מספרים מרוכבים – כל השאלות עם תשובות סופיות

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י״ב (שאלון 572) • 17 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 3

3. נתונים שלושה מספרים מרוכבים:

$z_1 = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, $z_2 = \frac{1}{r} \cdot (\cos(\alpha + 90^o) + i \cdot \sin(\alpha + 90^o))$, $w = z_1 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_2}$.

$r > 0$, $0^o < \alpha < 90^o$.

הנקודה A מייצגת את המספר w במישור גאוס. נתון כי שיעור ה־ x של הנקודה A הוא -1 .

א. מצאו את הערך של α .

נתון כי הנקודה A נמצאת על הישר $y = -1$.

ב. מצאו את הערך של r .

נתונה המשוואה $z^4 = 128 \cdot (z_1 \cdot w)^2$.

z הוא משתנה מרוכב.

ג. מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

כל אחת מן הנקודות B ו־ C מייצגת פתרון אחד מבין הפתרונות שמצאתם בסעיף ג.

הנקודה B נמצאת ברביע הראשון והנקודה C נמצאת ברביע השני.

המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z| = b$ חותך את החלק החיובי של ציר ה־ y בנקודה K .

b הוא מספר ממשי חיובי.

נתון כי שטח המרובע $CKBO$ הוא $7\sqrt{2}$.

ד. מצאו את הערך של b .

תשובות סופיות

סעיף א

$$\alpha = 45^\circ$$

סעיף ב

$$r = 1$$

סעיף ג

$$z = 4\,\mathrm{cis}(45^\circ + 90^\circ k),\ k = 0, 1, 2, 3: \pm 2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}\,i$$

סעיף ד

$$b = 3.5$$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 3

3. נתונה המשוואה $z^3 = -64$.

z הוא משתנה מרוכב.

א. מצאו את כל פתרונות המשוואה.

נתונים שני מספרים מרוכבים:

$w_1 = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, $w_2 = 2r \cdot (\cos 4\alpha + i \cdot \sin 4\alpha)$,

$50^o < \alpha < 130^o$.

שתי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים w_1 ו־ w_2 נמצאות על ישר אחד, שעובר דרך ראשית הצירים O במישור גאוס.

ב. מצאו את שני הערכים האפשריים של α.

נתון כי w_1 הוא אחד מן הפתרונות שמצאתם בסעיף א.

ג. מצאו את הערך של α ואת הערך של r.

נתונים שני מספרים מרוכבים נוספים: $w_3 = 4 \cdot i$, $w_4 = \frac{8}{i}$.

$ABCD$ הוא מרובע קמור. הקודקוד A מיוצג על ידי המספר w_1, הקודקוד B מיוצג על ידי המספר w_3,

הקודקוד C מיוצג על ידי המספר w_2, והקודקוד D מיוצג על ידי המספר w_4.

ד. הראו כי שטח המרובע $ABCD$ הוא 36.

u הוא מספר מרוכב. הנקודה E, שמיוצגת על ידי המספר u, נמצאת ברביע הראשון על חוצה הזווית BOA.

נתון כי $\bar{u} + \frac{1}{u} = 5.2 \cdot (\cos 285^o + i \cdot \sin 285^o)$, $|u| > 1$.

ה. מצאו את המספר המרוכב u.

תשובות סופיות

סעיף א

$z_1 = 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

$z_2 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = -4$

$z_3 = 4(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$

סעיף ב

$\alpha = 60^\circ$ או $\alpha = 120^\circ$

סעיף ג

$\alpha = 60^\circ,\ r = 4$

סעיף ד

הוכח: שטח המרובע $ABCD$ הוא 36.

סעיף ה

$u = 5(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 3

3. א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z - 2i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 2$ הוא פרבולה, ומצאו את משוואתה.

נתון מספר מרוכב $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $0^o < \theta < 90^o$, $r > 0$.

נתון מצולע קמור I , שקודקודיו מיוצגים על ידי פתרונות המשוואה $z^4 = \frac{1}{r^4} \cdot (\cos(4\theta) + i\sin(4\theta))$, z הוא משתנה מרוכב.

ב. הביעו באמצעות r ו־ θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I .

נתון מצולע II , שקודקודיו מיוצגים על ידי המספרים $-\frac{1}{w}$, $\frac{1}{w}$, $-w$, w .

ג. הביעו באמצעות r ו־ θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע II .

נתון כי מצולע II הוא מעוין.

ד. מצאו את הערך של θ .

נתון כי הנקודה המייצגת את w נמצאת על המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ה. מצאו את היחס בין שטח מצולע II ובין שטח מצולע I .

תשובות סופיות

סעיף א

פרבולה: $x^2 = 8y$, כלומר $y = \frac{x^2}{8}$

סעיף ב

$\frac{1}{r}\,\mathrm{cis}(\theta + 90^\circ k),\quad k = 0, 1, 2, 3$

סעיף ג

$r\,\mathrm{cis}\,\theta$, $\frac{1}{r}\,\mathrm{cis}(\theta + 180^\circ)$, $\frac{1}{r}\,\mathrm{cis}(-\theta)$, $\frac{1}{r}\,\mathrm{cis}(180^\circ - \theta)$

סעיף ד

$\theta = 45^\circ$

סעיף ה

$S_{II} : S_I = 128$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 3

3. נתונים שני מספרים מרוכבים z_1 ו־ z_2 שמכפלתם היא $-19+4i$.

$z_1 = 2+3i$.

א. מצאו את המספר z_2.

נתונה המשוואה $w^3 = z_1 + z_2$, w הוא משתנה מרוכב.

ב. מצאו את פתרונות המשוואה.

נתון מספר מרוכב $z = 2(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$, $0^o \le \theta < 360^o$.

נתון כי המספרים z ו־ z^3 נמצאים על ישר אחד שעובר בראשית הצירים.

ג. מצאו את ארבע האפשרויות של המספר z.

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב וארבעת המספרים שמצאתם בסעיף ג, מייצגים את כל הקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ד. **(1)** סרטטו את המצולע במערכת צירים.

(2) חשבו את השטח של המצולע.

נתון מספר מרוכב $3(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $0^o \le \alpha < 360^o$.

מכפילים כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע במספר מרוכב זה, כך שנוצר מצולע חדש.

ה. מצאו פי כמה גדול שטח המצולע החדש משטח המצולע שמצאתם בסעיף ד.

תשובות סופיות

סעיף א

$z_2 = -2 + 5i$

סעיף ב

$2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$
$2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$
$2(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)$

סעיף ג

$z = 2,\ 2i,\ -2,\ -2i$

סעיף ד (1)

משושה קמור שקודקודיו על מעגל ברדיוס 2:
$2,\ \sqrt{3}+i,\ 2i,\ -\sqrt{3}+i,\ -2,\ -2i$

סעיף ד (2)

$S = 6 + 2\sqrt{3} \approx 9.46$

סעיף ה

פי 9

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 3

3. א. הביעו באמצעות x ו־y את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z| = |z - (2 + 2i)|$.

z הוא משתנה מרוכב.

נתונה המשוואה $z^2 - z(2 + 2i) + 4i = 0$.

A ו־B הן נקודות המיוצגות על ידי שני פתרונות המשוואה.

ב. הראו כי הנקודות A ו־B נמצאות על המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

הנקודות C ו־D נמצאות על הצירים כך ש־$ABCD$ הוא ריבוע.

סובבו את הריבוע $ABCD$ סביב ראשית הצירים נגד כיוון השעון בזווית α $(0^o < \alpha < 90^o)$.

כל שמונה הנקודות (הנקודות A, B, C ו־D וארבע הנקודות שהתקבלו אחרי הסיבוב) מיוצגות על ידי פתרונות של המשוואה $z^n = b$, שבה n הוא מספר טבעי ו־b הוא מספר ממשי.

ג. **(1)** מצאו את הערך של b ואת הערך של α בעבור $n = 8$.

(2) מצאו ערך אפשרי של n בעבור $\alpha = 15^o$, ומצאו את הערך של b המתאים לו.

תשובות סופיות

סעיף א

$y = -x + 2$

סעיף ב

הפתרונות הם 2 ו־$2i$, והנקודות $(2, 0)$ ו־$(0, 2)$ נמצאות על הישר $y = -x + 2$.

סעיף ג (1)

$b = 256$, $\alpha = 45^\circ$

סעיף ג (2)

למשל $n = 24$ ו־$b = 2^{24}$ (מתאים כל n שהוא כפולה של 24, עם $b = 2^n$).

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 3

3. נתון המספר המרוכב $w = r(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$, $r > 0$, $90^o < \theta < 180^o$.

א. הביעו באמצעות r ו־ θ הצגה קוטבית של המספר $\frac{1}{w}$.

הנקודה A במישור גאוס מייצגת את המספר w , והנקודה B מייצגת את המספר $\frac{1}{w}$.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

נתון כי שטח המשולש AOB הוא $\frac{\sqrt{2}}{4}$ והזווית AOB היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של θ .

נתונות שתי משוואות: I. $z^8 = w^8$

II. $z^8 = (w\cdot\overline{w})^4$

z הוא מספר מרוכב.

נתון מצולע קמור שקודקודיו הם כל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה I וכל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה II .

ג. **(1)** מצאו כמה קודקודים יש למצולע.

(2) האם כל קודקודי המצולע נמצאים על מעגל אחד שמרכזו בראשית הצירים? נמקו את תשובתכם.

נתון כי שטח המצולע הוא 62 .

ד. מצאו את הערך של r .

תשובות סופיות

סעיף א

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$$

סעיף ב

$$\theta = 157.5^\circ$$

סעיף ג (1)

16 קודקודים

סעיף ג (2)

כן – כולם במרחק r מהראשית.

סעיף ד

$$r \approx 4.5$$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 3

3. א. (1) מצאו את פתרונות המשוואה: $z^6 + 64i = 0$ (z הוא מספר מרוכב).

(2) מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה: $\frac{z^6 + 64i}{z^2 - 4i} = 0$ (z הוא מספר מרוכב).

הפתרונות שמצאתם בתת־סעיף א(2) מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ב. מצאו את שטח המרובע.

מסובבים את המרובע (סביב הראשית) בזווית α נגד כיוון השעון, $0^o < \alpha < 90^o$.

ג. מהו הערך של מכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע בעבור $\alpha = 45^o$? נמקו את תשובתכם.

ד. (1) מצאו את שני הערכים של α כך שמכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע לאחר הסיבוב תהיה מספר מדומה טהור.

(2) מהו הערך של המכפלה בעבור כל אחד מן הערכים של α שמצאתם?

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$$z = 2\,\mathrm{cis}(45^\circ + 60^\circ k),\quad k = 0, \ldots, 5$$

סעיף א (2)

$$2\,\mathrm{cis}105^\circ,\quad 2\,\mathrm{cis}165^\circ$$
$$2\,\mathrm{cis}285^\circ,\quad 2\,\mathrm{cis}345^\circ$$

סעיף ב

$$S = 4\sqrt{3} \approx 6.93$$

סעיף ג

$$16$$

סעיף ד (1)

$$\alpha = 22.5^\circ \text{ או } \alpha = 67.5^\circ$$

סעיף ד (2)

$$\alpha = 22.5^\circ :\ \ -16i$$
$$\alpha = 67.5^\circ :\ \ 16i$$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 3

3. במעוין $ABCD$ הקודקוד A נמצא ברביע הראשון, והקודקוד B נמצא ברביע השני במישור גאוס.

אלכסוני המעוין נפגשים בראשית הצירים.

המספר המרוכב z מייצג את הקודקוד A.

נתון: $BD = 2AC$.

א. הביעו באמצעות z את המספרים שמייצגים את הקודקודים C, B ו־D.

נסמן: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

ב. ענו על התת־סעיפים (1) ו־(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות r ו־θ אם יש צורך.

(1) כתבו הצגה קוטבית של ארבעת המספרים ההופכיים $(\dots, \frac{1}{z})$ למספרים המייצגים את קודקודי המעוין.

(2) ארבעת המספרים שמצאתם בתת־סעיף ב(1) מייצגים קודקודים של מרובע.

מצאו את שטח המרובע שנוצר על ידי קודקודים אלה.

ג. נתונה המשוואה: $w^{11} = \overline{w}$, w הוא מספר מרוכב השונה מ־0.

מצאו את סכום 12 הפתרונות של המשוואה.

פתרונות המשוואה שבסעיף ג מייצגים קודקודים של מצולע ששטחו שווה לשטח המרובע שמצאתם בתת־סעיף ב(2).

ד. מצאו את הערך של r.

תשובות סופיות

סעיף א

$$z_B = 2iz$$
$$z_C = -z$$
$$z_D = -2iz$$

סעיף ב (1)

$$\frac{1}{z_A} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta)$$
$$\frac{1}{z_B} = \frac{1}{2r}\operatorname{cis}(-\theta - 90^\circ)$$
$$\frac{1}{z_C} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta - 180^\circ)$$
$$\frac{1}{z_D} = \frac{1}{2r}\operatorname{cis}(-\theta - 270^\circ)$$

סעיף ב (2)

$$\frac{1}{r^2}$$

סעיף ג

$$0$$

סעיף ד

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 3

3. $z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו־ y הם מספרים ממשיים).

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x , y) במישור גאוס המקיימות:

$|6 - \bar{z} - 8i|^2 - |10i| = |9 + 12i|$ הוא מעגל.

הנקודה M היא מרכז המעגל המתואר בסעיף א.

המספרים המרוכבים z_A ו־ z_M מייצגים את הנקודות A ו־ M, בהתאמה.

נתון: למספרים z_A ו־ z_M יש אותו ארגומנט (זווית).

$|z_M| = 2|z_A|$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A .

נתונה סדרה הנדסית $z_1 , z_2 , z_3 , \ldots$.

האיבר הראשון בסדרה מייצג את הנקודה A, והאיבר החמישי בסדרה מייצג את הנקודה M .

ג. מצאו את מנת הסדרה (כל האפשרויות).

ד. חשבו את הסכום: $z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + \ldots + z_{10} \cdot \overline{z_{10}}$.

תשובות סופיות

סעיף א

מעגל:

$(x-6)^2 + (y-8)^2 = 25$

סעיף ב

$A(3,\ 4)$

סעיף ג

$q = \pm\sqrt[4]{2}$

$q = \pm\sqrt[4]{2}\,i$

סעיף ד

$775(\sqrt{2}+1)$

≈ 1871.02

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 3

3. נתונה סדרה הנדסית $z_1, z_2, z_3, \ldots$ שאיבריה הם מספרים מרוכבים ומנתה היא q.

z_1 נמצא ברביע הראשון.

נתון: $(z_1)^3 = z_3$

$$-2z_1 = \overline{z_3}$$

א. הוכיחו כי $q = -z_1$ או $q = z_1$.

ב. מצאו את z_1.

ענו על הסעיפים ג–ד עבור: $q = z_1$.

z_{4n} ו־ z_{4n-2} הם שני איברים בסדרה ההנדסית הנתונה (n הוא מספר טבעי).

ג. קבעו בעבור כל אחד מן האיברים אם הוא מדומה או ממשי. נמקו את קביעותיכם.

ד. מצאו את ערך הסכום: $\frac{z_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_3}{(\sqrt{2})^3} + \ldots + \frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}}$.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכח: $q^2 = z_1^2$

סעיף ב

$z_1 = 1 + i$

סעיף ג

z_{4n} ממשי

z_{4n-2} מדומה

סעיף ד

0

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 3

3. $z = x + iy$ הוא מספר מרוכב (x ו־y הם מספרים ממשיים).

א. **(1)** הראו כי משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס המקיימות: $|z^2 - i| = |z^2 + 3i|$,
היא $y = -\frac{1}{2x}$.

(2) תנו דוגמה למספר מרוכב הנמצא על המקום הגאומטרי הזה.

ב. פתרו את המשוואה: $z^6 = 1$.

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף **ב** מייצגים את קודקודיו של מצולע I .

המקום הגאומטרי שמצוין בתת־סעיף **א (1)** חותך ברביע הרביעי את המעגל החוסם את מצולע I בנקודה A .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A .

הנקודה A היא קודקוד של מצולע משוכלל אחר החסום באותו מעגל, מצולע II .

נתון: מספר הקודקודים של מצולע II שווה למספר הקודקודים של מצולע I .

ד. מצאו את המספרים המרוכבים המייצגים את כל הקודקודים של מצולע II .

נסמן: $w = r \cdot \text{cis}\,\alpha$, $0 < \alpha < 60^\circ$.

כופלים את כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I במספר w , כך שקודקודי מצולע I מתלכדים עם קודקודי מצולע II .

ה. מצאו את w .

תשובות סופיות

סעיף א (1)
$y = -\frac{1}{2x}$

סעיף א (2)
למשל $z = 1 - \frac{1}{2}i$

סעיף ב
$z = \text{cis}(60^\circ k)$
$k = 0, 1, \ldots, 5$

סעיף ג
$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

סעיף ד
$\text{cis}(-45^\circ),\ \text{cis}15^\circ,\ \text{cis}75^\circ$
$\text{cis}135^\circ,\ \text{cis}195^\circ,\ \text{cis}255^\circ$

סעיף ה
$w = \text{cis}\,15^\circ$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 3

3. נתונה המשוואה $z^3 = \frac{1}{z^3}$, z הוא מספר מרוכב.

נתון גם כי המספר z_0 הוא אחד מפתרונות המשוואה וכי הוא מיוצג על ידי נקודה הנמצאת ברביע הרביעי במישור גאוס.

א. מצאו את המספר המרוכב z_0 .

הנקודות A , B ו־C מיוצגות במישור גאוס על ידי המספרים המרוכבים $d \cdot z_0$, $di \cdot z_0$ ו־ $d \cdot (z_0)^4$ בהתאמה, $d > 0$ הוא פרמטר.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא $5d + 6$.

ב. מצאו את הערך של d .

נגדיר: $w = \left((z_0)^2 - \frac{1}{(z_0)^2}\right)(1 + i)$.

ג. מצאו את $|w|$ ואת הארגומנט (הזווית) של w .

נתון כי המספר w^n (n הוא מספר טבעי) הוא מספר מדומה טהור, ונמצא מחוץ למעגל החוסם את המשולש ABC .

ד. מצאו את הערך המינימלי האפשרי של n .

תשובות סופיות

סעיף א

$$z_0 = \operatorname{cis} 300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

סעיף ב

$$d = 6$$

סעיף ג

$$w = \sqrt{3} - \sqrt{3}\,i = \sqrt{6}\operatorname{cis}(-45^\circ)$$

סעיף ד

$$n = 6$$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 3

3. נתונה משוואה I: $w^6 = -27$, w הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I.

נתונה משוואה II: $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, z הוא מספר מרוכב.

ב. **(1)** היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית את הפתרונות של משוואה II.

(2) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס המייצגות את הפתרונות של משוואה II נמצאות על מעגל, ומצאו את משוואתו.

(3) הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. **(1)** מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.

תשובות סופיות

סעיף א

$w = \sqrt{3}\,\mathrm{cis}\,\theta$ עבור $\theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ$

סעיף ב (1)

$z = \frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2} - \sqrt{3}i,\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{3}{2} - \sqrt{3}i$

סעיף ב (2)

הנקודות על המעגל $x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$ (הזזה של המעגל $|w| = \sqrt{3}$ כלפי מטה ב־$\frac{\sqrt{3}}{2}$)

סעיף ב (3)

הוכחה: w_k על מעגל אחד בהפרשי זווית של 60° – משושה משוכלל; z_k הם הזזה שלהם, ולכן גם משושה משוכלל.

סעיף ג (1)

דלתון: האלכסונים מאונכים, וציר ה־y חוצה רק את אחד מהם.

סעיף ג (2)

שטח המשושה : שטח הדלתון $= \frac{3}{2}$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 3

3. המספר $z = R(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. מצאו את α.

נתון: $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| - \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| + |2iz| = 8$.

ב. מצאו את R.

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו־C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו־$\frac{\bar{z}}{z}$.
קודקוד הראש A מתאים למספר $z+k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k?

(2) חשבו את שטח המרובע $ABOC$ (הנקודה O היא ראשית הצירים).

תשובות סופיות

סעיף א

$$\alpha = 240^\circ$$

סעיף ב

$$R = 3$$

סעיף ג

הוכחה: $z^3 = 27$, ולכן המשוואה היא $w^9 = 1$, ואכן $(\text{cis}\,120^\circ)^9 = 1$.

סעיף ד (1)

$$k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

סעיף ד (2)

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.3$$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 3

3. נתונה המשוואה $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, z הוא מספר מרוכב.

z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

א. מִצאו את משוואת המעגל.

חוסמים בַּמעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1 .

ב. חַשבו את שטח הריבוע.

ג. מִצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.

מכפילים ב־ $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב־ $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 30^o) + i\sin(\alpha + 30^o))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי.

הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.

נתון: r_1 ו־ r_2 חיוביים, $r_1 \neq r_2$.

ד. מהו סוג המרובע שהתקבל? נַמקו את התשובה.

נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי $\sqrt{3}$ משטח הריבוע שחישבתם בסעיף ב.

ה. חַשבו את $r_1 \cdot r_2$.

תשובות סופיות

סעיף א

$$x^2 + y^2 = 10$$

סעיף ב

$$S = 20$$

סעיף ג

$$-1 + 3i,\ \ -3 - i,\ \ 1 - 3i$$

סעיף ד

מקבילית (האלכסונים חוצים זה את זה, אינם שווים ואינם מאונכים)

סעיף ה

$$r_1 \cdot r_2 = 2$$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 3

3. א. פתור את המשוואה: $(z+i)^2 - 2 - 2\sqrt{3}\,i = 0$, z הוא מספר מרוכב.

נסמן את החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה ב־a_1 וב־a_2 כך ש־$a_1 < a_2$.

נתונים שני מקומות גאומטריים:

I. $|z - ia_1| = \sqrt{3}$

II. $|z - ia_2| = \sqrt{3}$

ב. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.

הישר $y = x$ נמצא במישור גאוס. ישר זה חותך את המקומות הגאומטריים שסרטטת בסעיף ב בראשית הצירים ובשתי נקודות אחרות שמיוצגות על ידי שני המספרים המרוכבים w_1 ו־w_2 .

ג. פתור את המשוואה: $z^3 = w_1 \cdot \overline{w_1} \cdot w_2 \cdot \overline{w_2}$, z הוא מספר מרוכב.

תשובות סופיות

סעיף א

$z = \sqrt{3}$ או $z = -\sqrt{3} - 2i$

סעיף ב

שני מעגלים ברדיוס $\sqrt{3}$ שמרכזיהם $(0, -\sqrt{3})$ ו־$(0, \sqrt{3})$ (ראו סקיצה).

סעיף ג

$z_1 = \sqrt[3]{36}\,\mathrm{cis}\,0^\circ$

$z_2 = \sqrt[3]{36}\,\mathrm{cis}\,120^\circ$

$z_3 = \sqrt[3]{36}\,\mathrm{cis}\,240^\circ$

$(\sqrt[3]{36} \approx 3.30)$

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 3

3. נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$z_1 = (2a^2 + 5a + 4) + (2a^2 + 3a + 2)i$$

$$z_2 = (a^2 + 8a + 8) + (2 - a^2 + 2a)i$$

a הוא פרמטר ממשי.

א. מצא את הערך של a שבעבורו המספרים z_1 ו־z_2 צמודים זה לזה.

הצב את הערך של a שמצאת, וענה על הסעיפים ב–ג.

נתונים המספרים: $w_1 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$, $w_2 = \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$. n הוא מספר טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי:

(1) המספר w_1 הוא מספר ממשי.

(2) המספר w_2 הוא מספר מדומה טהור.

ג. נתונה המשוואה: $|z - p| = m$. p ו־m הם פרמטרים ממשיים, z הוא מספר מרוכב.

מה הם הערכים של p ו־m שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים w_1 ו־w_2 לכל n טבעי? נמק.

תשובות סופיות

סעיף א

$a = -1$ ($z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$)

סעיף ב (1)

$w_1 = (-1)^n$ – ממשי.

סעיף ב (2)

$w_2 = (-1)^{n+1}i$ – מדומה טהור.

סעיף ג

$p = 0,\ m = 1$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.