פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות – כל השאלות עם תשובות סופיות

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י״ב (שאלון 572) • 34 שאלות

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{1}{e^x-1}+\frac{5}{e^x-5}+a$.

a הוא פרמטר.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

ב. הוכיחו כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

נתון כי הישר $y=2$ הוא אסימפטוטה של הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את שני הערכים האפשריים של a.

הציבו $a=2$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ו.

ד. הראו כי $f(x)=\frac{2e^{2x}-6e^x}{e^{2x}-6e^x+5}$.

ה. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־x.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי ציר ה־x ועל ידי הישר $x=\ell n2$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x\neq 0,\ x\neq \ln 5$

סעיף א (2)

$x=0,\ x=\ln 5,\ y=a,\ y=a-2$

סעיף ב

$f'(x)=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}-\frac{5e^x}{(e^x-5)^2}<0$ בכל תחום ההגדרה.

סעיף ג

$a=2$ או $a=4$

סעיף ד

הוכח: $f(x)=\frac{2e^{2x}-6e^x}{e^{2x}-6e^x+5}$

סעיף ה (1)

$(\ln 3,\ 0)$

סעיף ה (2)

סקיצה: יורדת בכל קטע, חותכת את ציר ה־x ב־$(\ln 3, 0)$. אסימפטוטות אנכיות: $x=0,\ x=\ln 5$.
אופקיות: $y=0,\ y=2$.

סעיף ו

$S = \ln \frac{4}{3} \approx 0.288$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = 8 \cdot \ell n(x^2 + 7) - 2x$, המוגדרת לכל x .

א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי הפונקצייה $f(x)$ חותכת את ציר ה־ x בנקודה אחת בלבד.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \ell n(f(x) - 18)$, המוגדרת בתחום שבו $f(x) > 18$.

ד. **(1)** כמה אסימפטוטות מאונכות לציר ה־ x יש לפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

תשובות סופיות

סעיף א
מינימום: $(1,\ 14.64)$. מקסימום: $(7,\ 18.20)$.

סעיף ב
קעורה כלפי מעלה: $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$; קעורה כלפי מטה: $x < -\sqrt{7}$ או $x > \sqrt{7}$.

סעיף ג
סקיצה: יורדת עד מינימום $(1, 14.64)$, עולה עד מקסימום $(7, 18.20)$, ואחר כך יורדת וחותכת את ציר ה־x פעם אחת.

סעיף ד (1)
3 אסימפטוטות אנכיות

סעיף ד (2)
מקסימום: $(7,\ -1.60)$

סעיף ד (3)

סקיצה: שני ענפים; שלוש אסימפטוטות אנכיות; ענף שמאלי יורד מ־∞ ל־$-\infty$, ענף ימני מתחת לציר עם מקסימום $(7,\ -1.60)$.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^n \cdot (3 - \ell nx)$, המוגדרת בתחום $x > 0$.

n הוא פרמטר טבעי.

א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2 .

ב. מצאו את הערך של n .

הציבו $n = 1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ו.

ג. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ה. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

a הוא פרמטר, $1 < a < 3$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = e$ ו־ $x = e^a$ הוא $\ell n10$.

ו. מצאו את הערך של a .

תשובות סופיות

סעיף א

$(e^3,\ 0)$

סעיף ב

$n = 1$

סעיף ג

מקסימום: $(e^2,\ e^2)$

סעיף ד

מקסימום: (e^2, e^2)

חיתוך עם ציר ה־x: $(e^3, 0)$

מתחילה ליד הראשית (שאינה על הגרף) ויורדת ל־$-\infty$

סעיף ה (1)

$x > 0,\ x \neq e^3$

סעיף ה (2)

אנכיות: $x = 0,\ x = e^3$

אופקית (מימין): $y = 0$

סעיף ה (3)

בקטע $0 < x < e^3$: חיובית, מינימום $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$

עבור $x > e^3$: שלילית ועולה אל $y = 0$

סעיף ו

$a = 2.8$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=4e^{x}-x+9\cdot \ell n(4-e^{x})$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. הראו כי $f'(x)=\frac{-4(e^{x}-1)^{2}}{4-e^{x}}$.

ג. **(1)** מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ המקביל לציר ה־ x .

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x<\ell n4$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x)+ax$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

a הוא פרמטר.

ו. היעזרו בגרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ומצאו בעבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה $g(x)$ שתי נקודות קיצון.

נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x<\ln 4$

סעיף א (2)

אנכית: $x=\ln 4$

אין אסימפטוטה אופקית

סעיף ב

הוכח: $f'(x)=\frac{-4(e^{x}-1)^{2}}{4-e^{x}}$

סעיף ג (1)

יורדת בכל תחום ההגדרה $x<\ln 4$

אין תחום עלייה

סעיף ג (2)

$y=4+9\ln 3\approx 13.89$

סעיף ד

יורדת בכל התחום

משיק אופקי ב־$(0,\ 4+9\ln 3)$

אסימפטוטה: $x=\ln 4$

סעיף ה (1)

אנכית: $x=\ln 4$

אופקית (משמאל): $y=-1$

סעיף ה (2)

מקסימום: $(0,0)$

אסימפטוטה משמאל: $y=-1$

אסימפטוטה אנכית: $x=\ln 4$

סעיף ו

$0<a<1$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 4

4. $f'(x)$ הוא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת $g(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־$g(x)$ מוגדרות בתחום $x\neq 0$.

נתון כי הפונקצייה $f(x)$ יורדת בתחום $x>0$ ובתחום $x<0$,

וכי $f'(x)\neq 0$ בכל תחום הגדרתה.

א. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמקו את תשובתכם.

נתון כי $f(x)=\frac{1}{x}$.

ב. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 1.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{\ell na}$ ו־ $x=\frac{1}{\ell n(4a)}$ הוא 5.

ד. מצאו את הערך של a.

תשובות סופיות

סעיף א

$g(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה ($x<0$ ו־$x>0$); אין לה תחום חיוביות.

סעיף ב (1)

$x=0$ (מימין), $y=0$

סעיף ב (2)

מינימום: $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{4}{e^2}\right)\approx(-0.5,\ -0.54)$

סעיף ג

סקיצה: כולה מתחת לציר ה־x; מינימום $\left(-\frac{1}{2},-\frac{4}{e^2}\right)$; אסימפטוטות $x=0$ (מימין) ו־$y=0$.

סעיף ד

$a=\frac{5}{3}$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{1}{x}\left(a+\frac{1}{(\ell nx)^2}\right)$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד בנקודה שבה $x=\frac{1}{e}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ו.

$g(x)$ היא פונקצייה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x)=f(x)$.

תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע שלפונקצייה $g(x)$ יש נקודת פיתול שנמצאת על ציר ה־ x .

ג. מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

בעבור הפונקצייה $g(x)$ שמצאתם ענו על הסעיפים ד–ו.

ד. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x .

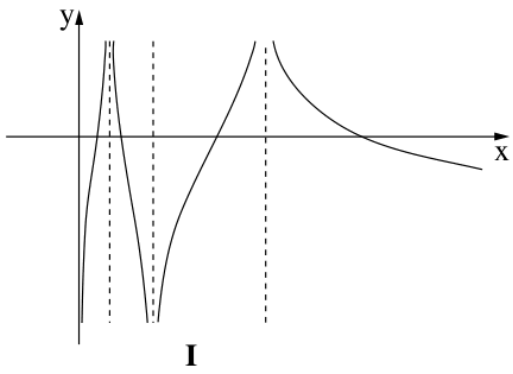
(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

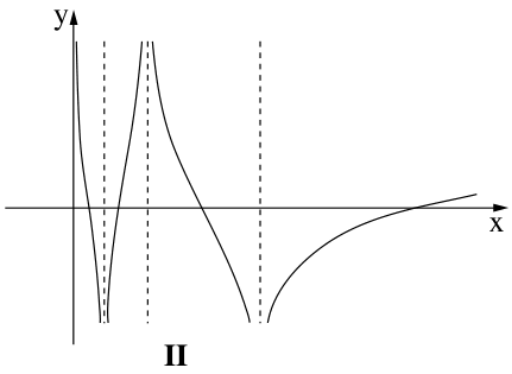
נתונה הפונקצייה $h(x)=\ell n\left|g(x)\right|$.

ו. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

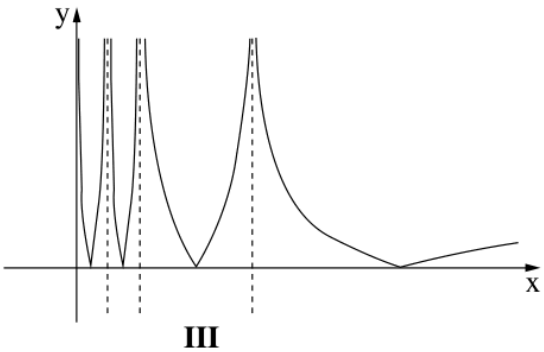
(2) אחד מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקצייה $h(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



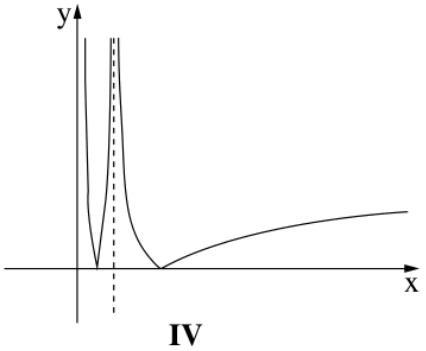
I



II



III



IV

תשובות סופיות

סעיף א

$$x > 0,\ x \neq 1$$

סעיף ב

$$a = 1$$

סעיף ג

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$$

סעיף ד (1)

$x = 0,\ x = 1$ (אין אסימפטוטה אופקית)

סעיף ד (2)

$(e,\ 0)$ ו־$\left(\frac{1}{e},\ 0\right)$

סעיף ד (3)

עולה בתחומים $0 < x < 1$ ו־$x > 1$; אין תחומי ירידה.

סעיף ה

סקיצה: שני ענפים עולים; אסימפטוטות $x = 0,\ x = 1$; חיתוכים $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ ו־$(e, 0)$.

סעיף ו (1)

$$x > 0,\ x \neq e,\ x \neq 1,\ x \neq \frac{1}{e}$$

סעיף ו (2)

גרף II

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-x}+b$, המוגדרת לכל x.

b הוא פרמטר.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־y.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=1.5$.

ב. מצאו את הערך של b (מצאו את שתי האפשרויות).

הציבו בפונקצייה $f(x)$ את הערך של b הקטן ביותר שמצאתם, וענו על הסעיפים ג–ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־y היא אחת משתי נקודות הפיתול של הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת לכל x.

ד. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. לפניכם טענה: $\int_0^1 (f(x)-1.5)\,dx > \frac{1}{e-1}$.

האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

מימין: $y=b+1$

משמאל: $y=b-1$

סעיף א (2)

$(0,\ 1+b)$

סעיף א (3)

מקסימום: $\left(1,\ \frac{e+1}{e-1}+b\right)$

סעיף ב

$b=0.5$ או $b=2.5$

סעיף ג

אסימפטוטה משמאל: $y=-0.5$

אסימפטוטה מימין: $y=1.5$

חיתוך עם ציר ה־y: $(0,\ 1.5)$

מקסימום: $(1,\ 2.66)$

סעיף ד (1)
$y = 0$ בשני הצדדים

סעיף ד (2)
מקסימום: $(0,\ 2)$
מתאפסת ב־$x = 1$
מינימום שלילי מימין ל־1
אסימפטוטה: $y = 0$

סעיף ה
הטענה נכונה.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x\cdot \ell n(x)}{1+\ell n(x)}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה־ x של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1+\ell n(x)}{x\cdot \ell n(x)}$.

ד. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתון הביטוי $\int_{e^k}^{e^{2k}}\left(\frac{1}{x\cdot \ell n(x)}+\frac{1}{x}\right)dx$, k הוא פרמטר גדול מ־ 1.

ה. **(1)** קבעו איזה מן הביטויים I–II שווה לערך של הביטוי הנתון. נמקו את קביעתכם.

I. $k+\ell n(k)$ **II.** $k+\ell n2$

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=e^3$ ו־ $x=e^6$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x>0,\ x\neq\frac{1}{e}$

סעיף א (2)

$x=\frac{1}{e}$

סעיף א (3)

$(1,\ 0)$

סעיף ב

עולה בתחום $0<x<\frac{1}{e}$

עולה בתחום $x>\frac{1}{e}$

אין תחום ירידה

סעיף ג

עולה בשני הענפים

אסימפטוטה: $x=\frac{1}{e}$

חיתוך עם ציר ה־x: $(1,0)$

סעיף ד (1)

$0<x<1$ או $x>1$

סעיף ד (2)

אנכיות: $x = 0,\ x = 1$

אופקית: $y = 0$

סעיף ד (3)

יורדת בשני הענפים

חיתוך עם ציר ה־x: $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$

אסימפטוטות: $x = 0,\ x = 1,\ y = 0$

סעיף ה (1)

ביטוי II: $k + \ln 2$

סעיף ה (2)

$S = 3 + \ln 2 \approx 3.69$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^x}{a-e^x}$, a הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(3) בעבור $a>0$ ובעבור $a<0$.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה־ y של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$ בעבור $a=3$ ואיזה מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$ בעבור $a=-3$. נמקו את קביעותיכם.

הציבו $a=3$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ה.

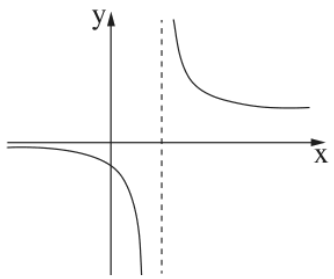
נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{f(x)+2}$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

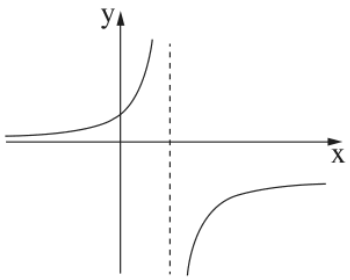
(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

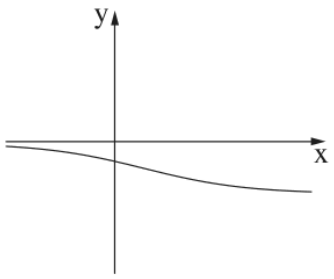
ה. לפניכם טענה: $\int_{-4}^{-2}g(x)\,dx > \int_{2}^{3}g(x)\,dx$. האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.



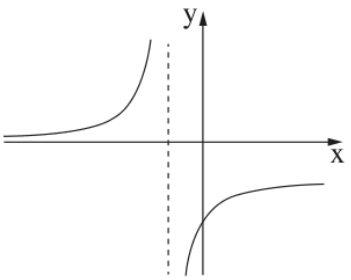
I



II



III



IV

תשובות סופיות

סעיף א (1)

כאשר $a>0$ התחום הוא $x\neq \ln a$; כאשר $a<0$ – כל x.

סעיף א (2)

$y=-1$ (כאשר $x\to\infty$) ו־$y=0$ (כאשר $x\to-\infty$), בשני המקרים.

סעיף א (3)

כאשר $a>0$ – עולה ב־$x<\ln a$ וב־$x>\ln a$; כאשר $a<0$ – יורדת לכל x.

סעיף ב

עבור $a=3$ – גרף II; עבור $a=-3$ – גרף III.

סעיף ג (1)

$$x\neq \ln 3,\ x\neq \ln 6$$

סעיף ג (2)

אנכית: $x=\ln 6$. אופקיות: $y=1$ (מימין) ו־$y=\frac{1}{2}$ (משמאל).

סעיף ד

סקיצה: יורדת בשני ענפים; אסימפטוטות $x=\ln 6,\ y=1,\ y=\frac{1}{2}$; נקודה חסרה $(\ln 3, 0)$.

סעיף ה

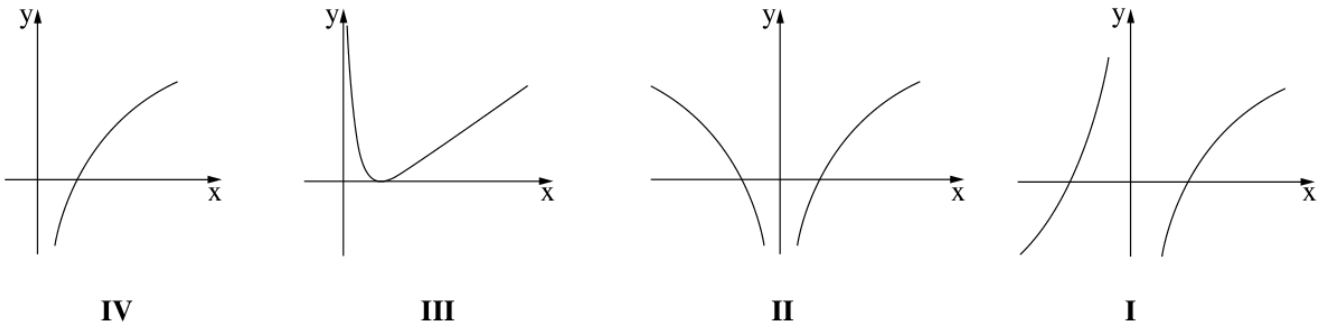
הטענה אינה נכונה ($\int_{-4}^{-2} g<1<\int_{2}^{3} g$).

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 5

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\ln(x^n)$, n הוא מספר טבעי זוגי.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) לפניכם ארבעה גרפים, I–IV . קבעו איזה מהם מייצג את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.



הציבו $n=2$ בפונקציה $f(x)$, וענו על סעיפים ב–ד.

נתונה הפונקציה $g(x)=(f(x))^2-4$, המוגדרת לכל $x\neq 0$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה־ x .

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $k(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$, בתחום $x>0$.

ד. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $k(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $k(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=e^2$ ו־ $x=e^3$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x \neq 0$

סעיף א (2)

גרף II (מוגדרת לכל $x \neq 0$ וזוגית).

סעיף ב (1)

$(\pm e,\ 0)$, $\left(\pm\frac{1}{e},\ 0\right)$

סעיף ב (2)

מינימום: $(1,-4)$ ו־$(-1,-4)$

סעיף ג

סקיצה: סימטרית לציר ה־y; אסימפטוטה $x=0$; מינימום $(\pm 1,-4)$; חיתוכים $\pm e,\ \pm\frac{1}{e}$.

סעיף ד (1)

$x>0,\ x\neq \frac{1}{e},\ x\neq e$

סעיף ד (2)

$S=\ln\frac{8}{3}\approx 0.98$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=e^x-\frac{1}{1-e^x}$. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל $x\neq 0$.

א. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) האם לגרף הפונקצייה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים? נמקו את תשובתכם.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=-x+\ell n(e^x-1)$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) הראו כי $g'(x)=f(x)-e^x$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

בנקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ מעבירים אנך לציר ה־x.

ד. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי ציר ה־x, על ידי האנך ועל ידי הישר $x=\ell n(b)$.

$b>2$ הוא פרמטר. הביעו את תשובתכם באמצעות b.

נתון כי השטח שמצאתם בסעיף ד שווה ל־$b-2+\ell n(1.5)$.

ה. מצאו את הערך של b.

תשובות סופיות

סעיף א (1)
אנכית: $x=0$
אופקית (משמאל): $y=-1$

סעיף א (2)
אין נקודות חיתוך עם הצירים.

סעיף א (3)
מינימום: $(\ln 2,\ 3)$

סעיף ב
משמאל ל־0: יורדת מהאסימפטוטה $y=-1$ אל $-\infty$
מימין ל־0: מינימום $(\ln 2, 3)$
אסימפטוטות: $x=0$ ו־$y=-1$

סעיף ג (1)
$x>0$

סעיף ג (2)
הוכח: $g'(x)=\frac{1}{e^x-1}=f(x)-e^x$

סעיף ד
$S=b-2+\ln\frac{2(b-1)}{b}$

סעיף ה
$b=4$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{a+\ell nx}{x}$, המוגדרת בתחום $x>0$. a הוא פרמטר.

א. בתת־סעיפים (1)–(3) הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{x}$, המוגדרת בתחום $x\neq 0$.

נתון כי גרף הפונקצייה $f(x)$ וגרף הפונקצייה $g(x)$ נחתכים בנקודה שבה $x=e^2$.

ג. מצאו את הערך של a .

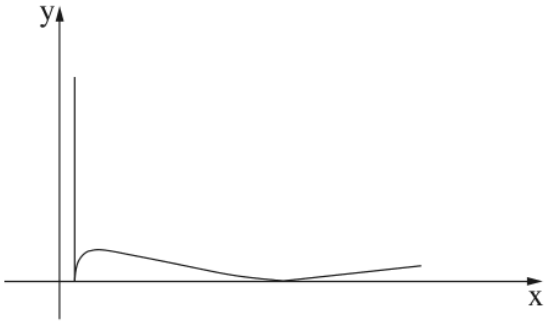
הציבו את הערך של a שמצאתם וענו על סעיפים ד–ה.

נתונה הפונקצייה $h(x)$, המוגדרת בתחום $x>0$. גרף הפונקצייה $h(x)$ עובר בנקודה $(e^5 , 2.5)$.

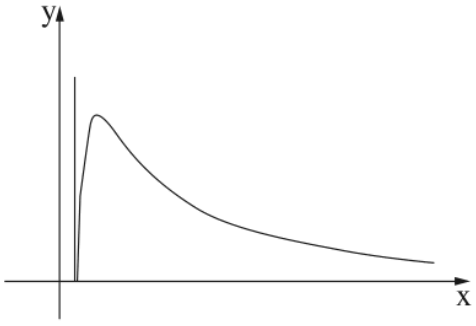
נגזרת הפונקצייה $h(x)$ מקיימת $h'(x)=f(x)-g(x)$.

ד. מצאו את הפונקצייה $h(x)$.

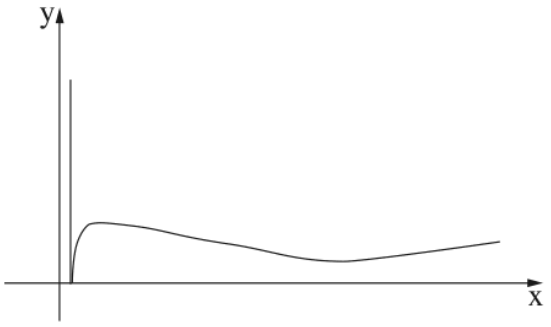
ה. קבעו איזה גרף מבין הגרפים I–IV מייצג את הפונקצייה $|h(x)|$. נמקו את קביעתכם.



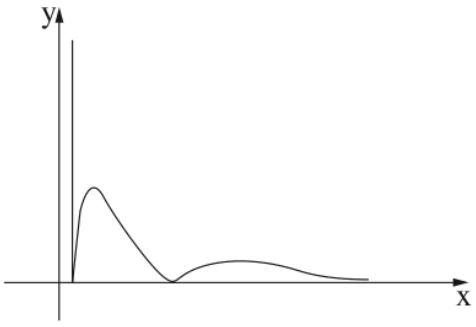
I



II



III



IV

תשובות סופיות

סעיף א (1)

אנכית: $x = 0$

אופקית: $y = 0$

סעיף א (2)

$(e^{-a},\ 0)$

סעיף א (3)

מקסימום: $\left(e^{1-a},\ e^{a-1}\right)$

סעיף ב

עולה מ־$-\infty$ דרך $(e^{-a}, 0)$

מקסימום $\left(e^{1-a}, e^{a-1}\right)$

ואז יורדת אל $y = 0$

סעיף ג

$a = -1$

סעיף ד

$h(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} - 2\ln x$

סעיף ה

גרף I

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $k(x)=xe^x$, ונתונה הפונקצייה $m(x)=2e^x-1$, המוגדרות לכל x .

א. **(1)** מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה־ y בעבור כל אחת מן הפונקציות $k(x)$ ו־ $m(x)$.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות $k(x)$ ו־ $m(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של כל אחד מן הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו־ $m(x)$ עם ציר ה־ y .

הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו־ $m(x)$ נחתכים בשתי נקודות בדיוק, נקודה אחת שבה $x=a$ ונקודה נוספת שבה $x=b$, $b>a$.

ב. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקצייה $k(x)$ ושל גרף הפונקצייה $m(x)$.

נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^x-1}{x-1}$, המוגדרת לכל $x\neq 1$.

ג. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ד. הסבירו מדוע למשוואה $f'(x)=0$ יש בדיוק שני פתרונות.

ה. **(1)** הסבירו מדוע $1<b$.

(2) הביעו באמצעות a ו־ b את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$k(x):\ y=0$

$m(x):\ y=-1$

סעיף א (2)

הפונקצייה k יורדת ב־$x<-1$ ועולה ב־$x>-1$.

הפונקצייה m עולה לכל x.

סעיף א (3)

$k:\ (0,0)$

$m:\ (0,1)$

סעיף ב

סקיצה: לגרף של k מינימום $\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$ ואסימפטוטה $y=0$. הגרף של m עולה, עם אסימפטוטה $y=-1$. שתי נקודות חיתוך.

סעיף ג (1)

$x=1$

$y=0$ (כאשר $x\to-\infty$)

סעיף ג (2)

$(0,\ 0)$

סעיף ד

המונה של f' שווה ל־$k(x)-m(x)$, ולכן $f'=0$ רק בשתי נקודות החיתוך: $x=a$ ו־$x=b$.

סעיף ה (1)

המינימום של $k-m$ הוא ב־$x=1$ והוא שלילי, ולכן יש שורש אחד מכל צד של 1. לכן $b>1$.

סעיף ה (2)

עלייה: $x<a$ או $x>b$.

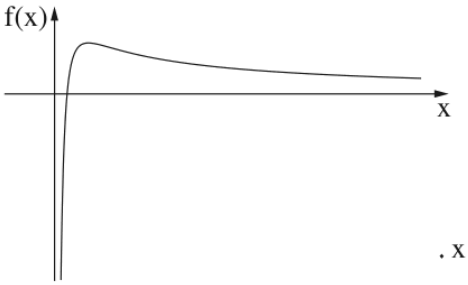
ירידה: $a<x<1$ או $1<x<b$.

סעיף ו

סקיצה: אסימפטוטות $x=1$ ו־$y=0$; מקסימום ב־$x=a$; מינימום ב־$x=b$; עוברת בראשית.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 5

5. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=\frac{2\ell n(x)-1}{x}$, המוגדרת בתחום $x>0$.



א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

נתונה הפונקצייה $g(x)$ המוגדרת בתחום $x>0$ ומקיימת: $g'(x)=f(x)$.

שיעור ה־ y של נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ הוא $-\frac{1}{4}$.

ב. **(1)** מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x .

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

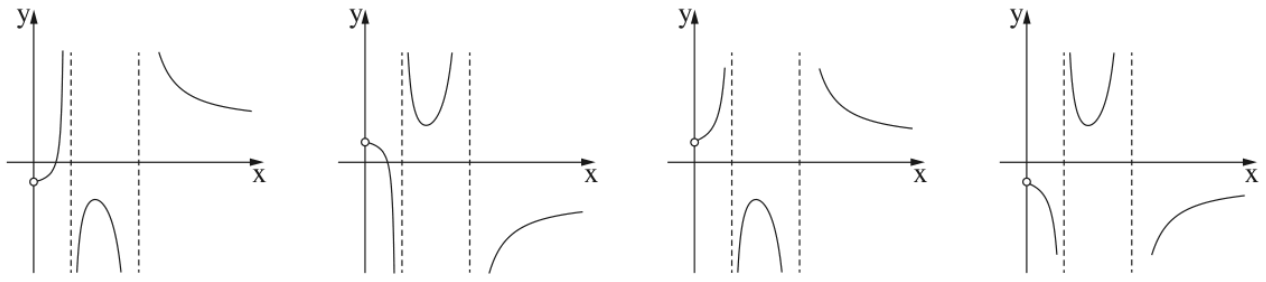
נתונה הפונקצייה $h(x)$ המוגדרת כך: $h(x)=1+\frac{b}{g(x)}$, b הוא פרמטר גדול מ־ $\frac{1}{4}$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) קבעו אם גרף הפונקצייה $h(x)$ חותך את ציר ה־ x . נמקו את קביעתכם.

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $h(x)$, וקבעו את סוגה. הביעו את תשובתכם באמצעות b , אם יש צורך.

ה. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקצייה $h(x)$.



תשובות סופיות

סעיף א

$(\sqrt{e},\ 0)$

סעיף ב (1)

$g(x)=\ln^2 x-\ln x$

סעיף ב (2)

$(1,\ 0)$ ו־$(e,\ 0)$

סעיף ב (3)

סקיצה: מינימום $\left(\sqrt{e},-\frac{1}{4}\right)$; חיתוכים $(1,0)$ ו־$(e,0)$; אסימפטוטה $x=0$.

סעיף ג (1)

$x>0,\ x\neq 1,\ x\neq e$

סעיף ג (2)

לא. הגרף של h אינו חותך את ציר ה־x, כי הערך המינימלי של g הוא $-\frac{1}{4}$, שגדול מ־$-b$.

סעיף ד

מקסימום: $(\sqrt{e},\ 1-4b)$

סעיף ה

גרף II

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{e^x-b}{(e^x-4)^2}$, b הוא פרמטר חיובי, $b\neq 4$.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\ell n(12)$.

ב. מצאו את הערך של b , ואת סוג נקודת הקיצון.

הציבו בפונקצייה $f(x)$ את הערך של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ג–ו.

נתונה הפונקצייה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $g(x)$ המאונכות לצירים.

ד. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ה. מהו שיעור ה־ y של נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

ו. קבעו אם הערך של $\int_{-2}^{-1}(f(x)-g(x))dx$ קטן או גדול מ־ $1\frac{1}{2}$. נמקו את קביעתכם.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x\neq \ln 4$

סעיף א (2)

$x=\ln 4$

$y=0$ (מימין)

$y=-\frac{b}{16}$ (משמאל)

סעיף א (3)

$\left(0,\ \frac{1-b}{9}\right)$

$(\ln b,\ 0)$

סעיף ב

$b=8$

מקסימום: $\left(\ln 12,\ \frac{1}{16}\right)$

סעיף ג (1)

$x\neq \ln 4$ וגם $x\neq \ln 8$

סעיף ג (2)

$x = \ln 8$

$y = -2$ (משמאל)

סעיף ד

ראו סקיצה

סעיף ה

$y = -1$

סעיף ו

קטן מ־$1\frac{1}{2}$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=x\left((\ell n(x))^2-2\ell n(x)+2\right)$, המוגדרת בתחום $x>0$.

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודת הפיתול של הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. **(1)** סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונות הפונקציות $g(x)=(\ell n(x))^2-4$, $h(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ המוגדרות בתחום $x>0$.

ה. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x.

דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x העבירו אנכים לציר ה־ x.

ו. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$ ועל ידי האנכים.

תשובות סופיות

סעיף א

עולה: $x>0$

אין תחום ירידה

סעיף ב

$(1,\ 2)$

סעיף ג

חיובית: $x>0$

אין תחום שליליות

סעיף ד (1)

ראו סקיצה

סעיף ד (2)

ראו סקיצה

סעיף ה

$2e^2+\frac{6}{e^2}$

סעיף ו

$\frac{40}{3}+2e^2+\frac{6}{e^2}$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 4

4. נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{a-x^2}{e^x}$, $g(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$ המוגדרות לכל x.

a הוא פרמטר.

א. מצאו את הערך של a שבעבורו $f(x)=g'(x)$ לכל ערך של x.

הציבו את הערך של a שמצאתם, וענו על הסעיפים ב–ה שלפניכם.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של גרף הפונקצייה $f(x)$ ושל גרף הפונקצייה $g(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x.

ה. חשבו את הערך של הביטוי: $\int_1^2 \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^4}\right)\cdot\left(\frac{x^2-1}{e^x}\right)dx$.

תשובות סופיות

סעיף א

$a=1$

סעיף ב (1)

$(0,1)$

$(-1,0),\ (1,0)$

סעיף ב (2)

$(0,1)$

$(-1,0)$

סעיף ב (3)

לפונקצייה g:

$\min(-1,\ 0)$

$\max\left(1,\ \frac{4}{e}\right)$

לפונקצייה f:

$\max(1-\sqrt{2},\ 1.25)$

$\min(1+\sqrt{2},\ -0.43)$

סעיף ג

סקיצה בסרטוט. מימין, שתי הפונקציות שואפות לאפס.

סעיף ד

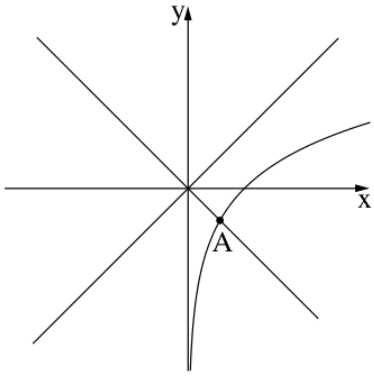
$\frac{4}{e}\approx 1.47$

סעיף ה

$$\frac{e^2}{9} - \frac{e}{4} \approx 0.14$$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 5

5. בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של הפונקצייה $f(x)=\ell n(x)$ המוגדרת בתחום $x>0$,



ומתוארים הישרים $y=x$ ו־ $y=-x$.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם אחד מן הישרים.

נסמן את שיעור ה־ x של הנקודה A ב־ a.

היעזרו בסרטוט, וענו על הסעיפים א–ה שלפניכם.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתונה הפונקצייה: $g(x)=\frac{\ell n(x)-x}{\ell n(x)+x}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x (אם יש כאלה).

(3) מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה־ x של הפונקצייה $g(x)$.

ב. הסבירו מדוע מתקיים $0<a<1$.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)=e^{g(x)}$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$$x>0,\ \ x\neq a$$

סעיף א (2)

אין נקודות חיתוך כאלה.

סעיף א (3)

$$y=-1$$

סעיף ב

הנקודה A על גרף הלוגריתם ועל הישר היורד, ולכן:

$$\ln a=-a<0$$

הלוגריתם שלילי רק בין 0 ל־1, ולכן:

$$0<a<1$$

סעיף ג (1)

מקסימום: $\left(e,\ \frac{1-e}{1+e}\right)$

סעיף ג (2)

עלייה:

$$0<x<a,\ \ a<x<e$$

ירידה:

$$x>e$$

סעיף ד

סקיצה בסרטוט. אסימפטוטות:

$x = a, \quad y = -1$

מקסימום ב־$x = e^{-}$

סעיף ה

סקיצה בסרטוט. הגרף חיובי. אסימפטוטות:

$x = a, \quad y = \frac{1}{e}$

מקסימום ב־$x = e^{-}$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{\ell n(x)+\ell n(a)}{\ell n(x)-\ell n(a)}$, a הוא פרמטר גדול מ־ 1 .

בסעיפים א–ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצאו את תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

לפניכם טענה: למשוואה $f(x)=f'(x)$ קיים בדיוק פתרון אחד בתחום $x>a$.

ב. קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקצייה $g(x)$, המקיימת: $g(x)=\ell n\big(f(x)\big)$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב־ S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=2$ ו־ $x=5$.

נתון: $1<a<2$.

ד. הביעו באמצעות S את ערך האינטגרל $\int_{2}^{5}\ell n\big(2\cdot f(x)\big)dx$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x>0$ וגם $x\neq a$

סעיף א (2)

$x=a$

$y=1$

סעיף א (3)

$\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$

סעיף א (4)

יורדת: $0<x<a$

יורדת: $x>a$

סעיף א (5)

ראו סקיצה

סעיף ב

הטענה לא נכונה – אין פתרון.

סעיף ג (1)

$0<x<\frac{1}{a}$ או $x>a$

סעיף ג (2)

ראו סקיצה

סעיף ד

$3\ln 2 + S$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^x}{e^x-4}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקצייה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. הפונקציות $g(x)$ ו־ $f(x)$ מוגדרות באותו התחום.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית שלה ועל ידי הישרים $x=\ell n5$ ו־ $x=\ell n8$.

ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $s(x)=\int_x^{\ell n3}\big(f(t)-g(t)\big)dt$, המוגדרת בתחום $x<\ell n3$.

ד. מצאו את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $s(x)$ וקבעו את סוגה.

תשובות סופיות

סעיף א (1)
$x \neq \ln 4$

סעיף א (2)
$x = \ln 4$
$y = 1$ (מימין)
$y = 0$ (משמאל)

סעיף א (3)
יורדת: $x < \ln 4$
יורדת: $x > \ln 4$

סעיף א (4)
ראו סקיצה

סעיף ב (1)
$y = 1$

סעיף ב (2)
ראו סקיצה

סעיף ב (3)
0.3

סעיף ג

$(\ln 2,\ -1)$

סעיף ד

$x = \ln 2$ – מינימום

בגרות קיץ תשפ״ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 4

4. $f(x)$ היא פונקצייה המוגדרת לכל x, ו־ $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת שלה, המוגדרת גם היא לכל x.

נתון: $f'(x) = -2x \cdot e^{-\frac{x^2}{a}}$, a הוא פרמטר.

לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$.

א. מצאו את a.

נתון: $f(0) = a$.

ב. מצאו את הפונקצייה $f(x)$.

ג. **(1)** האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית **<u>או</u>** אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

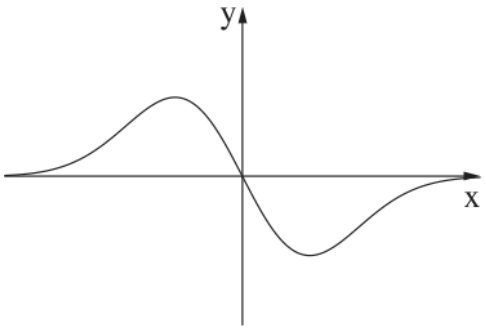
נתונות הפונקציות $h(x) = \frac{1}{f'(x)}$, $m(x) = e^{h(x)}$.

שלושה מבין הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתארים את הפונקציות $f'(x)$, $h(x)$, $m(x)$.

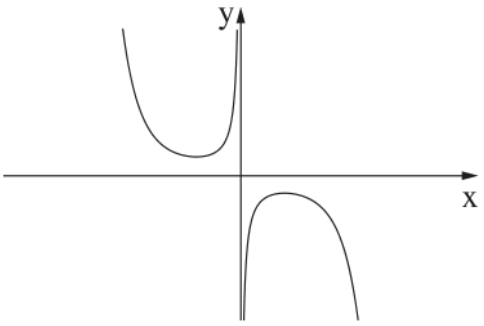
ד. התאימו לכל פונקצייה את הגרף המתאר אותה.

ה. **(1)** מצאו את תחומי הירידה של הפונקצייה $m(x)$.

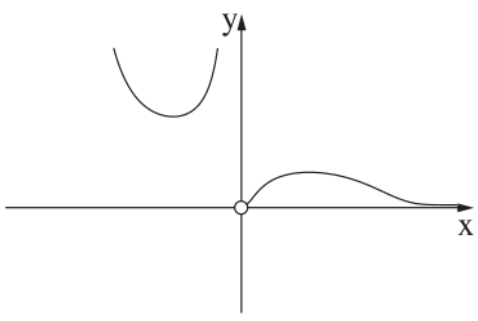
(2) קבעו אם הביטוי $\int_1^2 h(x) \cdot m(x)\,dx$ חיובי או שלילי. נמקו את קביעתכם.



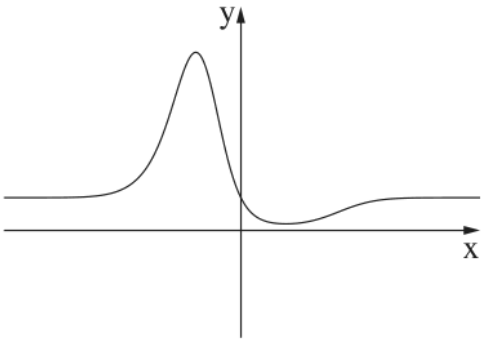
I



II



III



IV

תשובות סופיות

סעיף א

$a = 4$

סעיף ב

$f(x) = 4e^{-\frac{x^2}{4}}$

סעיף ג (1)

הפונקצייה זוגית.

סעיף ג (2)

$y = 0$ (לשני הכיוונים); אין אסימפטוטה אנכית.

סעיף ג (3)

מקסימום: $(0,\ 4)$

סעיף ג (4)

סקיצה בסרטוט.

סעיף ד

גרף I – $f'(x)$

גרף II – $h(x)$

גרף III – $m(x)$

סעיף ה (1)

$x > \sqrt{2}$ או $x < -\sqrt{2}$

סעיף ה (2)

שלילי. בקטע הזה h שלילית ו־m חיובית, ולכן המכפלה שלילית.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{1-\ell nx}{\ell nx}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\ell n(-f(x))$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(3) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב־ a את שיעור ה־ x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ וגרף הפונקצייה $g(x)$.

ג. מבין הביטויים I–III קבעו איזה ביטוי הוא הגדול ביותר ואיזה ביטוי הוא הקטן ביותר (אין צורך למצוא את הערך של a). נמקו את תשובתכם.

I. $\int_{a+1}^{a+2}(g(x)-f(x))\,dx$ II. $\int_{a+3}^{a+4}(g(x)-f(x))\,dx$ III. המספר 1

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x>0,\ \ x\neq 1$

סעיף א (2)

$x=1$

$y=-1$

סעיף א (3)

ירידה:

$0<x<1,\ \ x>1$

אין תחומי עלייה.

סעיף א (4)

סקיצה בסרטוט.

סעיף ב (1)

$0<x<1$ או $x>e$

סעיף ב (2)

$x=1,\ \ x=e$

$y=0$

סעיף ב (3)

חיובית: $0 < x < 1$

שלילית: $x > e$

סעיף ב (4)

סקיצה בסרטוט.

סעיף ג

הגדול ביותר: III

הקטן ביותר: I

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=(e^x-1)^n-4$, המוגדרת לכל x. n הוא מספר טבעי גדול או שווה ל־ 2.

ענו על סעיף א עבור n זוגי ועבור n אי־זוגי.

א. **(1)** מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (אם יש כאלה).

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ענו על הסעיפים ב–ג עבור $n=2$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=3e^x-7$, המוגדרת לכל x.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך שבין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין גרף הפונקצייה $g(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=|f(x)|$, המוגדרת לכל x.

ג. **(1)** כמה נקודות קיצון יש לפונקצייה $h(x)$? מצאו את שיעורי הנקודות הללו, וקבעו את סוגן.

(2) מצאו את תחום הערכים של k שעבורו הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקצייה $h(x)$ ב־ 3 נקודות.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

n זוגי: $y=-3$

n אי־זוגי: $y=-5$

סעיף א (2)

n זוגי: מינימום $(0,-4)$

n אי־זוגי: אין קיצון

סעיף א (3)

ראו סקיצות

סעיף ב (1)

$(0,\ -4)$

$(\ln 4,\ 5)$

סעיף ב (2)

$7.5-4\ln 4\approx 1.95$

סעיף ג (1)

שתי נקודות קיצון:

מקסימום $(0,4)$

מינימום $(\ln 3,0)$

סעיף ג (2)

$3<k<4$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 5

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n(x)+\frac{1}{x}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=(x+1)(1-\ell n(x))$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה־ x.

(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת תחום הקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x)=\frac{1}{x}\cdot g'(x)$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $g(x)$.

ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=e$ ו־ $x=1$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x>0$

סעיף א (2)

מינימום: $(1,\ 1)$

סעיף א (3)

ראו סקיצה

סעיף ב (1)

$(e,\ 0)$

סעיף ב (2)

יורדת: $x>0$

אין תחום עלייה

סעיף ב (3)

קעורה כלפי מעלה: $0<x<1$

קעורה כלפי מטה: $x>1$

סעיף ב (4)

ראו סקיצה

סעיף ג

$\frac{3}{2}-\frac{1}{e}\approx 1.13$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

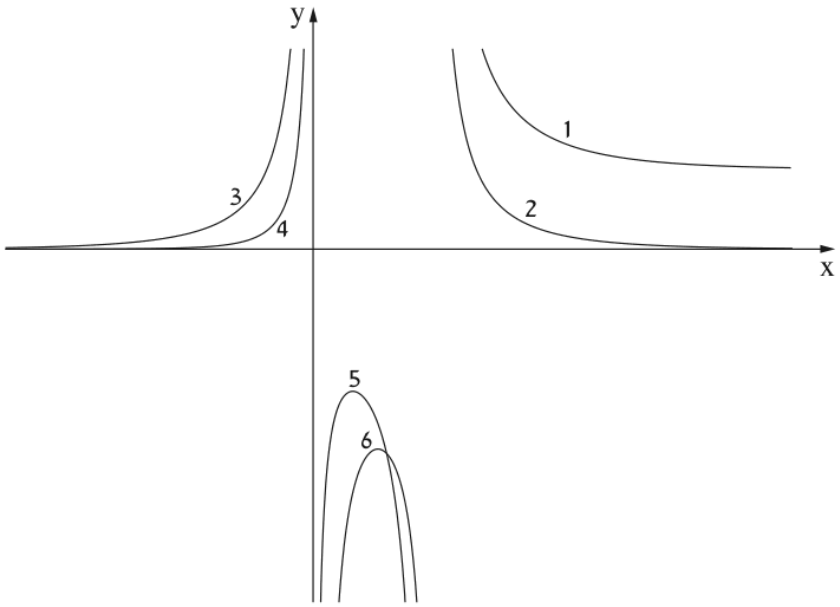
(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\dfrac{5e^{x}}{e^{2x}-5e^{x}+4}$ המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין גרף הפונקצייה $g(x)$.

לפניכם סרטוט הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$. כל אחד מן החלקים של הגרפים מסומן בסרטוט בספרה אחרת.



ג. רשמו לאיזו פונקצייה שייך כל אחד מן החלקים המסומנים בסרטוט. נמקו את תשובתכם.

ד. לפניכם שני ביטויים, I–II. קבעו בנוגע לכל אחד מן הביטויים אם הוא שלילי או חיובי. נמקו <u>ללא חישוב</u>.

I. $\int_{-4}^{-1}(f(x)-g(x))\,dx$ **II.** $\int_{\ell n\frac{8}{5}}^{\ell n2}(f(x)-g(x))\,dx$

ה. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ ובין הישרים $x=\ell n9$ ו־$x=\ell n16$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x\neq 0,\ x\neq \ln 4$

סעיף א (2)

אנכיות: $x=0$ ו־$x=\ln 4$. אופקיות: $y=0$ ו־$y=2$.

סעיף א (3)

עלייה: $x<0$ וגם $0<x<\ln\frac{8}{5}$. ירידה: $\ln\frac{8}{5}<x<\ln 4$ וגם $x>\ln 4$.

סעיף ב

$\left(\ln\frac{5}{2},\ -\frac{50}{9}\right)$

סעיף ג

f: חלקים 1, 4, 5; g: חלקים 2, 3, 6

סעיף ד

ביטוי I שלילי, ביטוי II חיובי

סעיף ה

$S=\ln 4.5\approx 1.5$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = 4x(\ell n(x^2) - 1)$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

(3) הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא אי־זוגית.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) האם יש לפונקצייה $f(x)$ נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $g(x)$ המאונכות לצירים.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

(4) בכמה נקודות הגרפים של $f(x)$ ו־ $g(x)$ נחתכים זה עם זה? נמקו את תשובתכם.

ד. כתבו דוגמה לפונקצייה קדומה של $g(x)$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x \neq 0$

סעיף א (2)

$(\pm\sqrt{e},\ 0)$

סעיף א (3)

$f(-x) = -f(x)$ לכל $x \neq 0$ – הפונקצייה אי־זוגית.

סעיף ב (1)

מקסימום: $\left(\frac{8}{\sqrt{e}},\ -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; מינימום: $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\ -\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$

סעיף ב (2)

אין נקודות פיתול: $f''(x) = \frac{8}{x} \neq 0$, ובנקודה $x = 0$ הפונקצייה אינה מוגדרת.

סעיף ב (3)

גרף אי־זוגי עם „חור" בראשית: מקסימום $\left(\frac{8}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, מינימום $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$, וחיתוך עם ציר ה־ x ב־ $\pm\sqrt{e}$.

סעיף ג (1)

$x \neq 0,\ x \neq \pm\sqrt{e}$

סעיף ג (2)

$x = 0,\ x = \pm\sqrt{e},\ y = 0$

סעיף ג (3)

גרף אי־זוגי עם אסימפטוטות $x = 0,\ x = \pm\sqrt{e},\ y = 0$, מינימום $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{\sqrt{e}}{8}\right)$ ומקסימום $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{\sqrt{e}}{8}\right)$.

סעיף ג (4)

6 נקודות חיתוך

סעיף ד

$G(x) = \frac{1}{8}\ln\left|\ln(x^2) - 1\right|$ (בתוספת קבוע)

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=x^2e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א. **(1)** מצאו את התחום שבו הפונקצייה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה־ x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ג–ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

הפונקצייה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקצייה $g(x)$ $\left(g'(x)=f(x)\right)$.

ד. **(1)** מהו תחום העלייה של הפונקצייה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב־ B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקצייה $g(x)$ הוא הגבוה מבין כל נקודות הפיתול שלה.

נתון כי שיעור ה־ y של הנקודה B הוא $\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

כל x

סעיף א (2)

מינימום ב־$x=0$, מקסימום ב־$x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\approx 0.87$

סעיף ב

$a=1$

סעיף ג

הגרף מעל ציר ה־x או עליו: מינימום $(0,0)$, מקסימום בקירוב $(0.87,\ 1.07)$, ואחריו הגרף שואף ל־0.

סעיף ד (1)

g עולה לכל x (אין תחומי ירידה)

סעיף ד (2)

2 נקודות פיתול

סעיף ה

$g(x)=\frac{e}{3}-\frac{1}{3}e^{1-x^3}$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 5

5. נתונה פונקצייה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקצייה מוגדרת לכל x ורציפה, הפונקצייה היא אי־זוגית, הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה של הפונקצייה, ולפונקצייה יש נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם $(-1,-a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=\ell n\left(f(x)\right)$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $h(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקצייה $h(x)$ חותך את ציר ה־x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך את ציר ה־x בשתי נקודות.

נתון: $f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת: $g'(x)=f(x)$ וגם: $g(0)=0$.

ג. **(1)** מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

(2) האם הפונקצייה $g(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל $\int_{-5}^{t} g(x)dx$, $t>-5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים $\int_{-5}^{t} g(x)dx = \int_{-5}^{5} g(x)dx \cdot 2$? נמקו.

תשובות סופיות

סעיף א

גרף אי־זוגי שעובר בראשית, עם מינימום $(-1,-a)$ ומקסימום $(1,a)$, ושואף ל־0 בשני הצדדים.

סעיף ב (1)

$x>0$

סעיף ב (2)

$x=0$ בלבד

סעיף ב (3)

$a>1$

סעיף ב (4)

אסימפטוטה $x=0$, מקסימום $(1,\ln a)$ מעל ציר ה־x, ושתי נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

סעיף ג (1)

$g(x)=2\ln(1+x^2)$

סעיף ג (2)

זוגית

סעיף ד

$t = 0$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$ המוגדרת לכל x.

א. **(1)** מְצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ y (אם יש כאלה).

(2) מְצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ y.

(3) מְצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(4) סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1 - e^x}{e^x - x}$ המוגדרת לכל x.

ב. **(1)** מְצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $g(x)$ המאונכות לציר ה־ y.

(2) מְצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x (אם יש כאלה).

(3) הוכיחו כי $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x - x)^2}$.

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ ומְצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקצייה $g(x)$. נַמקו את התשובה.

ד. סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ה. חַשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = -1$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)
$y = 1$ (כאשר $x \to -\infty$); אין אסימפטוטה אנכית

סעיף א (2)
$(0, -1)$

סעיף א (3)
מינימום $(1,\ 1 - e) \approx (1, -1.718)$

סעיף א (4)
ראו סקיצה.

סעיף ב (1)
$y = -1$ (כאשר $x \to \infty$), $y = 0$ (כאשר $x \to -\infty$)

סעיף ב (2)
$(0, 0)$

סעיף ב (3)
הוכחה: המונה של g' שווה ל־$f(x)$.

סעיף ג
שתי נקודות קיצון: מקסימום אחת ומינימום אחת

סעיף ד
ראו סקיצה.

סעיף ה

$$S = \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) \approx 0.313$$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = x + \ell n(x^2 - 8)$.

א. **(1)** מְצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מְצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מְצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקִבעו את סוגה.

(4) סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$.

ב. **(1)** מְצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מְצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מְצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) סַרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקצייה $g(x) = e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ג. **(1)** מְצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקִבעו את סוגה.

(2) מְצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $g(x)$.

ד. חַשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה $y = f'(x) \cdot g(x)$, על ידי ציר ה־x ועל ידי הישרים $x = -4$ ו־$x = -5$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)
$x < -\sqrt{8}$ או $x > \sqrt{8}$

סעיף א (2)
$x = \sqrt{8}$, $x = -\sqrt{8}$

סעיף א (3)
מקסימום $(-4, -1.92) \approx (-4,\ -4 + \ln 8)$

סעיף א (4)
ראו סקיצה.

סעיף ב (1)
$x < -\sqrt{8}$ או $x > \sqrt{8}$

סעיף ב (2)
$x = \pm\sqrt{8}$ ו־$y = 1$

סעיף ב (3)
$(-4, 0)$; אין חיתוך עם ציר ה־y

סעיף ב (4)
ראו סקיצה.

סעיף ג (1)

מקסימום $\left(-4,\ \frac{8}{e^4}\right) \approx (-4,\ 0.147)$

סעיף ג (2)

עולה: $x < -4$ ו־$x > \sqrt{8}$; יורדת: $-4 < x < -\sqrt{8}$

סעיף ד

$S = 8e^{-4} - 17e^{-5} \approx 0.032$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 4

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax}{\ell n(x) - a}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א–ב, בטא את תשובותיך באמצעות a, אם יש צורך.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ב. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האנך לציר ה־x העובר בנקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x = e^{a+2}$ ועל ידי ציר ה־x, הוא 3.

ג. מצא את a.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x > 0,\ x \neq e^a$

סעיף א (2)

מינימום $\left(e^{a+1},\ a\,e^{a+1}\right)$

סעיף א (3)

ראו סקיצה.

סעיף ב (1)

$x > 0,\ x \neq e^a$

סעיף ב (2)

מקסימום $\left(e^{a+1},\ \frac{1}{a\,e^{a+1}}\right)$

סעיף ב (3)

ראו סקיצה.

סעיף ג

$a = \frac{1}{2}$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 5

5. נתונה הפונקציה: $f(x)=9^{-x}-6\cdot 3^{-x}+m$, m הוא פרמטר.

א. בתת־סעיפים (1)–(3) בטא את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה־ x .

ב. מצא את הערך של הפרמטר m .

ג. **(1)** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) היעזר בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $\ell n(f(x))$.

ד. הסבר מדוע: $\int_0^1 [\ell n(f(x))-\ell n\,(4)]dx<\ell n\left(\frac{9}{4}\right)$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)
כל x

סעיף א (2)
$y=m$ (כאשר $x\to\infty$)

סעיף א (3)
מינימום $(-1,\ m-9)$

סעיף ב
$m=9$

סעיף ג (1)
ראו סקיצה.

סעיף ג (2)
ראו סקיצה.

סעיף ד
כי $\ln f(x)-\ln 4<\ln\frac{9}{4}$ לכל x בתחום שאורכו 1.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 4

4. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{2x}-3e^{x}+m}{4}$. m הוא פרמטר.

ידוע כי הישר $y=-1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את m .

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}+1$.

ג. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון פרמטר t בתחום $0<t<\ell n4$.

ה. מצא את הערך של t שבעבורו ערך הביטוי $\int_{0}^{t}g(x)dx$ הוא מקסימלי. נמק את תשובתך.

תשובות סופיות

סעיף א (1)
כל x

סעיף א (2)
$m=-4$

סעיף א (3)
$(\ln 4,\ 0)$,$(0,\ -1.5)$

סעיף א (4)
מינימום $\left(\ln 1.5,\ -\frac{25}{16}\right)\approx(0.405,\ -1.5625)$

סעיף ב
ראו סקיצה.

סעיף ג (1)
$x\neq\ln 4$

סעיף ג (2)
$x=\ln 4$; $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$); $y=1$ (כאשר $x\to\infty$)

סעיף ד

ראו סקיצה.

סעיף ה

$t = \ln 3$

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 5

5. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{(\ell n(x))^2}{(\ell n(x))^2-1}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

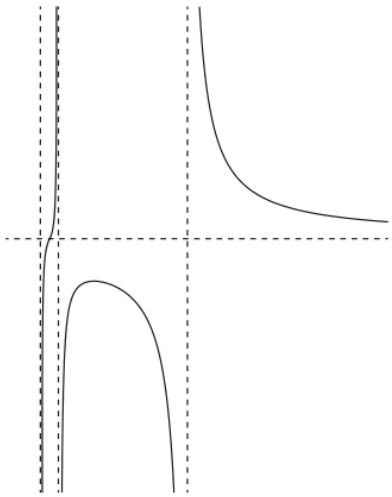
(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. לפניך שלושה גרפים שבהם <u>לא מסומנים</u> הצירים x ו־y . הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת.

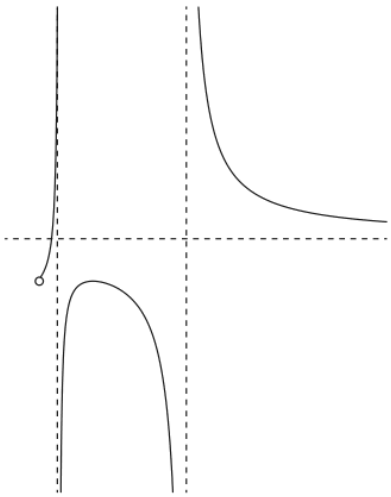
קבע איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$, העתק אותו למחברתך, והוסף בו את מערכת הצירים.

פרט את שיקוליך.

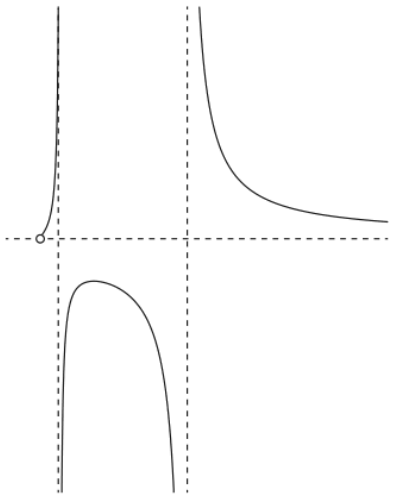
גרף א



גרף ב



גרף ג



ג. **(1)** האם יש פתרון למשוואה $f(x)=1$? נמק את תשובתך.

(2) מהו הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x)=k$ פתרון יחיד? נמק את תשובתך.

נתונות הפונקציות: $h(x)=(\ell n(x))^2+1$, $g(x)=\frac{1}{f(x)-1}$.

נסמן מלבן $ABCD$. הנקודות A ו־B הן שתי נקודות על ציר ה־x שבהן הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת.

הנקודות C ו־D נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.

ד. מהו שטח המלבן $ABCD$? נמק את תשובתך.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$$x>0,\ x\neq e,\ x\neq \frac{1}{e}$$

סעיף א (2)

$$y=1 ,x=\frac{1}{e} ,x=e$$

סעיף א (3)

עולה: $0 < x < \frac{1}{e}$,$1 < x < \frac{1}{e}$

יורדת: $1 < x < e$,$x > e$

סעיף ב

גרף ג

סעיף ג (1)

אין פתרון

סעיף ג (2)

$k = 0$

סעיף ד

$S = 2\left(e - \frac{1}{e}\right) \approx 4.70$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.