מספרים מרוכבים – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י״ב (שאלון 572) • 17 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 3

3. נתונים שלושה מספרים מרוכבים:

$z_1 = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, $z_2 = \frac{1}{r} \cdot (\cos(\alpha + 90^o) + i \cdot \sin(\alpha + 90^o))$, $w = z_1 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_2}$.

$r > 0$, $0^o < \alpha < 90^o$.

הנקודה A מייצגת את המספר w במישור גאוס. נתון כי שיעור ה־x של הנקודה A הוא -1 .

א. מצאו את הערך של α .

נתון כי הנקודה A נמצאת על הישר $y = -1$.

ב. מצאו את הערך של r .

נתונה המשוואה $z^4 = 128 \cdot (z_1 \cdot w)^2$.

z הוא משתנה מרוכב.

ג. מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

כל אחת מן הנקודות B ו־C מייצגת פתרון אחד מבין הפתרונות שמצאתם בסעיף ג.

הנקודה B נמצאת ברביע הראשון והנקודה C נמצאת ברביע השני.

המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z| = b$ חותך את החלק החיובי של ציר ה־y בנקודה K .

b הוא מספר ממשי חיובי.

נתון כי שטח המרובע $CKBO$ הוא $7\sqrt{2}$.

ד. מצאו את הערך של b .

פתרון מלא

סעיף א

נחשב את המכפלה ואת המנה לפי כללי הכפל והחילוק בצורה הטריגונומטרית:

$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot \frac{1}{r}\,\mathrm{cis}(\alpha + \alpha + 90^\circ)$$
$$= \mathrm{cis}(2\alpha + 90^\circ)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{1/r}\,\mathrm{cis}(\alpha - \alpha - 90^\circ)$$
$$= r^2\,\mathrm{cis}(-90^\circ) = -r^2 i$$

נשתמש ב־$\cos(2\alpha + 90^\circ) = -\sin 2\alpha$ וב־$\sin(2\alpha + 90^\circ) = \cos 2\alpha$:

$$w = -\sin 2\alpha + (\cos 2\alpha - r^2)i$$

שיעור ה־x של A הוא החלק הממשי של w:

$$-\sin 2\alpha = -1 \;\Rightarrow\; \sin 2\alpha = 1$$

$0^\circ < 2\alpha < 180^\circ$, ולכן $2\alpha = 90^\circ$.

תשובה: $\alpha = 45^\circ$

סעיף ב

שיעור ה־y של A הוא החלק המדומה של w. עם $\alpha = 45^\circ$:

$$\cos 90^\circ - r^2 = -1$$
$$0 - r^2 = -1 \;\Rightarrow\; r^2 = 1$$

$r > 0$, ולכן $r = 1$.

תשובה: $r = 1$

סעיף ג

עם $\alpha = 45^\circ$, $r = 1$:

$$z_1 = \text{cis}45^\circ, \quad w = -1 - i$$

נעביר את w לצורה טריגונומטרית: $|w| = \sqrt{2}$, והוא ברביע השלישי, ולכן $w = \sqrt{2}\,\text{cis}225^\circ$.

$$z_1 \cdot w = \sqrt{2}\,\text{cis}(45^\circ + 225^\circ)$$
$$= \sqrt{2}\,\text{cis}270^\circ$$

לפי משפט דה־מואבר:

$$(z_1 w)^2 = 2\,\text{cis}540^\circ = 2\,\text{cis}180^\circ$$

ולכן המשוואה היא:

$$z^4 = 128 \cdot 2\,\text{cis}180^\circ = 256\,\text{cis}180^\circ$$

נוציא שורש רביעי: $\sqrt[4]{256} = 4$, והזוויות:

$$\theta_k = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{4} = 45^\circ + 90^\circ k$$

ארבעת הפתרונות:

$$k = 0: \; 4\,\text{cis}45^\circ = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$$
$$k = 1: \; 4\,\text{cis}135^\circ = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$$
$$k = 2: \; 4\,\text{cis}225^\circ = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$$
$$k = 3: \; 4\,\text{cis}315^\circ = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$$

תשובה: $z = 4\,\text{cis}(45^\circ + 90^\circ k)$**,** $k = 0, 1, 2, 3$**:** $\pm 2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}\,i$

סעיף ד

B ברביע הראשון ו־C ברביע השני:

$$B(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}), \quad C(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$$

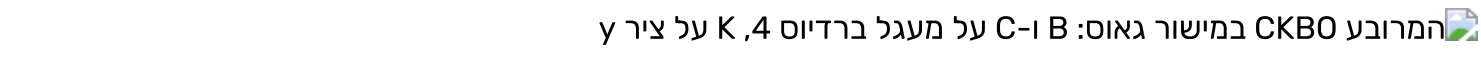
המקום הגאומטרי $|z| = b$ הוא מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו b. הוא חותך את החלק החיובי של ציר ה־y בנקודה $K(0, b)$.

הקטע OK על ציר ה־y מחלק את המרובע $CKBO$ לשני משולשים, OKB ו־OKC. בכל אחד מהם הבסיס $OK = b$, והגובה הוא המרחק של B (או של C) מציר ה־y, כלומר $2\sqrt{2}$:

$$S_{CKBO} = 2 \cdot \frac{b \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,b$$

נשווה לנתון:

$$2\sqrt{2}\,b = 7\sqrt{2} \;\Rightarrow\; b = 3.5$$

המרובע CKBO במישור גאוס: B ו-C על מעגל ברדיוס 4, K על ציר y

תשובה: $b = 3.5$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 3

3. נתונה המשוואה $z^3 = -64$.

z הוא משתנה מרוכב.

א. מצאו את כל פתרונות המשוואה.

נתונים שני מספרים מרוכבים:

$w_1 = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, $w_2 = 2r \cdot (\cos 4\alpha + i \cdot \sin 4\alpha)$,

$50^o < \alpha < 130^o$.

שתי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים w_1 ו־ w_2 נמצאות על ישר אחד, שעובר דרך ראשית הצירים O במישור גאוס.

ב. מצאו את שני הערכים האפשריים של α.

נתון כי w_1 הוא אחד מן הפתרונות שמצאתם בסעיף א.

ג. מצאו את הערך של α ואת הערך של r.

נתונים שני מספרים מרוכבים נוספים: $w_3 = 4 \cdot i$, $w_4 = \frac{8}{i}$.

$ABCD$ הוא מרובע קמור. הקודקוד A מיוצג על ידי המספר w_1, הקודקוד B מיוצג על ידי המספר w_3,

הקודקוד C מיוצג על ידי המספר w_2, והקודקוד D מיוצג על ידי המספר w_4.

ד. הראו כי שטח המרובע $ABCD$ הוא 36.

u הוא מספר מרוכב. הנקודה E, שמיוצגת על ידי המספר u, נמצאת ברביע הראשון על חוצה הזווית BOA.

נתון כי $\bar{u} + \frac{1}{u} = 5.2 \cdot (\cos 285^o + i \cdot \sin 285^o)$, $|u| > 1$.

ה. מצאו את המספר המרוכב u.

פתרון מלא

סעיף א

נכתוב את -64 בהצגה קוטבית: המרחק מהראשית 64, והזווית 180°:

$$z^3 = 64(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$$

לפי נוסחת דה־מואבר לשורשים:

$$z_k = \sqrt[3]{64}\,(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$$
$$\theta_k = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3}$$

$k = 0, 1, 2$:

$$z_0 = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$
$$= 2 + 2\sqrt{3}\,i$$
$$z_1 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -4$$
$$z_2 = 4(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$
$$= 2 - 2\sqrt{3}\,i$$

תשובה: $z_1 = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
$z_2 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -4$

$$z_3 = 4(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$$

סעיף ב

שתי נקודות (שונות מ־O) נמצאות על ישר אחד שעובר דרך O אם ורק אם הזוויות שלהן שוות או שונות ב־180°, כלומר ההפרש ביניהן הוא כפולה של 180°:

$$4\alpha - \alpha = 180^\circ k$$
$$\alpha = 60^\circ k$$

בתחום $50^\circ < \alpha < 130^\circ$ מתקבלים שני ערכים:

$$\alpha_1 = 60^\circ, \qquad \alpha_2 = 120^\circ$$

תשובה: $\alpha = 60^\circ$ **או** $\alpha = 120^\circ$

סעיף ג

$w_1 = r(\cos\alpha^\circ + i\sin\alpha^\circ)$ הוא אחד מפתרונות סעיף א, שהזוויות שלהם $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ והמודול שלהם 4.

מבין הערכים מסעיף ב (60° או 120°) רק 60° היא זווית של פתרון. לכן:

$$\alpha = 60^\circ, \quad r = 4$$

תשובה: $\alpha = 60^\circ,\ r = 4$

סעיף ד

נמצא את ארבעת הקודקודים. לפי סעיף ג, $r = 4$ ו־$\alpha = 60^\circ$. לכן במספר w_2 המודול הוא $2r = 8$ והזווית היא $4\alpha = 240^\circ$.

$$w_1 = 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$$
$$= 2 + 2\sqrt{3}\,i$$
$$w_2 = 8(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$$
$$= -4 - 4\sqrt{3}\,i$$
$$w_3 = 4i$$
$$w_4 = \frac{8}{i} = \frac{8i}{i^2} = -8i$$

הזוויות של הקודקודים: A – 60°, B – 90°, C – 240°, D – 270°. הראשית O נמצאת בתוך המרובע (AC ו־BD עוברים דרכה), ולכן נחלק את המרובע לארבעה משולשים עם קודקוד משותף O:

$$OA = 4,\ OB = 4,\ OC = 8,\ OD = 8$$

הזוויות ב־O הן הפרשי הארגומנטים: $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle BOC = 150^\circ$, $\angle COD = 30^\circ$, $\angle DOA = 150^\circ$. לפי נוסחת שטח משולש $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$:

$$S_{AOB} = \tfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \sin 30^\circ = 4$$
$$S_{BOC} = \tfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 8\cdot \sin 150^\circ = 8$$
$$S_{COD} = \tfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \sin 30^\circ = 16$$
$$S_{DOA} = \tfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\cdot \sin 150^\circ = 8$$
$$S_{ABCD} = 4 + 8 + 16 + 8 = 36$$

סקיצה: המרובע ABCD במישור גאוס, האלכסון AC דרך הראשית בזווית 60 מעלות והאלכסון BD על הציר המדומה

תשובה: הוכח: שטח המרובע $ABCD$ הוא 36.

סעיף ה

הזווית של B ($w_3 = 4i$) היא 90°, והזווית של A (w_1) היא 60°. חוצה הזווית BOA ברביע הראשון יוצר זווית 75° עם הציר הממשי. לכן:

$$u = \rho(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$$

כאשר $\rho = |u| > 1$. נחשב:

$$\bar{u} = \rho(\cos -75^\circ + i \sin -75^\circ)$$
$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\rho}(\cos(-75^\circ) + i \sin(-75^\circ))$$
$$\bar{u} + \frac{1}{u} =$$
$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)(\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ)$$

(כי -75° ו־285° הן אותה זווית). נשווה מודולים:

$$\rho + \frac{1}{\rho} = 5.2$$
$$\rho^2 - 5.2\rho + 1 = 0$$
$$\rho = \frac{5.2 \pm 4.8}{2}$$
$$\rho_1 = 5, \qquad \rho_2 = 0.2$$

נתון $|u| > 1$, ולכן $\rho = 5$.

תשובה: $u = 5(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 3

3. א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z - 2i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 2$ הוא פרבולה, ומצאו את משוואתה.

נתון מספר מרוכב $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $0^o < \theta < 90^o$, $r > 0$.

נתון מצולע קמור I , שקודקודיו מיוצגים על ידי פתרונות המשוואה $z^4 = \frac{1}{r^4} \cdot (\cos(4\theta) + i\sin(4\theta))$, z הוא משתנה מרוכב.

ב. הביעו באמצעות r ו־ θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I .

נתון מצולע II , שקודקודיו מיוצגים על ידי המספרים $-\frac{1}{w}$, $\frac{1}{w}$, $-w$, w .

ג. הביעו באמצעות r ו־ θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע II .

נתון כי מצולע II הוא מעוין.

ד. מצאו את הערך של θ .

נתון כי הנקודה המייצגת את w נמצאת על המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ה. מצאו את היחס בין שטח מצולע II ובין שטח מצולע I .

פתרון מלא

סעיף א

נציב $z = x + iy$. אז $\bar{z} = x - iy$, ולכן:

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y$$

המשוואה נהיית:

$$|x + (y-2)i| = y + 2$$
$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = y + 2$$

(אגף ימין הוא אורך, ולכן $y + 2 \geq 0$.) נעלה בריבוע:

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4$$
$$x^2 = 8y$$

זו פרבולה: $y = \frac{x^2}{8}$ (בה $y \geq 0$, ולכן התנאי $y + 2 \geq 0$ מתקיים). במילים: כל הנקודות שמרחקן מ־$(0, 2)$ שווה למרחקן מהישר $y = -2$.

תשובה: פרבולה: $x^2 = 8y$, כלומר $y = \frac{x^2}{8}$

סעיף ב

נכתוב את אגף ימין בצורה קוטבית. לפי משפט דה־מואבר:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \operatorname{cis} 4\theta$$
$$z^4 = \frac{1}{r^4}\operatorname{cis} 4\theta$$

נוציא שורש רביעי. הגודל: $\sqrt[4]{\frac{1}{r^4}} = \frac{1}{r}$. הזוויות:

$$\frac{4\theta + 360^\circ k}{4} = \theta + 90^\circ k$$

עבור $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\frac{1}{r}\operatorname{cis}\theta, \quad \frac{1}{r}\operatorname{cis}(\theta + 90^\circ)$$
$$\frac{1}{r}\operatorname{cis}(\theta + 180^\circ), \quad \frac{1}{r}\operatorname{cis}(\theta + 270^\circ)$$

(מצולע I הוא ריבוע שמרכזו בראשית.)

תשובה: $\frac{1}{r}\operatorname{cis}(\theta + 90^\circ k), \;\; k = 0, 1, 2, 3$

סעיף ג

$$w = r\operatorname{cis}\theta$$
$$-w = r\operatorname{cis}(\theta + 180^\circ)$$

לפי חילוק בצורה קוטבית:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta)$$
$$-\frac{1}{w} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(180^\circ - \theta)$$

תשובה: $r\operatorname{cis}\theta$**,** $r\operatorname{cis}(\theta + 180^\circ)$ **,** $\frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta)$ **,** $\frac{1}{r}\operatorname{cis}(180^\circ - \theta)$

סעיף ד

w ו־$-w$ סימטריים ביחס לראשית, וכך גם $\frac{1}{w}$ ו־$-\frac{1}{w}$. לכן האלכסונים של מצולע II חוצים זה את זה בראשית, והוא מקבילית.

מקבילית היא מעוין אם ורק אם האלכסונים מאונכים זה לזה. האלכסון האחד בכיוון הזווית θ, והשני בכיוון הזווית $-\theta$, ולכן הזווית ביניהם 2θ:

$$2\theta = 90^\circ \;\Rightarrow\; \theta = 45^\circ$$

($0^\circ < \theta < 90^\circ$, ולכן $0^\circ < 2\theta < 180^\circ$ ויש פתרון אחד.)

תשובה: $\theta = 45^\circ$

סעיף ה

עם $\theta = 45^\circ$:

$$w = \frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r}{\sqrt{2}}i$$

נסמן $t = \frac{r}{\sqrt{2}}$. הנקודה (t, t) על הפרבולה $y = \frac{x^2}{8}$:

$$t = \frac{t^2}{8} \;\Rightarrow\; t = 8 \quad (t > 0)$$
$$r = 8\sqrt{2}$$

שטח מצולע II (מעוין) – מחצית מכפלת האלכסונים:

$$S_{II} = \frac{2r \cdot \frac{2}{r}}{2} = 2$$

שטח מצולע I (ריבוע) – הקודקודים במרחק $\frac{1}{r}$ מהמרכז, ולכן כל אלכסון באורך $\frac{2}{r}$:

$$S_I = \frac{\left(\frac{2}{r}\right)^2}{2} = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{128} = \frac{1}{64}$$

היחס:

$$\frac{S_{II}}{S_I} = \frac{2}{1/64} = 128$$

תשובה: $S_{II} : S_I = 128$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 3

3. נתונים שני מספרים מרוכבים z_1 ו־z_2 שמכפלתם היא $-19+4i$.

$z_1 = 2+3i$.

א. מצאו את המספר z_2.

נתונה המשוואה $w^3 = z_1 + z_2$, w הוא משתנה מרוכב.

ב. מצאו את פתרונות המשוואה.

נתון מספר מרוכב $z = 2(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$, $0^o \le \theta < 360^o$.

נתון כי המספרים z ו־z^3 נמצאים על ישר אחד שעובר בראשית הצירים.

ג. מצאו את ארבע האפשרויות של המספר z.

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב וארבעת המספרים שמצאתם בסעיף ג, מייצגים את כל הקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ד. **(1)** סרטטו את המצולע במערכת צירים.

(2) חשבו את השטח של המצולע.

נתון מספר מרוכב $3(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $0^o \le \alpha < 360^o$.

מכפילים כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע במספר מרוכב זה, כך שנוצר מצולע חדש.

ה. מצאו פי כמה גדול שטח המצולע החדש משטח המצולע שמצאתם בסעיף ד.

פתרון מלא

סעיף א

נתון $z_1 z_2 = -19+4i$ ו־$z_1 = 2+3i$, ולכן:

$$z_2 = \frac{-19+4i}{2+3i}$$

נכפול במונה ובמכנה בצמוד $2-3i$:

$$= \frac{(-19+4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$
$$= \frac{-38+57i+8i-12i^2}{4+9}$$
$$= \frac{-26+65i}{13} = -2+5i$$

תשובה: $z_2 = -2+5i$

סעיף ב

$$z_1 + z_2 = (2+3i)+(-2+5i) = 8i$$

לכן המשוואה היא $w^3 = 8i$. בהצגה קוטבית:

$$w^3 = 8(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$$

לפי דה־מואבר:

$$w_k = 2(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$$
$$\theta_k = \frac{90^\circ + 360^\circ k}{3} = 30^\circ + 120^\circ k$$

עבור $k = 0, 1, 2$:

$$w_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$$
$$= \sqrt{3} + i$$
$$w_2 = 2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$$
$$= -\sqrt{3} + i$$
$$w_3 = 2(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)$$
$$= -2i$$

תשובה: $2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$
$2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$
$2(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)$

סעיף ג

לפי דה־מואבר:

$$z^3 = 8(\cos 3\theta^\circ + i\sin 3\theta^\circ)$$

הנקודות z ו־z^3 נמצאות על ישר אחד שעובר דרך הראשית אם ורק אם ההפרש בין הזוויות שלהן הוא כפולה של 180°:

$$3\theta - \theta = 180^\circ k$$
$$\theta = 90^\circ k$$

בתחום $0^\circ \le \theta < 360^\circ$:

$$\theta = 0^\circ,\ 90^\circ,\ 180^\circ,\ 270^\circ$$
$$z = 2, \quad z = 2i, \quad z = -2, \quad z = -2i$$

תשובה: $z = 2,\ 2i,\ -2,\ -2i$

סעיף ד (1)

כל המספרים מסעיפים ב ו־ג הם בעלי מודול 2, ולכן נמצאים על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 2. המספר $-2i$ מופיע בשני הסעיפים, ולכן יש 6 קודקודים, בזוויות:

$$0^\circ,\ 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ,\ 180^\circ,\ 270^\circ$$

המצולע במישור גאוס: שישה קודקודים על מעגל שרדיוסו 2 בזוויות 0, 30, 90, 150, 180 ו־270 מעלות

תשובה: משושה קמור שקודקודיו על מעגל ברדיוס 2:
$2,\ \sqrt{3}+i,\ 2i,\ -\sqrt{3}+i,\ -2,\ -2i$

סעיף ד (2)

נחלק את המצולע ל־6 משולשים שקודקודם המשותף בראשית O. כל משולש הוא שווה־שוקיים עם שוקיים באורך 2, ושטחו $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin\beta = 2\sin\beta$, כאשר β הזווית שבין שני קודקודים סמוכים.

הזוויות בין קודקודים סמוכים:

$$30^\circ,\ 60^\circ,\ 60^\circ,\ 30^\circ,\ 90^\circ,\ 90^\circ$$
$$S = 2\left(\sin 30^\circ + \sin 60^\circ + \sin 60^\circ\right.$$

$$+\sin 30^\circ + \sin 90^\circ + \sin 90^\circ)$$
$$= 2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} + 1 + 1\right)$$
$$= 2\left(3 + \sqrt{3}\right) = 6 + 2\sqrt{3} \approx 9.46$$

תשובה: $S = 6 + 2\sqrt{3} \approx 9.46$

סעיף ה

כפל ב־$3(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ מכפיל את המודול של כל קודקוד פי 3 ומוסיף α לזווית שלו. כלומר המצולע מסתובב סביב הראשית בזווית α ומוגדל פי 3.

סיבוב לא משנה שטח, והגדלה פי 3 של כל האורכים מגדילה את השטח פי 3^2:

$$S_{new} = 9S$$

בדיקה: כל משולש שטחו $\tfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin\beta = 18\sin\beta$ הופך למשולש ששטחו $2\sin\beta$, כלומר פי 9.

תשובה: פי 9

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 3

3. א. הביעו באמצעות x ו־y את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z| = |z - (2 + 2i)|$.

z הוא משתנה מרוכב.

נתונה המשוואה $z^2 - z(2 + 2i) + 4i = 0$.

A ו־B הן נקודות המיוצגות על ידי שני פתרונות המשוואה.

ב. הראו כי הנקודות A ו־B נמצאות על המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

הנקודות C ו־D נמצאות על הצירים כך ש־$ABCD$ הוא ריבוע.

סובבו את הריבוע $ABCD$ סביב ראשית הצירים נגד כיוון השעון בזווית α $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$.

כל שמונה הנקודות (הנקודות A, B, C ו־D וארבע הנקודות שהתקבלו אחרי הסיבוב) מיוצגות על ידי פתרונות של המשוואה $z^n = b$, שבה n הוא מספר טבעי ו־b הוא מספר ממשי.

ג. (1) מצאו את הערך של b ואת הערך של α בעבור $n = 8$.

(2) מצאו ערך אפשרי של n בעבור $\alpha = 15^\circ$, ומצאו את הערך של b המתאים לו.

פתרון מלא

סעיף א

$|z|$ הוא המרחק של z מהראשית, ו־$|z - (2 + 2i)|$ הוא המרחק של z מהנקודה $(2, 2)$. נציב $z = x + iy$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

נעלה בריבוע:

$$x^2 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$

$$4x + 4y = 8$$

$$y = -x + 2$$

(האנך האמצעי של הקטע בין הראשית ל־$(2, 2)$.)

תשובה: $y = -x + 2$

סעיף ב

נפתור את המשוואה $z^2 - (2 + 2i)z + 4i = 0$ אלגברית, בפירוק לגורמים (הוצאת גורם משותף בקבוצות):

$$z^2 - 2z - 2iz + 4i = 0$$

$$z(z - 2) - 2i(z - 2) = 0$$

$$(z - 2)(z - 2i) = 0$$

$$z_1 = 2, \qquad z_2 = 2i$$

(אפשר גם בנוסחת השורשים: $\Delta = (2 + 2i)^2 - 16i = -8i$, ו־$(2 - 2i)^2 = -8i$, ולכן $z = \frac{(2+2i) \pm (2-2i)}{2}$.) לכן:

$$A(2, 0), \quad B(0, 2)$$

בדיקה על הישר $y = -x + 2$:

$0 = -2 + 2$ ✓

$2 = -0 + 2$ ✓

תשובה: הפתרונות הם 2 ו־$2i$, והנקודות $(2,0)$ ו־$(0,2)$ נמצאות על הישר $y = -x + 2$.

סעיף ג (1)

A ו־B על הצירים במרחק 2 מהראשית. כדי ש־$ABCD$ יהיה ריבוע עם C, D על הצירים:

$$C(-2,0), \quad D(0,-2)$$

ארבעת הקודקודים מיוצגים על ידי:

$$2\,\mathrm{cis}(90^\circ k), \quad k = 0,1,2,3$$

אחרי סיבוב בזווית α מתקבלות הנקודות:

$$2\,\mathrm{cis}(\alpha + 90^\circ k)$$

עבור $n = 8$ למשוואה $z^8 = b$ יש בדיוק 8 פתרונות, וכולם בגודל $\sqrt[8]{|b|}$ ובהפרשי זוויות של $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. כל 8 הנקודות הן הפתרונות, ולכן:

- $z = 2$ פתרון, ולכן $b = 2^8 = 256$.
- הנקודות צריכות להיות במרווחים של 45°, ולכן $\alpha = 45^\circ$.

תשובה: $b = 256$, $\alpha = 45^\circ$

סעיף ג (2)

עבור $\alpha = 15^\circ$ שמונה הנקודות הן בגודל 2 ובזוויות:

$$0^\circ, 15^\circ, 90^\circ, 105^\circ$$
$$180^\circ, 195^\circ, 270^\circ, 285^\circ$$

הפתרונות של $z^n = b$ נמצאים במרווחים שווים של $\frac{360^\circ}{n}$. כדי שיכללו גם את 0° וגם את 15°, המרווח צריך לחלק את 15°:

הקטן ביותר: $\frac{360^\circ}{n} = 15^\circ$, כלומר $n = 24$ (וכל כפולה של 24 מתאימה גם היא). אז כל 8 הנקודות נמצאות בין 24 הפתרונות.

$z = 2$ הוא פתרון, ולכן:

$$b = 2^{24} = 16{,}777{,}216$$

תשובה: למשל $n = 24$ ו־$b = 2^{24}$ (מתאים כל n שהוא כפולה של 24, עם $b = 2^n$).

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 3

3. נתון המספר המרוכב $w = r(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$, $r > 0$, $90^o < \theta < 180^o$.

א. הביעו באמצעות r ו־θ הצגה קוטבית של המספר $\frac{1}{w}$.

הנקודה A במישור גאוס מייצגת את המספר w , והנקודה B מייצגת את המספר $\frac{1}{w}$.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

נתון כי שטח המשולש AOB הוא $\frac{\sqrt{2}}{4}$ והזווית AOB היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של θ .

נתונות שתי משוואות: I. $z^8 = w^8$

II. $z^8 = (w\cdot\overline{w})^4$

z הוא מספר מרוכב.

נתון מצולע קמור שקודקודיו הם כל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה I וכל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה II .

ג. **(1)** מצאו כמה קודקודים יש למצולע.

(2) האם כל קודקודי המצולע נמצאים על מעגל אחד שמרכזו בראשית הצירים? נמקו את תשובתכם.

נתון כי שטח המצולע הוא 62 .

ד. מצאו את הערך של r .

פתרון מלא

סעיף א

בהצגה קוטבית מחלקים את המודולים ומחסרים את הזוויות. המספר 1 הוא בעל מודול 1 וזווית 0°. לכן:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$$

תשובה: $\frac{1}{w} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$

סעיף ב

האורכים של הצלעות היוצאות מהראשית:

$$OA = |w| = r$$
$$OB = \left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{r}$$

לפי נוסחת השטח בעזרת סינוס:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{1}{r}\cdot\sin\angle AOB$$
$$= \frac{1}{2}\sin\angle AOB$$

נשווה לנתון:

$$\frac{1}{2}\sin\angle AOB = \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\angle AOB = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

הזווית חדה ולכן:

$$\angle AOB = 45^\circ$$

הזווית של w היא θ. הזווית של $\frac{1}{w}$ היא $-\theta$ ששווה ל־$360^\circ - \theta$.

הזווית θ נמצאת בין 90° ל־180° ולכן:

$$\angle AOB = (360^\circ - \theta) - \theta$$
$$= 360^\circ - 2\theta$$
$$360^\circ - 2\theta = 45^\circ$$
$$\theta = 157.5^\circ$$

תשובה: $\theta = 157.5^\circ$

סעיף ג (1)

משוואה I היא $z^8 = w^8$. הפתרונות הם השורשים מסדר 8 של w^8. המודול של כל אחד מהם הוא r והזוויות הן:

$$\alpha_k = 157.5^\circ + 45^\circ k$$
$$k = 0, 1, \ldots, 7$$

כלומר 8 נקודות בזוויות:

$$22.5^\circ,\ 67.5^\circ,\ \ldots,\ 337.5^\circ$$

משוואה II: מתקיים

$$w \cdot \bar{w} = |w|^2 = r^2$$

ולכן המשוואה היא:

$$z^8 = (r^2)^4 = r^8$$

גם כאן המודול של כל פתרון הוא r והזוויות הן:

$$\beta_k = 45^\circ k$$
$$0^\circ,\ 45^\circ,\ \ldots,\ 315^\circ$$

הזוויות של משוואה II הן כפולות של 45° והזוויות של משוואה I נמצאות בדיוק באמצע ביניהן. אין פתרון משותף ולכן יש $8 + 8 = 16$ קודקודים.

תשובה: 16 קודקודים

סעיף ג (2)

כן. לכל 16 הפתרונות המודול הוא r, כלומר כולם במרחק r מהראשית – על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו r.

תשובה: כן – כולם במרחק r מהראשית.

סעיף ד

16 הקודקודים מחלקים את המעגל באופן שווה: בין כל שני קודקודים סמוכים זווית מרכזית $\frac{360^\circ}{16} = 22.5^\circ$. זהו מצולע משוכלל בן 16 צלעות.
נחלק אותו ל־16 משולשים שווי־שוקיים עם קודקוד בראשית:

$$S = 16 \cdot \tfrac{1}{2} r^2 \sin 22.5^\circ = 8r^2 \sin 22.5^\circ$$
$$8r^2 \sin 22.5^\circ = 62$$
$$r^2 = \frac{62}{8 \sin 22.5^\circ} \approx 20.25$$
$$r \approx 4.5$$

תשובה: $r \approx 4.5$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 3

3. א. (1) מצאו את פתרונות המשוואה: $z^6 + 64i = 0$ (z הוא מספר מרוכב).

(2) מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה: $\frac{z^6 + 64i}{z^2 - 4i} = 0$ (z הוא מספר מרוכב).

הפתרונות שמצאתם בתת־סעיף א(2) מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ב. מצאו את שטח המרובע.

מסובבים את המרובע (סביב הראשית) בזווית α נגד כיוון השעון, $0^o < \alpha < 90^o$.

ג. מהו הערך של מכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע בעבור $\alpha = 45^o$? נמקו את תשובתכם.

ד. (1) מצאו את שני הערכים של α כך שמכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע לאחר הסיבוב תהיה מספר מדומה טהור.

(2) מהו הערך של המכפלה בעבור כל אחד מן הערכים של α שמצאתם?

פתרון מלא

סעיף א (1)

$$z^6 = -64i = 64\,\mathrm{cis}\,270^\circ$$

לפי נוסחת השורשים: $\sqrt[6]{64} = 2$, והזוויות:

$$\theta_k = \frac{270^\circ + 360^\circ k}{6} = 45^\circ + 60^\circ k$$

עבור $k = 0, \dots, 5$:

$$2\,\mathrm{cis}45^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}105^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}165^\circ$$
$$2\,\mathrm{cis}225^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}285^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}345^\circ$$

תשובה: $z = 2\,\mathrm{cis}(45^\circ + 60^\circ k),\quad k = 0, \dots, 5$

סעיף א (2)

שבר שווה לאפס כאשר המונה אפס והמכנה שונה מאפס. המונה מתאפס בששת הפתרונות של א(1). נבדוק מתי המכנה מתאפס:

$$z^2 = 4i = 4\,\mathrm{cis}90^\circ$$
$$z = 2\,\mathrm{cis}45^\circ, \quad z = 2\,\mathrm{cis}225^\circ$$

אלה נפסלים, ונשארים ארבעה פתרונות:

$$2\,\mathrm{cis}105^\circ, \quad 2\,\mathrm{cis}165^\circ$$
$$2\,\mathrm{cis}285^\circ, \quad 2\,\mathrm{cis}345^\circ$$

תשובה: $2\,\mathrm{cis}105^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}165^\circ$
$2\,\mathrm{cis}285^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}345^\circ$

סעיף ב

כל הקודקודים על מעגל שרדיוסו 2. הזוויות 105° ו־285° מנוגדות (הפרש 180°), וכך גם 165° ו־345°. לכן שני האלכסונים הם קטרים, באורך 4 כל אחד, והם חוצים זה את זה בראשית.
(מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה ושווים זה לזה הוא מלבן.)

הראשית O – אמצע שני האלכסונים – היא נקודת המפגש שלהם, ולכן נחלק את המרובע לארבעה משולשים עם קודקוד O. בכל משולש שתי צלעות באורך 2 (רדיוס), והזוויות ב־O הן הפרשי הארגומנטים:

$$165^\circ - 105^\circ = 60^\circ, \quad 285^\circ - 165^\circ = 120^\circ$$

(ובאותו אופן 60° ו־120° לשני המשולשים האחרים). לפי נוסחת שטח משולש $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$:

$$S = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 60^\circ$$
$$+2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 120^\circ$$
$$= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \approx 6.93$$

המרובע במישור גאוס: ארבעה קודקודים על מעגל ברדיוס 2, האלכסונים קטרים

תשובה: $S = 4\sqrt{3} \approx 6.93$

סעיף ג

סיבוב בזווית α נגד כיוון השעון הוא כפל של כל קודקוד ב־$\operatorname{cis}\alpha$. מכפלת ארבעת הקודקודים לפני הסיבוב:

$$2^4 \operatorname{cis}(105^\circ + 165^\circ + 285^\circ + 345^\circ)$$
$$= 16 \operatorname{cis} 900^\circ = 16 \operatorname{cis} 180^\circ = -16$$

אחרי הסיבוב כל אחד מארבעת הגורמים מוכפל ב־$\operatorname{cis}\alpha$, ולכן המכפלה:

$$P(\alpha) = 16 \operatorname{cis}(180^\circ + 4\alpha)$$

עבור $\alpha = 45^\circ$:

$$P = 16 \operatorname{cis} 360^\circ = 16$$

תשובה: 16

סעיף ד (1)

$P(\alpha) = 16 \operatorname{cis}(180^\circ + 4\alpha)$ הוא מדומה טהור כאשר הזווית שלו היא 90° או 270° (עד כדי כפולות של 360°):

$$180^\circ + 4\alpha = 270^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 22.5^\circ$$
$$180^\circ + 4\alpha = 450^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 67.5^\circ$$

אין פתרונות נוספים, כי בתחום הנתון של α:

$$180^\circ < 180^\circ + 4\alpha < 540^\circ$$

תשובה: $\alpha = 22.5^\circ$ **או** $\alpha = 67.5^\circ$

סעיף ד (2)

$$\alpha = 22.5^\circ: \quad P = 16 \operatorname{cis} 270^\circ = -16i$$
$$\alpha = 67.5^\circ: \quad P = 16 \operatorname{cis} 450^\circ = 16i$$

תשובה: $\alpha = 22.5^\circ: \quad -16i$
$\alpha = 67.5^\circ: \quad 16i$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 3

3. במעוין ABCD הקודקוד A נמצא ברביע הראשון, והקודקוד B נמצא ברביע השני במישור גאוס.

אלכסוני המעוין נפגשים בראשית הצירים.

המספר המרוכב z מייצג את הקודקוד A.

נתון: $BD = 2AC$.

א. הביעו באמצעות z את המספרים שמייצגים את הקודקודים C, B ו־D.

נסמן: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

ב. ענו על התת־סעיפים (1) ו־(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות r ו־θ אם יש צורך.

(1) כתבו הצגה קוטבית של ארבעת המספרים ההופכיים (..., $\frac{1}{z}$) למספרים המייצגים את קודקודי המעוין.

(2) ארבעת המספרים שמצאתם בתת־סעיף ב(1) מייצגים קודקודים של מרובע.

מצאו את שטח המרובע שנוצר על ידי קודקודים אלה.

ג. נתונה המשוואה: $w^{11} = \overline{w}$, w הוא מספר מרוכב השונה מ־0.

מצאו את סכום 12 הפתרונות של המשוואה.

פתרונות המשוואה שבסעיף ג מייצגים קודקודים של מצולע ששטחו שווה לשטח המרובע שמצאתם בתת־סעיף ב(2).

ד. מצאו את הערך של r.

פתרון מלא

סעיף א

במעוין האלכסונים חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה. האלכסונים נפגשים בראשית ולכן C סימטרית ל־A ביחס לראשית:

$$z_C = -z$$

הנקודה B מתקבלת מסיבוב של $\overrightarrow{OA}$ ב־$90°$. הסיבוב הוא נגד כיוון השעון כי B ברביע השני. בנוסף $OB = 2 \cdot OA$ כי $BD = 2AC$. כפל ב־i הוא סיבוב ב־$90°$ ולכן:

$$z_B = 2iz$$
$$z_D = -2iz$$

תשובה: $z_B = 2iz$

$$z_C = -z$$
$$z_D = -2iz$$

סעיף ב (1)

נכתוב כל קודקוד בהצגה קוטבית. כפל ב־i מוסיף $90°$ וכפל ב־-1 מוסיף $180°$:

$$z_B = 2r\,\mathrm{cis}(\theta + 90°)$$
$$z_C = r\,\mathrm{cis}(\theta + 180°)$$
$$z_D = 2r\,\mathrm{cis}(\theta + 270°)$$

במספר ההופכי לוקחים את ההופכי של המודול ואת הזווית הנגדית:

$$\frac{1}{z_A} = \frac{1}{r}\,\mathrm{cis}(-\theta)$$

$$\frac{1}{z_B} = \frac{1}{2r}\operatorname{cis}(-\theta - 90^\circ)$$
$$\frac{1}{z_C} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta - 180^\circ)$$
$$\frac{1}{z_D} = \frac{1}{2r}\operatorname{cis}(-\theta - 270^\circ)$$

תשובה: $\frac{1}{z_A} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta)$
$\frac{1}{z_B} = \frac{1}{2r}\operatorname{cis}(-\theta - 90^\circ)$
$\frac{1}{z_C} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta - 180^\circ)$
$\frac{1}{z_D} = \frac{1}{2r}\operatorname{cis}(-\theta - 270^\circ)$

סעיף ב (2)

שתי הנקודות שהמודול שלהן $\frac{1}{r}$ נמצאות בזוויות שההפרש ביניהן 180°. לכן הן קצוות של קטע שעובר דרך הראשית ואורכו $\frac{2}{r}$.

באותו אופן שתי הנקודות שהמודול שלהן $\frac{1}{2r}$ הן קצוות של קטע דרך הראשית שאורכו $\frac{1}{r}$.

שני הקטעים מאונכים זה לזה כי הזוויות שלהם שונות ב־90°. הם חוצים זה את זה בראשית ולכן המרובע הוא מעוין:

$$S = \frac{\frac{2}{r} \cdot \frac{1}{r}}{2} = \frac{1}{r^2}$$

תשובה: $\frac{1}{r^2}$

סעיף ג

ניקח ערך מוחלט של שני האגפים:

$$|w|^{11} = |\bar{w}| = |w|$$

המספר w שונה מ־0 ולכן:

$$|w|^{10} = 1 \;\Rightarrow\; |w| = 1$$

כאשר $|w| = 1$ מתקיים $\bar{w} = \frac{1}{w}$. לכן:

$$w^{11} = \frac{1}{w}$$
$$w^{12} = 1$$

הפתרונות הם 12 השורשים מסדר 12 של 1. הם קודקודים של מצולע משוכלל שמרכזו בראשית ולכן הסכום שלהם 0.

תשובה: 0

סעיף ד

12 הפתרונות נמצאים על מעגל היחידה ומחלקים אותו באופן שווה. הזווית המרכזית בין שני קודקודים סמוכים היא 30°:

$$S = 12 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = 3$$

נשווה לשטח מסעיף ב (2):

$$\frac{1}{r^2} = 3$$
$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

תשובה: $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 3

3. $z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו־ y הם מספרים ממשיים).

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x , y) במישור גאוס המקיימות:

$|6 - \bar{z} - 8i|^2 - |10i| = |9 + 12i|$ הוא מעגל.

הנקודה M היא מרכז המעגל המתואר בסעיף א.

המספרים המרוכבים z_A ו־ z_M מייצגים את הנקודות A ו־ M, בהתאמה.

נתון: למספרים z_A ו־ z_M יש אותו ארגומנט (זווית).

$|z_M| = 2|z_A|$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A .

נתונה סדרה הנדסית $z_1 , z_2 , z_3 , \ldots$.

האיבר הראשון בסדרה מייצג את הנקודה A, והאיבר החמישי בסדרה מייצג את הנקודה M .

ג. מצאו את מנת הסדרה (כל האפשרויות).

ד. חשבו את הסכום: $z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + \ldots + z_{10} \cdot \overline{z_{10}}$.

פתרון מלא

סעיף א

נציב $\bar{z} = x - yi$ בביטוי שבתוך הערך המוחלט:

$$6 - \bar{z} - 8i = (6 - x) + (y - 8)i$$

ולכן:

$$|6 - \bar{z} - 8i|^2 = (x - 6)^2 + (y - 8)^2$$

נחשב את שני הערכים המוחלטים הנותרים:

$$|10i| = 10$$
$$|9 + 12i| = \sqrt{81 + 144} = 15$$

נציב במשוואה:

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 - 10 = 15$$
$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 25$$

זו משוואת מעגל שמרכזו $(6, 8)$, והרדיוס שלו 5 יחידות.

תשובה: מעגל:
$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 25$

סעיף ב

מרכז המעגל הוא $M(6, 8)$, ולכן:

$$z_M = 6 + 8i, \qquad |z_M| = 10$$

לשני המספרים אותו ארגומנט, והיחס ביניהם הוא 2. לכן:

$$z_A = \frac{z_M}{2} = 3 + 4i$$

בדיקה: הנקודה על המעגל, כי:

$$(3-6)^2 + (4-8)^2 = 9 + 16 = 25 \checkmark$$

תשובה: $A(3,\ 4)$

סעיף ג

האיבר החמישי בסדרה הנדסית:

$$z_5 = z_1 \cdot q^4$$

נציב:

$$6 + 8i = (3 + 4i)\, q^4 \ \Rightarrow\ q^4 = 2$$

נכתוב בהצגה קוטבית ונוציא שורש רביעי:

$$q^4 = 2 \operatorname{cis} 0^\circ$$
$$q = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis}(90^\circ k), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

ארבע האפשרויות:

$$q = \sqrt[4]{2}, \qquad q = -\sqrt[4]{2}$$
$$q = \sqrt[4]{2}\, i, \qquad q = -\sqrt[4]{2}\, i$$

תשובה: $q = \pm\sqrt[4]{2}$
$q = \pm\sqrt[4]{2}\, i$

סעיף ד

מכפלת מספר מרוכב בצמוד שלו היא ריבוע הערך המוחלט:

$$z_k \cdot \bar{z}_k = |z_k|^2$$

בכל ארבע האפשרויות הערך המוחלט של המנה זהה:

$$|q| = \sqrt[4]{2}, \qquad |q|^2 = \sqrt{2}$$

ולכן:

$$|z_k|^2 = |z_1|^2 \cdot |q|^{2(k-1)}$$
$$= 25 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{k-1}$$

קיבלנו סדרה הנדסית ממשית עם איבר ראשון 25 ומנה $\sqrt{2}$. סכום עשרת האיברים הראשונים:

$$S_{10} = 25 \cdot \frac{(\sqrt{2})^{10} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$
$$= 25 \cdot \frac{31}{\sqrt{2} - 1}$$
$$= 775(\sqrt{2} + 1) \approx 1871.02$$

תשובה: $775(\sqrt{2}+1)$
≈ 1871.02

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 3

3. נתונה סדרה הנדסית $z_1, z_2, z_3, \ldots$ שאיבריה הם מספרים מרוכבים ומנתה היא q.

z_1 נמצא ברביע הראשון.

נתון: $(z_1)^3 = z_3$

$$-2z_1 = \overline{z_3}$$

א. הוכיחו כי $q = -z_1$ או $q = z_1$.

ב. מצאו את z_1.

ענו על הסעיפים ג–ד עבור: $q = z_1$.

z_{4n} ו־ z_{4n-2} הם שני איברים בסדרה ההנדסית הנתונה (n הוא מספר טבעי).

ג. קבעו בעבור כל אחד מן האיברים אם הוא מדומה או ממשי. נמקו את קביעותיכם.

ד. מצאו את ערך הסכום: $\frac{z_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_3}{(\sqrt{2})^3} + \ldots + \frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}}$.

פתרון מלא

סעיף א

בסדרה הנדסית $z_3 = z_1 q^2$. נציב בנתון הראשון:

$$z_1 q^2 = z_1^3$$

המספר z_1 ברביע הראשון ולכן שונה מ־0. נחלק ב־z_1:

$$q^2 = z_1^2$$
$$(q - z_1)(q + z_1) = 0$$

ולכן $q = z_1$ או $q = -z_1$.

תשובה: הוכח: $q^2 = z_1^2$

סעיף ב

נכתוב $z_1 = r\,\mathrm{cis}\,\theta$ כאשר θ בין 0° ל־90°. לפי הנתון $z_3 = z_1^3$:

$$\overline{z_3} = r^3\,\mathrm{cis}(-3\theta)$$
$$-2z_1 = 2r\,\mathrm{cis}(\theta + 180^\circ)$$

השוואת מודולים:

$$r^3 = 2r \;\Rightarrow\; r = \sqrt{2}$$

השוואת זוויות:

$$-3\theta = \theta + 180^\circ + 360^\circ k$$
$$\theta = -45^\circ - 90^\circ k$$

הזווית היחידה ברביע הראשון היא 45°:

$$z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}45^\circ = 1 + i$$

תשובה: $z_1 = 1 + i$

סעיף ג

עם $q = z_1$ כל איבר הוא חזקה של z_1:

$$z_m = z_1^m = (\sqrt{2})^m\,\mathrm{cis}(45^\circ m)$$

האיבר z_{4n}**:** הזווית שלו היא $45^\circ \cdot 4n = 180^\circ n$. זו כפולה של 180° ולכן האיבר ממשי.

האיבר z_{4n-2}**:** הזווית שלו היא $180^\circ n - 90^\circ$. זו זווית של 90° או 270° ולכן האיבר מדומה.

תשובה: z_{4n} **ממשי**

z_{4n-2} **מדומה**

סעיף ד

כל מחובר בסכום הוא:

$$\frac{z_m}{(\sqrt{2})^m} = \mathrm{cis}(45^\circ m) = w^m$$

$$w = \mathrm{cis}45^\circ$$

זו סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה w והמנה שלה w. מתקיים $w^8 = \mathrm{cis}360^\circ = 1$ ולכן $w^{64} = 1$:

$$S = \frac{w\left(w^{64} - 1\right)}{w - 1} = \frac{w(1-1)}{w-1} = 0$$

תשובה: 0

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 3

3. $z = x + iy$ הוא מספר מרוכב (x ו־y הם מספרים ממשיים).

א. **(1)** הראו כי משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס המקיימות: $|z^2 - i| = |z^2 + 3i|$,

היא $y = -\frac{1}{2x}$.

(2) תנו דוגמה למספר מרוכב הנמצא על המקום הגאומטרי הזה.

ב. פתרו את המשוואה: $z^6 = 1$.

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף **ב** מייצגים את קודקודיו של מצולע I .

המקום הגאומטרי שמצוין בתת־סעיף **א (1)** חותך ברביע הרביעי את המעגל החוסם את מצולע I בנקודה A .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A .

הנקודה A היא קודקוד של מצולע משוכלל אחר החסום באותו מעגל, מצולע II .

נתון: מספר הקודקודים של מצולע II שווה למספר הקודקודים של מצולע I .

ד. מצאו את המספרים המרוכבים המייצגים את כל הקודקודים של מצולע II .

נסמן: $w = r \cdot \text{cis}\,\alpha$, $0 < \alpha < 60^\circ$.

כופלים את כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I במספר w , כך שקודקודי מצולע I מתלכדים עם קודקודי מצולע II .

ה. מצאו את w .

פתרון מלא

סעיף א (1)

נחשב את z^2:

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\,i$$

נסמן את החלק הממשי והמדומה:

$$p = x^2 - y^2, \qquad q = 2xy$$

נציב במשוואה:

$$|p + (q-1)i| = |p + (q+3)i|$$

נעלה בריבוע:

$$p^2 + (q-1)^2 = p^2 + (q+3)^2$$
$$-2q + 1 = 6q + 9$$
$$q = -1$$

כלומר:

$$2xy = -1 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2x}$$

תשובה: $y = -\frac{1}{2x}$

סעיף א (2)

נבחר $x=1$ ונקבל:

$$y=-\frac{1}{2}$$
$$z=1-\frac{1}{2}i$$

בדיקה:

$$z^2=1-i-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-i$$
$$|z^2-i|=\left|\tfrac{3}{4}-2i\right|$$
$$|z^2+3i|=\left|\tfrac{3}{4}+2i\right|\ \checkmark$$

תשובה: למשל $z=1-\frac{1}{2}i$

סעיף ב

נכתוב את 1 בהצגה קוטבית:

$$z^6=1\,\mathrm{cis}\,0^\circ$$

לפי נוסחת דה־מואבר:

$$z=\mathrm{cis}\frac{360^\circ k}{6}=\mathrm{cis}(60^\circ k)$$
$$k=0,1,\ldots,5$$

ששת הפתרונות:

$$\mathrm{cis}\,0^\circ,\ \mathrm{cis}\,60^\circ,\ \mathrm{cis}\,120^\circ$$
$$\mathrm{cis}\,180^\circ,\ \mathrm{cis}\,240^\circ,\ \mathrm{cis}\,300^\circ$$

תשובה: $z=\mathrm{cis}(60^\circ k)$
$k=0,1,\ldots,5$

סעיף ג

לכל הפתרונות ערך מוחלט 1, ולכן המעגל החוסם את המשושה הוא מעגל היחידה:

$$x^2+y^2=1$$

נציב את המקום הגאומטרי:

$$x^2+\frac{1}{4x^2}=1$$
$$4x^4-4x^2+1=0$$
$$(2x^2-1)^2=0\ \Rightarrow\ x^2=\frac{1}{2}$$

ברביע הרביעי x חיובי ו־y שלילי:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad y=-\frac{1}{2x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(השורש הכפול מראה שהעקום משיק למעגל בנקודה זו.)

תשובה: $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

סעיף ד

הנקודה A מיוצגת על ידי:

$$z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \text{cis}(-45^\circ)$$

גם למצולע השני שישה קודקודים, והוא חסום במעגל היחידה. לכן הזווית המרכזית בין קודקודים סמוכים היא 60°, וכל קודקוד מתקבל מהקודם בסיבוב נוסף סביב הראשית:

$$\text{cis}(-45^\circ),\ \text{cis}\,15^\circ,\ \text{cis}\,75^\circ$$
$$\text{cis}\,135^\circ,\ \text{cis}\,195^\circ,\ \text{cis}\,255^\circ$$

תשובה: $\text{cis}(-45^\circ),\ \text{cis}15^\circ,\ \text{cis}75^\circ$
$\text{cis}135^\circ,\ \text{cis}195^\circ,\ \text{cis}255^\circ$

סעיף ה

כפל ב־w מכפיל את הערכים המוחלטים ב־r ומוסיף α לכל הארגומנטים.

שני המצולעים חסומים באותו מעגל, ולכן:

$$r = 1$$

הארגומנטים של קודקודי המצולע הראשון הם כפולות של 60°, ושל השני הם 15° ועוד כפולות של 60°. לכן הסיבוב חייב להיות:

$$\alpha = 15^\circ + 60^\circ k$$

בתחום הנתון יש ערך אחד בלבד:

$$\alpha = 15^\circ$$
$$w = \text{cis}\,15^\circ$$

תשובה: $w = \text{cis}\,15^\circ$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 3

3. נתונה המשוואה $z^3 = \frac{1}{z^3}$, z הוא מספר מרוכב.

נתון גם כי המספר z_0 הוא אחד מפתרונות המשוואה וכי הוא מיוצג על ידי נקודה הנמצאת ברביע הרביעי במישור גאוס.

א. מצאו את המספר המרוכב z_0 .

הנקודות A , B ו־C מיוצגות במישור גאוס על ידי המספרים המרוכבים $d \cdot z_0$, $di \cdot z_0$ ו־$d \cdot (z_0)^4$ בהתאמה, $d > 0$ הוא פרמטר.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא $5d + 6$.

ב. מצאו את הערך של d .

נגדיר: $w = \left((z_0)^2 - \frac{1}{(z_0)^2}\right)(1 + i)$.

ג. מצאו את $|w|$ ואת הארגומנט (הזווית) של w .

נתון כי המספר w^n (n הוא מספר טבעי) הוא מספר מדומה טהור, ונמצא מחוץ למעגל החוסם את המשולש ABC .

ד. מצאו את הערך המינימלי האפשרי של n .

פתרון מלא

סעיף א

$$z^3 = \frac{1}{z^3} \;\Rightarrow\; z^6 = 1$$
$$z = \operatorname{cis}(60^\circ k), \quad k = 0, \dots, 5$$

ברביע הרביעי: $k = 5$.

תשובה: $z_0 = \operatorname{cis} 300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

סעיף ב

$$A = d\operatorname{cis}(-60^\circ)$$
$$B = d\,i\,z_0 = d\operatorname{cis} 30^\circ$$
$$C = d\,z_0^4 = d\operatorname{cis}(-240^\circ) = d\operatorname{cis} 120^\circ$$

שלוש הנקודות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו d. בין A ל־C יש 180°, ולכן AC קוטר ($2d$), וב־B זווית ישרה. $\angle AOB = 90^\circ$, ולכן $OB \perp AC$ והגובה מ־B הוא d:

$$S = \frac{2d \cdot d}{2} = d^2$$
$$d^2 = 5d + 6 \;\Rightarrow\; d^2 - 5d - 6 = 0$$
$$d = 6 \quad (d > 0)$$

תשובה: $d = 6$

סעיף ג

$$z_0^2 = \operatorname{cis}(-120^\circ), \qquad \frac{1}{z_0^2} = \operatorname{cis} 120^\circ$$

$$z_0^2 - \frac{1}{z_0^2} = -2i\sin 120^\circ = -\sqrt{3}\,i$$
$$w = -\sqrt{3}\,i(1+i) = \sqrt{3} - \sqrt{3}\,i$$

תשובה: $w = \sqrt{3} - \sqrt{3}\,i = \sqrt{6}\,\mathrm{cis}(-45^\circ)$

סעיף ד

$$w^n = \left(\sqrt{6}\right)^n \mathrm{cis}(-45^\circ n)$$

מדומה טהור: $-45^\circ n = 90^\circ + 180^\circ m$, כלומר $n = 2, 6, 10, \ldots$

המעגל החוסם את המשולש הוא המעגל $|z| = 6$ (סעיף ב). מחוץ לו: $\left(\sqrt{6}\right)^n > 6$, כלומר $n > 2$.

עבור $n = 2$: $w^2 = -6i$ – על המעגל, לא מחוצה לו. עבור $n = 6$:

$$w^6 = 216\,i$$

תשובה: $n = 6$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 3

3. נתונה משוואה I: $w^6 = -27$, w הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I.

נתונה משוואה II: $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, z הוא מספר מרוכב.

ב. **(1)** היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית את הפתרונות של משוואה II.

(2) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס המייצגות את הפתרונות של משוואה II נמצאות על מעגל, ומצאו את משוואתו.

(3) הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. **(1)** מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.

פתרון מלא

סעיף א

נכתוב את -27 בהצגה קוטבית:

$$-27 = 27\operatorname{cis}180^\circ$$

לפי משפט דה־מואבר, אם $w = r\operatorname{cis}\theta$ אז $w^6 = r^6\operatorname{cis}6\theta$:

$$r^6 = 27 \;\Rightarrow\; r = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$$

$$6\theta = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$\theta = 30^\circ + 60^\circ k, \quad k = 0, \ldots, 5$$

תשובה: $w = \sqrt{3}\operatorname{cis}\theta$ **עבור** $\theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ$

סעיף ב (1)

משוואה II היא משוואה I עם $w = z + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. לכן לכל פתרון w_k של משוואה I:

$$z_k = w_k - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

נכתוב את w_k בהצגה אלגברית ונחסר:

$$w_1 = \sqrt{3}\operatorname{cis}30^\circ = \tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i \;\Rightarrow\; z_1 = \tfrac{3}{2}$$

$$w_2 = \sqrt{3}\,i \;\Rightarrow\; z_2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_3 = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i \;\Rightarrow\; z_3 = -\tfrac{3}{2}$$

$$w_4 = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i \;\Rightarrow\; z_4 = -\tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\,i$$

$$w_5 = -\sqrt{3}\,i \;\Rightarrow\; z_5 = -\tfrac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_6 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i \;\Rightarrow\; z_6 = \tfrac{3}{2} - \sqrt{3}\,i$$

תשובה: $z = \frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2} - \sqrt{3}i,\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{3}{2} - \sqrt{3}i$

סעיף ב (2)

לכל הפתרונות של משוואה I אותו ערך מוחלט, $|w_k| = \sqrt{3}$, ולכן הנקודות שלהם נמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו $\sqrt{3}$.

כל פתרון של משוואה II מתקבל מ־w_k על ידי חיסור $\frac{\sqrt{3}}{2}i$, כלומר הזזה של הנקודה ב־$\frac{\sqrt{3}}{2}$ יחידות כלפי מטה.
הזזה מעבירה מעגל למעגל באותו רדיוס, שמרכזו $\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$$

תשובה: הנקודות על המעגל $x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$ (הזזה של המעגל $|w| = \sqrt{3}$ כלפי מטה ב־$\frac{\sqrt{3}}{2}$)

סעיף ב (3)

הפתרונות $w_1, \ldots, w_6$ נמצאים על מעגל אחד, והזוויות שלהם $30^\circ, 90^\circ, \ldots, 330^\circ$ – בהפרש קבוע של 60°. לכן הם מחלקים את המעגל לשש קשתות שוות, והמיתרים בין נקודות סמוכות שווים זה לזה; גם הזוויות של המצולע שוות (כל אחת נשענת על 4 קשתות שוות). כלומר $w_1, \ldots, w_6$ הם קודקודים של משושה משוכלל.

הפתרונות של משוואה II מתקבלים מהם בהזזה אחת ($-\frac{\sqrt{3}}{2}i$). הזזה שומרת על אורכים ועל זוויות, ולכן גם $z_1, \ldots, z_6$ הם קודקודים של משושה משוכלל.

תשובה: הוכחה: w_k על מעגל אחד בהפרשי זווית של 60° – משושה משוכלל; z_k הם הזזה שלהם, ולכן גם משושה משוכלל.

סעיף ג (1)

הפתרונות הממשיים: $z_1 = \frac{3}{2}$, $z_3 = -\frac{3}{2}$. המדומים: $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_5 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.
הקודקודים: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

אלכסון אחד מונח על ציר ה־x ואחד על ציר ה־y, ולכן האלכסונים מאונכים. ציר ה־y חוצה את האלכסון שבין $\pm\frac{3}{2}$, אבל ציר ה־x אינו חוצה את האלכסון השני ($\frac{3\sqrt{3}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$).
מרובע שבו אלכסון אחד הוא האנך האמצעי של האלכסון השני הוא דלתון (ולא מעוין, כי האלכסונים אינם חוצים זה את זה).

תשובה: דלתון: האלכסונים מאונכים, וציר ה־y חוצה רק את אחד מהם.

סעיף ג (2)

שטח המשושה המשוכלל – שישה משולשים שווי צלעות שצלעם רדיוס המעגל $\sqrt{3}$. לפי נוסחת שטח משולש $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$:

$$S_{\triangle} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$S_6 = 6 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

שטח הדלתון – מחצית מכפלת האלכסונים:

$$d_1 = \tfrac{3}{2} - \left(-\tfrac{3}{2}\right) = 3$$
$$d_2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$
$$S_4 = \frac{3 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{S_6}{S_4} = \frac{9\sqrt{3}/2}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$$

תשובה: שטח המשושה : שטח הדלתון $= \frac{3}{2}$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 3

3. המספר $z = R(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. מצאו את α.

נתון: $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| - \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| + |2iz| = 8$.

ב. מצאו את R.

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו־C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו־$\frac{\bar{z}}{z}$.
קודקוד הראש A מתאים למספר $z+k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k?

(2) חשבו את שטח המרובע $ABOC$ (O הנקודה היא ראשית הצירים).

פתרון מלא

סעיף א

נכתוב $z = R\operatorname{cis}\alpha$, ואז $\bar{z} = R\operatorname{cis}(-\alpha)$:

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{R\operatorname{cis}\alpha}{R\operatorname{cis}(-\alpha)} = \operatorname{cis}2\alpha$$

$$\operatorname{cis}2\alpha = \operatorname{cis}120^\circ$$

$$2\alpha = 120^\circ + 360^\circ k$$

$$\alpha = 60^\circ + 180^\circ k$$

z ברביע השלישי, כלומר $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, ולכן $\alpha = 240^\circ$.

תשובה: $\alpha = 240^\circ$

סעיף ב

נחשב כל ערך מוחלט בנפרד ($|i| = 1$, $|z| = |\bar{z}| = R$):

$$|2iz| = 2\cdot 1\cdot R = 2R$$

$$\left|\frac{\bar{z}}{i}\right| = \frac{R}{1} = R$$

$$\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = |\operatorname{cis}120^\circ| = 1$$

נציב במשוואה:

$$2R + R - 1 = 8$$

$$3R = 9 \;\Rightarrow\; R = 3$$

תשובה: $R = 3$

סעיף ג

$z = 3\,\mathrm{cis}\,240^\circ$, ולפי דה־מואבר:

$$z^3 = 27\,\mathrm{cis}\,720^\circ = 27$$

לכן המשוואה היא $w^9 = \frac{27}{27} = 1$.

נבדוק את $w = \frac{z}{\bar{z}} = \mathrm{cis}\,120^\circ$:

$$w^9 = \mathrm{cis}\,(9 \cdot 120^\circ) = \mathrm{cis}\,1080^\circ$$
$$= \mathrm{cis}\,(3 \cdot 360^\circ) = 1 \;\checkmark$$

תשובה: הוכחה: $z^3 = 27$, ולכן המשוואה היא $w^9 = 1$, ואכן $(\mathrm{cis}\,120^\circ)^9 = 1$.

סעיף ד (1)

קודקודי הבסיס:

$$B:\ \frac{z}{\bar{z}} = \mathrm{cis}\,120^\circ = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$C:\ \frac{\bar{z}}{z} = \mathrm{cis}\,(-120^\circ) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

הבסיס BC מונח על הישר $x = -\frac{1}{2}$, והאנך האמצעי שלו הוא ציר ה־x. במשולש שווה שוקיים קודקוד הראש נמצא על האנך האמצעי של הבסיס, ולכן A על ציר ה־x – כלומר $z + k$ ממשי.

$$z = 3\,\mathrm{cis}\,240^\circ = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$k = bi$ מדומה טהור, ולכן החלק המדומה של $z + k$ הוא $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + b = 0$:

$$b = \frac{3\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

ואז A מתאים ל־$z + k = -\frac{3}{2}$.

תשובה: $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

סעיף ד (2)

הקודקודים: $A\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $O(0,0)$, $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

האלכסון AO מונח על ציר ה־x והאלכסון BC מקביל לציר ה־y, ולכן האלכסונים מאונכים זה לזה, והשטח הוא מחצית מכפלתם:

$$AO = \tfrac{3}{2}, \qquad BC = \sqrt{3}$$
$$S_{ABOC} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

תשובה: $S = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.3$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 3

3. נתונה המשוואה $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, z הוא מספר מרוכב.

z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

א. מִצאו את משוואת המעגל.

חוסמים בַּמעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1 .

ב. חַשבו את שטח הריבוע.

ג. מִצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.

מכפילים ב־ $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב־ $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 30^o) + i\sin(\alpha + 30^o))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי.

הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.

נתון: r_1 ו־ r_2 חיוביים, $r_1 \neq r_2$.

ד. מהו סוג המרובע שהתקבל? נַמקו את התשובה.

נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי $\sqrt{3}$ משטח הריבוע שחישבתם בסעיף ב.

ה. חַשבו את $r_1 \cdot r_2$.

פתרון מלא

סעיף א

נציב $z = x + yi$. אז $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ ו־$z\bar{z} = x^2 + y^2$:

$$z^2 + z\bar{z} = 2x^2 + 2xyi$$

$$z + 2\bar{z} + 9 + 7i = (3x + 9) + (7 - y)i$$

נשווה חלק ממשי וחלק מדומה:

$$2x^2 = 3x + 9$$

$$2xy = 7 - y$$

מהמשוואה הראשונה $2x^2 - 3x - 9 = 0$, כלומר $x = 3$ או $x = -1.5$.

עבור $x = 3$: $7y = 7$, כלומר $y = 1$ ו־$z = 3 + i$ (ברביע הראשון).

עבור $x = -1.5$: $-2y = 7$, כלומר $z = -1.5 - 3.5i$ (ברביע השלישי).

לכן $z_1 = 3 + i$, ו־$|z_1|^2 = 9 + 1 = 10$. משוואת המעגל:

$$x^2 + y^2 = 10$$

תשובה: $x^2 + y^2 = 10$

סעיף ב

אלכסון הריבוע החסום הוא קוטר המעגל:

$$d = 2\sqrt{10}$$

$$S = \frac{d^2}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

תשובה: $S = 20$

סעיף ג

קודקודי הריבוע מתקבלים זה מזה בסיבוב של 90° סביב הראשית, כלומר בכפל ב־i:

$$i\,z_1 = i(3+i) = -1+3i$$
$$-z_1 = -3-i$$
$$-i\,z_1 = 1-3i$$

תשובה: $-1+3i,\ \ -3-i,\ \ 1-3i$

סעיף ד

הקודקודים ברביעים הראשון והשלישי הם z_1 ו־$-z_1$, ואחרי הכפל:

$$w_1 = r_1 \operatorname{cis}\alpha \cdot z_1$$
$$w_3 = -w_1$$

הקודקודים ברביעים השני והרביעי הם iz_1 ו־$-iz_1$:

$$w_2 = r_2 \operatorname{cis}(\alpha+30^\circ) \cdot iz_1$$
$$w_4 = -w_2$$

האלכסונים w_1w_3 ו־w_2w_4 חוצים זה את זה בראשית, ולכן המרובע הוא **מקבילית**.

אורכי האלכסונים $2r_1\sqrt{10}$ ו־$2r_2\sqrt{10}$ שונים (כי $r_1 \neq r_2$), ולכן המקבילית אינה מלבן.

הזווית בין האלכסונים היא ההפרש בין הארגומנטים של w_2 ו־w_1:

$$(\alpha+30^\circ+90^\circ) - \alpha = 120^\circ$$

האלכסונים אינם מאונכים, ולכן זו גם לא מעוין.

תשובה: מקבילית (האלכסונים חוצים זה את זה, אינם שווים ואינם מאונכים)

סעיף ה

שטח מרובע לפי האלכסונים והזווית ביניהם:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2r_1\sqrt{10} \cdot 2r_2\sqrt{10} \cdot \sin 120^\circ$$
$$= 20r_1r_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,r_1r_2$$

נתון שהשטח גדול פי $\sqrt{3}$ משטח הריבוע (20):

$$10\sqrt{3}\,r_1r_2 = 20\sqrt{3}$$
$$r_1r_2 = 2$$

תשובה: $r_1 \cdot r_2 = 2$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 3

3. א. פתור את המשוואה: $(z+i)^2-2-2\sqrt{3}\,i=0$, z הוא מספר מרוכב.

נסמן את החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה ב־a_1 וב־a_2 כך ש־$a_1<a_2$.

נתונים שני מקומות גאומטריים:

I. $|z-ia_1|=\sqrt{3}$

II. $|z-ia_2|=\sqrt{3}$

ב. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.

הישר $y=x$ נמצא במישור גאוס. ישר זה חותך את המקומות הגאומטריים שסרטטת בסעיף ב בראשית הצירים ובשתי נקודות אחרות שמיוצגות על ידי שני המספרים המרוכבים w_1 ו־w_2 .

ג. פתור את המשוואה: $z^3=w_1\cdot\overline{w_1}\cdot w_2\cdot\overline{w_2}$, z הוא מספר מרוכב.

פתרון מלא

סעיף א

$$(z+i)^2=2+2\sqrt{3}\,i=4\operatorname{cis}60^\circ$$
$$z+i=\pm2\operatorname{cis}30^\circ=\pm(\sqrt{3}+i)$$
$$z_1=\sqrt{3},\qquad z_2=-\sqrt{3}-2i$$

תשובה: $z=\sqrt{3}$ **או** $z=-\sqrt{3}-2i$

סעיף ב

$a_1<a_2$, ולכן $a_1=-\sqrt{3}$, $a_2=\sqrt{3}$.

I: $|z+\sqrt{3}\,i|=\sqrt{3}$ – מעגל שמרכזו $(0,-\sqrt{3})$ ורדיוסו $\sqrt{3}$.

II: $|z-\sqrt{3}\,i|=\sqrt{3}$ – מעגל שמרכזו $(0,\sqrt{3})$ ורדיוסו $\sqrt{3}$.

שני המעגלים עוברים בראשית ומשיקים בה זה לזה.

שני המקומות הגאומטריים והישר y=x

תשובה: שני מעגלים ברדיוס $\sqrt{3}$ שמרכזיהם $(0,-\sqrt{3})$ ו־$(0,\sqrt{3})$ (ראו סקיצה).

סעיף ג

חיתוך $y=x$ עם I:

$$x^2+(x+\sqrt{3})^2=3$$
$$2x^2+2\sqrt{3}\,x=0$$

הפתרון שאינו הראשית: $x=-\sqrt{3}$, כלומר:

$$w_1=-\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i$$

חיתוך $y=x$ עם II, באותו אופן:

$$w_2=\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i$$
$$w_1\bar{w}_1=|w_1|^2=6,\qquad w_2\bar{w}_2=6$$
$$z^3=36=36\operatorname{cis}0^\circ$$

$$z = \sqrt[3]{36}\,\mathrm{cis}(120^\circ k), \quad k = 0, 1, 2$$

תשובה: $z_1 = \sqrt[3]{36}\,\mathrm{cis}\,0^\circ$

$z_2 = \sqrt[3]{36}\,\mathrm{cis}\,120^\circ$

$z_3 = \sqrt[3]{36}\,\mathrm{cis}\,240^\circ$

($\sqrt[3]{36} \approx 3.30$**)**

בגרות חורף תשפ״ב (2022) • שאלה 3

3. נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$z_1 = (2a^2 + 5a + 4) + (2a^2 + 3a + 2)i$$

$$z_2 = (a^2 + 8a + 8) + (2 - a^2 + 2a)i$$

a הוא פרמטר ממשי.

א. מצא את הערך של a שבעבורו המספרים z_1 ו־z_2 צמודים זה לזה.

הצב את הערך של a שמצאת, וענה על הסעיפים ב–ג.

נתונים המספרים: $w_1 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$, $w_2 = \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$. n הוא מספר טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי:

(1) המספר w_1 הוא מספר ממשי.

(2) המספר w_2 הוא מספר מדומה טהור.

ג. נתונה המשוואה: $|z - p| = m$. p ו־m הם פרמטרים ממשיים, z הוא מספר מרוכב.

מה הם הערכים של p ו־m שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים w_1 ו־w_2 לכל n טבעי? נמק.

פתרון מלא

סעיף א

מספרים צמודים: החלקים הממשיים שווים והחלקים המדומים נגדיים.

$$2a^2 + 5a + 4 = a^2 + 8a + 8$$
$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

כלומר $a = 4$ או $a = -1$.

$$2a^2 + 3a + 2 = -(2 - a^2 + 2a)$$
$$a^2 + 5a + 4 = 0$$

כלומר $a = -1$ או $a = -4$.

הערך המשותף: $a = -1$. אז $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$.

תשובה: $a = -1$ **(**$z_1 = 1 + i$**,** $z_2 = 1 - i$**)**

סעיף ב (1)

נעבור להצגה קוטבית: $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, ו־$z_1$ ברביע הראשון עם $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$, ולכן $\theta =$ $45°$:

$$\frac{z_1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \operatorname{cis} 45°$$

לפי נוסחת דה־מואבר:

$$w_1 = \operatorname{cis}(45° \cdot 4n) = \operatorname{cis}(180°n)$$
$$= \cos(180°n) = (-1)^n$$

החלק המדומה $\sin(180^\circ n)=0$, ולכן w_1 ממשי לכל n טבעי.

תשובה: $w_1=(-1)^n$ **– ממשי.**

סעיף ב (2)

$z_2=1-i$ ברביע הרביעי עם $\tan\theta=-1$, ולכן $|z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$:

$$\frac{z_2}{\sqrt{2}}=\operatorname{cis}(-45^\circ)$$

לפי נוסחת דה־מואבר:

$$w_2=\operatorname{cis}\left(-45^\circ(4n+2)\right)$$
$$=\operatorname{cis}(-180^\circ n-90^\circ)$$

$\cos(-180^\circ n-90^\circ)=0$ לכל n, ולכן w_2 מדומה טהור: $w_2=(-1)^{n+1}i$.

תשובה: $w_2=(-1)^{n+1}i$ **– מדומה טהור.**

סעיף ג

כאשר n עובר על המספרים הטבעיים, w_1 מקבל את הערכים 1 ו־-1, ו־w_2 את הערכים i ו־$-i$.

המשוואה $|z-p|=m$ מתארת מעגל שמרכזו $(p,0)$ ורדיוסו $m>0$. המרכז שווה מרחק מ־1 ומ־-1, ולכן $p=0$, והרדיוס:

$$m=|1-0|=1$$

בדיקה: גם $|\pm i|=1$ ✓.

תשובה: $p=0,\ m=1$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.