x}\to0$, ולכן $f(x)\to\frac{m}{4}$. כאשר $x\to\infty$ הפונקציה שואפת ל־∞.

$$\frac{m}{4}=-1\ \Rightarrow\ m=-4$$

תשובה: $m=-4$

סעיף א (3)

$$f(x)=\frac{e^{2x}-3e^{x}-4}{4}$$
$$=\frac{(e^x-4)(e^x+1)}{4}$$

חיתוך עם ציר ה־x: $e^x+1>0$, ולכן $e^x=4$, כלומר $x=\ln 4$.

חיתוך עם ציר ה־y:

$$f(0) = \frac{1-3-4}{4} = -1.5$$

תשובה: $(\ln 4,\ 0)$**,** $(0,\ -1.5)$

סעיף א (4)

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 3e^x}{4} = \frac{e^x(2e^x-3)}{4}$$

$f'(x) = 0$ כאשר $e^x = 1.5$, כלומר $x = \ln 1.5$. משמאל הנגזרת שלילית ומימין חיובית:

$$f(\ln 1.5) = \frac{2.25 - 4.5 - 4}{4} = -\frac{25}{16}$$

תשובה: מינימום $\left(\ln 1.5,\ -\frac{25}{16}\right) \approx (0.405,\ -1.5625)$

סעיף ב

סקיצה של f

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ג (1)

המכנה $f(x)$ חייב להיות שונה מאפס, ולכן $x \neq \ln 4$.

תשובה: $x \neq \ln 4$

סעיף ג (2)

אנכית: ב־$x = \ln 4$ המכנה מתאפס.

כאשר $x \to -\infty$: $f \to -1$, ולכן $g \to -1 + 1 = 0$.

כאשר $x \to \infty$: $f \to \infty$, ולכן $g \to 0 + 1 = 1$.

תשובה: $x = \ln 4$**;** $y = 0$ **(כאשר** $x \to -\infty$**);** $y = 1$ **(כאשר** $x \to \infty$**)**

סעיף ד

נקודות עזר: $g(0) = 1 - \frac{1}{1.5} = \frac{1}{3}$.

$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, ולכן ל־$g$ יש קיצון באותה נקודה כמו ל־f, מסוג הפוך – מקסימום:

$$g(\ln 1.5) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$g(x) = 0$ כאשר $f(x) = -1$:

$$e^{2x} - 3e^x - 4 = -4$$

$$e^x(e^x - 3) = 0 \ \Rightarrow\ x = \ln 3$$

סקיצה של g

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה

נסמן $G(t) = \int_0^t g(x)\,dx$. אז $G'(t) = g(t)$.

בתחום $0 < t < \ln 4$: $g(t) > 0$ עבור $t < \ln 3$ ו־$g(t) < 0$ עבור $\ln 3 < t < \ln 4$ (ראו סקיצה).

לכן G עולה עד $t = \ln 3$ ויורדת אחריו – הערך המקסימלי מתקבל ב־$t = \ln 3$.

תשובה: $t = \ln 3$

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 5

5. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{(\ell n(x))^2}{(\ell n(x))^2-1}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

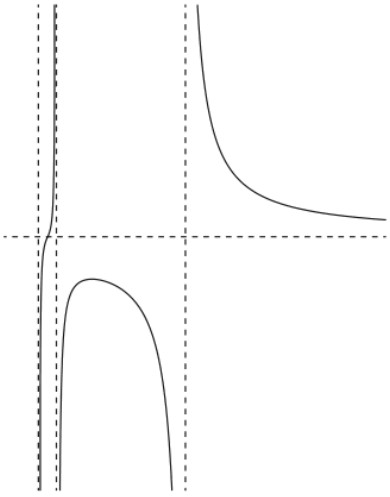
(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. לפניך שלושה גרפים שבהם <u>לא מסומנים</u> הצירים x ו־y . הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת.

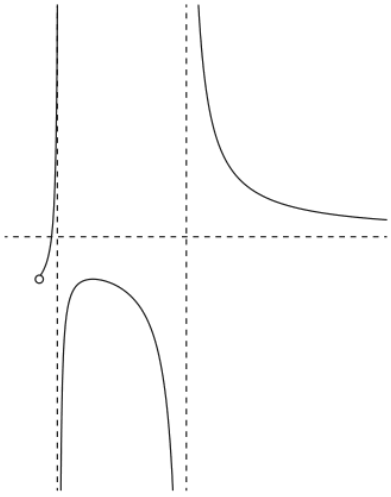
קבע איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$, העתק אותו למחברתך, והוסף בו את מערכת הצירים.

פרט את שיקוליך.

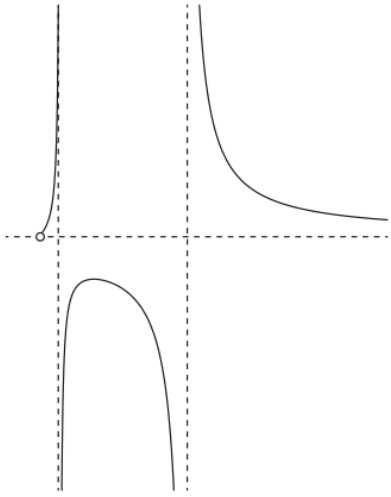
גרף א



גרף ב



גרף ג



ג. **(1)** האם יש פתרון למשוואה $f(x)=1$? נמק את תשובתך.

(2) מהו הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x)=k$ פתרון יחיד? נמק את תשובתך.

נתונות הפונקציות: $h(x)=(\ell n(x))^2+1$, $g(x)=\frac{1}{f(x)-1}$.

נסמן מלבן $ABCD$. הנקודות A ו־B הן שתי נקודות על ציר ה־x שבהן הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת.

הנקודות C ו־D נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.

ד. מהו שטח המלבן $ABCD$? נמק את תשובתך.

פתרון מלא

סעיף א (1)

$x>0$ (בגלל $\ln x$), והמכנה שונה מאפס: $\ln^2 x \neq 1$, כלומר $\ln x \neq \pm 1$.

תשובה: $x>0,\ x\neq e,\ x\neq \frac{1}{e}$

סעיף א (2)

ב־$x=e$ וב־$x=\frac{1}{e}$ המכנה מתאפס והמונה לא – אסימפטוטות אנכיות.

כאשר $x \to \infty$: $\ln x \to \infty$, ולכן:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln^2 x}} \to 1$$

(כאשר $x \to 0^+$ גם $f(x) \to 1$, אבל זו נקודת קצה של התחום, לא אסימפטוטה.)

תשובה: $x = e$, $x = \frac{1}{e}$, $y = 1$

סעיף א (3)

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\ln^2 x - 1}$$

$$f'(x) = -\frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln^2 x - 1)^2}$$

המכנה חיובי, ולכן סימן f' הפוך לסימן $\ln x$: עבור $0 < x < 1$ הנגזרת חיובית, ועבור $x > 1$ שלילית.

תשובה: עולה: $0 < x < \frac{1}{e}$, $\frac{1}{e} < x < 1$

יורדת: $1 < x < e$, $x > e$

סעיף ב

נקודות מרכזיות: מקסימום $(1, 0)$ (כי $f(1) = 0$), ומשמאל ל־$x = \frac{1}{e}$ הפונקציה עולה מ־1 (כאשר $x \to 0^+$, מעל $y = 1$) עד ∞.

לכן הענף השמאלי מתחיל ב„נקודה ריקה" על הישר $y = 1$ ועולה – כך רק בגרף ג.

תשובה: גרף ג

סעיף ג (1)

$$\frac{\ln^2 x}{\ln^2 x - 1} = 1$$

$$\ln^2 x = \ln^2 x - 1 \;\Rightarrow\; 0 = -1$$

אין פתרון ($y = 1$ היא אסימפטוטה שהגרף לא חותך).

תשובה: אין פתרון

סעיף ג (2)

מהגרף: עבור $k > 1$ יש שני פתרונות (ענף שמאלי וענף ימני); עבור $k < 0$ יש שני פתרונות (משני צדי $x = 1$); עבור $0 < k \leq 1$ אין פתרון.

רק עבור $k = 0$ יש פתרון יחיד: $x = 1$.

תשובה: $k = 0$

סעיף ד

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1} = \ln^2 x - 1$$

g מוגדרת רק היכן ש־f מוגדרת, ולכן בגרף שלה יש „חורים" ב־$x = \frac{1}{e}$ וב־$x = e$, על ציר ה־x (שם $\ln^2 x - 1 = 0$):

$$A\left(\frac{1}{e}, 0\right), \qquad B(e, 0)$$

$h(x) = \ln^2 x + 1$, ולכן $h\left(\frac{1}{e}\right) = h(e) = 2$: $C(e, 2)$, $D\left(\frac{1}{e}, 2\right)$.

$$S = \left(e - \frac{1}{e}\right) \cdot 2 \approx 4.70$$

תשובה: $S = 2\left(e - \frac{1}{e}\right) \approx 4.70$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.