גאומטרייה אנליטית – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י״ב (שאלון 572) • 17 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 1

1. נתון הישר $y = x$ ונתונה הפרבולה $y^2 = 2px$.

p הוא פרמטר חיובי.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון, והיא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר.

א. הביעו באמצעות p את שיעורי הנקודה A.

נסמן ב־ℓ את המשיק לפרבולה בנקודה A.

הנקודה F היא מוקד הפרבולה. מעגל I שמרכזו בנקודה F משיק לישר ℓ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות p את משוואת מעגל I.

ג. הראו כי הנקודה B נמצאת על ציר ה־y.

נתון: $AB = 4\sqrt{5}$.

ד. מצאו את הערך של p.

ה. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים <u>מבפנים</u> למעגל I ואורך הרדיוס שלהם הוא $2\sqrt{5} - 3$.

פתרון מלא

סעיף א

נמצא את נקודות החיתוך של הישר $y = x$ עם הפרבולה $y^2 = 2px$. נציב $y = x$:

$$x^2 = 2px$$

$$x(x - 2p) = 0$$

$x = 0$ היא ראשית הצירים, ולכן ב־A מתקיים $x = 2p$, ואז $y = 2p$. ($p > 0$, ולכן A ברביע הראשון.)

תשובה: $A(2p,\ 2p)$

סעיף ב

המשיק ℓ: לפי הנוסחאון, משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה (x_1, y_1) שעליה היא $yy_1 = p(x + x_1)$. נציב $A(2p, 2p)$:

$$2p \cdot y = p(x + 2p)$$

$$y = \frac{1}{2}x + p$$

או בצורה כללית: $x - 2y + 2p = 0$.

המוקד: $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$.

הרדיוס: המעגל משיק ל־ℓ, ולכן הרדיוס שווה למרחק של F מהישר ℓ:

$$R = \frac{\left|\frac{p}{2} - 2 \cdot 0 + 2p\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$R = \frac{2.5p}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}p$$
$$R^2 = \frac{5}{4}p^2$$

משוואת המעגל:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}p^2$$

תשובה: $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}p^2$

סעיף ג

הרדיוס FB מאונך למשיק ℓ בנקודת ההשקה B. שיפוע ℓ הוא $\frac{1}{2}$, ולכן שיפוע FB הוא -2. הישר דרך $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ בשיפוע -2:

$$y = -2\left(x - \frac{p}{2}\right) = -2x + p$$

נמצא את B – חיתוך עם ℓ:

$$-2x + p = \frac{1}{2}x + p$$
$$-2.5x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

ולכן $B(0,\ p)$, כלומר B נמצאת על ציר ה־y.

תשובה: $B(0,\ p)$ **– על ציר ה־**y**.**

סעיף ד

$A(2p, 2p)$, $B(0, p)$. לפי נוסחת המרחק בין שתי נקודות:

$$AB = \sqrt{(2p-0)^2 + (2p-p)^2}$$
$$AB = \sqrt{5p^2} = \sqrt{5}\,p$$

($p > 0$). נשווה לנתון:

$$\sqrt{5}\,p = 4\sqrt{5} \;\Rightarrow\; p = 4$$

סקיצה: הפרבולה, המשיק בנקודה A(8,8), המעגל שמרכזו F(2,0) המשיק בנקודה B(0,4)

תשובה: $p = 4$

סעיף ה

עבור $p = 4$: מרכז המעגל I הוא $F(2, 0)$ והרדיוס שלו:

$$R = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{5} \approx 4.47$$

הרדיוס של המעגלים המשיקים הוא $r = 2\sqrt{5} - 3$, והוא קטן מ־R. כששני מעגלים משיקים מבפנים, המרחק בין המרכזים שווה להפרש הרדיוסים:

$$d = R - r = 2\sqrt{5} - (2\sqrt{5} - 3) = 3$$

לכן כל מרכז נמצא במרחק 3 מ־$F(2, 0)$, והמקום הגאומטרי הוא מעגל שמרכזו F ורדיוסו 3:

$$(x-2)^2 + y^2 = 9$$

תשובה: $(x-2)^2 + y^2 = 9$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 1

1. נתונה פרבולה שמשוואתה $y^2 = 54x$.

בנקודה A, שנמצאת על הפרבולה, מעבירים משיק לפרבולה ששיפועו $\frac{3}{4}$.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו בנקודה M.

נתון כי המשיק לפרבולה הוא גם משיק למעגל בנקודה A,

וכי ציר ה־y משיק למעגל כך ששיעור ה־x של הנקודה M קטן משיעור ה־x של הנקודה A.

ב. **(1)** מצאו את משוואת הישר AM.

(2) מצאו את משוואת המעגל.

נקודה B היא נקודה כלשהי על המעגל. דרך נקודה B מעבירים משיק למעגל.

נקודה P נמצאת על המשיק כך ש־$BP = 36$.

ג. **(1)** מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה.

(2) האם על המקום הגאומטרי שמצאתם יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא 80? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

הפרבולה $y^2 = 54x$ היא מהצורה $y^2 = 2px$, ולכן $2p = 54$, כלומר $p = 27$.

לפי הנוסחאון, משוואת המשיק לפרבולה בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה:

$$y \cdot y_1 = p(x + x_1)$$

$$y = \frac{27}{y_1}x + \frac{27x_1}{y_1}$$

שיפוע המשיק הוא $\frac{27}{y_1}$, והוא נתון $\frac{3}{4}$:

$$\frac{27}{y_1} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; y_1 = 36$$

הנקודה על הפרבולה:

$$36^2 = 54x_1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1296}{54} = 24$$

תשובה: $A(24,\ 36)$

סעיף ב (1)

הרדיוס MA מאונך למשיק בנקודת ההשקה A. שיפוע המשיק $\frac{3}{4}$, ולכן שיפוע הישר AM:

$$m_{AM} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

משוואת הישר דרך $A(24, 36)$:

$$y - 36 = -\frac{4}{3}(x - 24)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 68$$

תשובה: $y = -\frac{4}{3}x + 68$

סעיף ב (2)

המרכז M על הישר AM, ולכן $M\left(m,\ -\frac{4}{3}m + 68\right)$.

המעגל משיק לציר ה־y, ולכן הרדיוס הוא המרחק של M מציר ה־y: $R = |m|$. נתון ששיעור ה־x של M קטן משיעור ה־x של A, כלומר $m < 24$.

הרדיוס הוא גם MA:

$$MA^2 = (24 - m)^2 + \left(36 + \tfrac{4}{3}m - 68\right)^2$$
$$= (24 - m)^2 + \tfrac{16}{9}(m - 24)^2$$
$$= \tfrac{25}{9}(24 - m)^2$$
$$MA = \tfrac{5}{3}(24 - m)$$

אם $m > 0$:

$$\tfrac{5}{3}(24 - m) = m$$
$$40 = \tfrac{8}{3}m \ \Rightarrow\ m = 15$$

אם $m < 0$:

$$\tfrac{5}{3}(24 - m) = -m \ \Rightarrow\ m = 60$$

וזה סותר את התנאי $m < 0$.

לכן $m = 15$, $R = 15$, והמרכז:

$$M\left(15,\ -\tfrac{4}{3}\cdot 15 + 68\right) = M(15, 48)$$
$$(x - 15)^2 + (y - 48)^2 = 225$$

סקיצה: הפרבולה, המעגל שמרכזו M(15,48) משיק לציר y ולפרבולה בנקודה A(24,36)

תשובה: $(x - 15)^2 + (y - 48)^2 = 225$

סעיף ג (1)

נסמן $P(x, y)$, והמשיק למעגל בנקודה B עובר דרך P. הרדיוס MB מאונך למשיק, ולכן המשולש MBP ישר זווית ב־B. לפי פיתגורס:

$$MP^2 = MB^2 + BP^2 = 15^2 + 36^2$$
$$MP^2 = 225 + 1296 = 1521$$

כלומר כל נקודה P נמצאת במרחק $\sqrt{1521} = 39$ מ־M. המקום הגאומטרי הוא מעגל שמרכזו M ורדיוסו 39:

$$(x - 15)^2 + (y - 48)^2 = 1521$$

תשובה: $(x - 15)^2 + (y - 48)^2 = 1521$

סעיף ג (2)

שתי הנקודות נמצאות על המקום הגאומטרי מסעיף ג (1) – מעגל שרדיוסו 39.

המרחק הגדול ביותר בין שתי נקודות על מעגל הוא הקוטר:

$$2 \cdot 39 = 78 < 80$$

לכן לא ייתכן שהמרחק בין שתי נקודות כאלה הוא 80.

תשובה: לא. הקוטר של המקום הגאומטרי הוא 78, וזה פחות מ־80.

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 1

1. נתונה אליפסה שמשוואתה קנונית. הנקודה $\mathrm{A}(1\ ,\ 3)$ נמצאת על האליפסה.

שיעורי המוקד הימני של האליפסה הם $(\sqrt{6.4}\ ,\ 0)$.

א. מצאו את משוואת האליפסה.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה־ x.

דרך הנקודה A העבירו ישר העובר דרך ראשית הצירים, הנקודה O.

הנקודה C היא נקודה כלשהי על הישר AO. הנקודה P היא אמצע הקטע BC.

ב. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P.

ג. מצאו את משוואת המעגל המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם, ומשיק לישר AO בנקודה O.

פתרון מלא

סעיף א

משוואת אליפסה קנונית: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. המוקד הימני הוא $(c,0)$, ולכן $c^2=6.4$, ובאליפסה שמוקדיה על ציר ה־x:

$$a^2-b^2=c^2=6.4$$

הנקודה $A(1,3)$ על האליפסה:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$$

נציב $a^2=b^2+6.4$:

$$\frac{1}{b^2+6.4}+\frac{9}{b^2}=1$$

נכפול ב־$b^2(b^2+6.4)$:

$$b^2+9b^2+57.6=b^4+6.4b^2$$
$$b^4-3.6b^2-57.6=0$$

זו משוואה ריבועית ב־b^2. נסמן $t=b^2$:

$$t^2-3.6t-57.6=0$$
$$t=\frac{3.6\pm\sqrt{3.6^2+4\cdot 57.6}}{2}$$
$$=\frac{3.6\pm 15.6}{2}$$
$$t_1=9.6,\qquad t_2=-6$$

$b^2>0$, ולכן $b^2=9.6$ ו־$a^2=16$.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9.6}=1$$

תשובה: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9.6}=1$

סעיף ב

B היא החיתוך עם החלק החיובי של ציר ה־x: $B(4,0)$.

הישר AO עובר דרך $O(0,0)$ ו־$A(1,3)$, ולכן $y=3x$. נקודה כלשהי עליו: $C(t,\ 3t)$.

P אמצע הקטע BC:

$$x=\frac{4+t}{2},\qquad y=\frac{3t}{2}$$

נבודד את t מהמשוואה הראשונה ונציב בשנייה:

$$t=2x-4$$
$$y=\frac{3(2x-4)}{2}=3x-6$$

המקום הגאומטרי הוא ישר המקביל ל־AO.

תשובה: $y=3x-6$

סעיף ג

המעגל משיק לישר AO ($y=3x$) בנקודה O, ולכן מרכזו נמצא על הישר המאונך ל־AO בנקודה O:

$$y=-\frac{1}{3}x$$

המעגל משיק גם לישר $y=3x-6$, המקביל ל־AO. מעגל המשיק לשני ישרים מקבילים – הקוטר שלו הוא המרחק בין הישרים. נכתוב אותם בצורה $3x-y=0$ ו־$3x-y-6=0$:

$$d=\frac{|0-(-6)|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$$
$$R=\frac{3}{\sqrt{10}},\qquad R^2=0.9$$

המרכז $M(m,-\frac{m}{3})$ במרחק R מ־O, וצריך להיות בצד של הישר $y=3x-6$ (מימין ל־AO, כלומר $m>0$):

$$m^2+\frac{m^2}{9}=0.9$$
$$\frac{10m^2}{9}=0.9\ \Rightarrow\ m^2=0.81$$
$$m=0.9,\quad M(0.9,\ -0.3)$$

בדיקה – המרחק של M מהישר $3x-y-6=0$:

$$\frac{|2.7+0.3-6|}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=R\ \checkmark$$
$$(x-0.9)^2+(y+0.3)^2=0.9$$

האליפסה, הישר y=3x, הישר y=3x-6 והמעגל המשיק לשניהם

תשובה: $(x-0.9)^2+(y+0.3)^2=0.9$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 1

1. נתונה אליפסה שמשוואתה היא $\frac{x^2}{25k^2}+\frac{y^2}{16k^2}=1$. k הוא פרמטר חיובי.

הנקודה F היא המוקד הימני של האליפסה.

נתון מעגל שמרכזו בנקודה F והוא עובר בנקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה־x.

א. הביעו באמצעות k את משוואת המעגל.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה־y.

הנקודה D היא נקודת החיתוך של הקטע BF עם המעגל.

ב. **(1)** מצאו את היחס בין הקטע BD ובין הקטע DF.

(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה D.

ג. הביעו באמצעות k את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

בונים ריבוע שאורך הצלע שלו הוא 15.

אחת מצלעות הריבוע נמצאת על המשיק שאת משוואתו מצאתם בסעיף ג.

הנקודה B נמצאת בתוך הריבוע.

ד. הביעו באמצעות k את משוואת הישר שעליו נמצאת צלע הריבוע המקבילה למשיק.

נתון כי הנקודה B היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע.

ה. מצאו את הערך של k.

פתרון מלא

סעיף א

נשווה למשוואה הקנונית של אליפסה:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

כאן $a^2=25k^2$ ו־$b^2=16k^2$. מכיוון ש־$k>0$:

$$a=5k,\qquad b=4k$$

המרחק של המוקד מהמרכז:

$$c^2=a^2-b^2=25k^2-16k^2=9k^2$$
$$c=3k\ \Rightarrow\ F(3k,0)$$

החיתוך עם החלק החיובי של ציר ה־x הוא $(5k,0)$, ולכן רדיוס המעגל:

$$R=5k-3k=2k$$
$$(x-3k)^2+y^2=4k^2$$

תשובה: $(x-3k)^2+y^2=4k^2$

סעיף ב (1)

הנקודה B היא $(0,4k)$. נחשב את אורך הקטע BF:

$$BF=\sqrt{(3k-0)^2+(0-4k)^2}$$
$$=\sqrt{25k^2}=5k$$

D נמצאת על המעגל, ולכן $DF=R=2k$. מכיוון ש־D על הקטע BF:

$$BD=BF-DF=5k-2k=3k$$
$$\frac{BD}{DF}=\frac{3k}{2k}=\frac{3}{2}$$

תשובה: $\frac{BD}{DF}=\frac{3}{2}$

סעיף ב (2)

D נמצאת על הקטע FB במרחק $2k$ מ־F, כלומר $\frac{2k}{5k}=\frac{2}{5}$ מהדרך מ־F אל B:

$$x_D=3k+\tfrac{2}{5}(0-3k)=1.8k$$
$$y_D=0+\tfrac{2}{5}(4k-0)=1.6k$$

תשובה: $D(1.8k,\ 1.6k)$

סעיף ג

לפי הנוסחאון, משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ בנקודה (x_1,y_1) שעליו:

$$(x-a)(x_1-a)$$
$$+(y-b)(y_1-b)=R^2$$

כאן $a=3k$, $b=0$ והנקודה $D(1.8k,1.6k)$:

$$(x-3k)(1.8k-3k)+y\cdot 1.6k=4k^2$$

נחלק ב־k ($k>0$):

$$-1.2(x-3k)+1.6y=4k$$
$$1.6y=1.2x+0.4k$$
$$y=\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$$

סקיצה עבור k=1: האליפסה, המעגל שמרכזו F, הקטע BF והמשיק בנקודה D

תשובה: $y=\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$

סעיף ד

הצלע המקבילה למשיק נמצאת על ישר מקביל, $y=\frac{3}{4}x+c$, במרחק 15 ממנו (אורך הצלע).

נכתוב את שני הישרים בצורה $Ax+By+C=0$:

$$3x-4y+k=0$$
$$3x-4y+4c=0$$

המרחק בין ישרים מקבילים:

$$\frac{|4c-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=15$$
$$|4c-k|=75$$

הנקודה $B(0,4k)$ נמצאת בתוך הריבוע, כלומר בין שני הישרים. B נמצאת מעל המשיק ($4k>\frac{k}{4}$), ולכן גם הצלע המקבילה נמצאת מעל המשיק:

$$4c - k = 75 \;\Rightarrow\; c = \frac{k+75}{4}$$
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{k+75}{4}$$

תשובה: $y = \frac{3}{4}x + \frac{k+75}{4}$

סעיף ה

נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע נמצאת במרחק שווה משתי צלעות נגדיות, כלומר במרחק $\frac{15}{2} = 7.5$ מהצלע שעל המשיק.

המרחק של $B(0, 4k)$ מהישר $3x - 4y + k = 0$:

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4k + k|}{5} = \frac{15k}{5} = 3k$$
$$3k = 7.5 \;\Rightarrow\; k = 2.5$$

תשובה: $k = 2.5$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

1. נתון מעגל I שמשוואתו היא $x^2 - 6x + y^2 + t = 0$. t הוא פרמטר קטן מ־ 9.

א. הביעו באמצעות t את רדיוס המעגל.

הישר $y = x$ משיק למעגל.

ב. מצאו את הערך של t.

הזיזו את מעגל I שמאלה כך שהתקבל מעגל II שמרכזו בראשית הצירים O.

A היא נקודה כלשהי על מעגל II כך ש־ $-1.5 \le y_A \le 1.5$.

דרך נקודה A מעבירים מיתר AB המאונך לציר ה־ y.

נקודה P נמצאת על המיתר AB כך שמתקיים $AB = 2 \cdot PO$.

ג. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה נמצא על אליפסה, ומצאו את משוואתה.

הנקודה K היא המוקד הימני, והנקודה F היא המוקד השמאלי של האליפסה שמצאתם בסעיף ג.

C היא נקודה כלשהי על האליפסה כך שמתקבל משולש CKF.

ד. חשבו את היקף המשולש CKF.

ה. האם קיימת נקודה C שבעבורה שטח המשולש CKF הוא 3? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

נשלים לריבוע:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9 - t$$
$$(x-3)^2 + y^2 = 9 - t$$

המרכז $(3,0)$, ו־$9 - t > 0$ (נתון $t < 9$), ולכן:

$$R = \sqrt{9-t}$$

תשובה: $R = \sqrt{9-t}$

סעיף ב

הישר $y = x$ ($x - y = 0$) משיק למעגל, ולכן המרחק של המרכז $(3,0)$ ממנו שווה לרדיוס:

$$\frac{|3-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{9-t} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$9 - t = 4.5 \;\Rightarrow\; t = 4.5$$

תשובה: $t = 4.5$

סעיף ג

עם $t = 4.5$ הרדיוס הוא $\sqrt{4.5}$, ולכן מעגל II (מרכזו בראשית):

$$x^2 + y^2 = 4.5$$

נסמן $A(x_0, y_0)$. הנקודה על המעגל, ולכן:

$$x_0^2 + y_0^2 = 4.5$$

המיתר AB מאונך לציר ה־y, כלומר אופקי, ולכן:

$$B(-x_0,\ y_0), \quad AB = 2|x_0|$$

$P(x, y)$ על המיתר, ולכן $y = y_0$. מהתנאי $AB = 2PO$:

$$PO = |x_0|$$
$$x^2 + y^2 = x_0^2 = 4.5 - y_0^2$$

נציב $y_0 = y$:

$$x^2 + 2y^2 = 4.5$$
$$\frac{x^2}{4.5} + \frac{y^2}{2.25} = 1$$

זו משוואת אליפסה.

הערה: הנקודה P קיימת רק אם $PO \geq |y_0|$, כלומר $x_0^2 \geq y_0^2$:

$$4.5 - y_0^2 \geq y_0^2 \ \Rightarrow\ y_0^2 \leq 2.25$$

וזה בדיוק התנאי הנתון על y_A.

מעגל II, המיתר AB, הנקודה P על האליפסה ומוקדיה K ו-F

תשובה: אליפסה: $\frac{x^2}{4.5} + \frac{y^2}{2.25} = 1$

סעיף ד

באליפסה: $a^2 = 4.5$, $b^2 = 2.25$, ולכן:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 2.25, \quad c = 1.5$$

המוקדים:

$$K(1.5,\ 0), \quad F(-1.5,\ 0)$$
$$KF = 2c = 3$$

לפי הגדרת האליפסה, לכל נקודה C עליה סכום המרחקים מהמוקדים הוא $2a$:

$$CK + CF = 2a = 2\sqrt{4.5} = 3\sqrt{2}$$

היקף המשולש:

$$CK + CF + KF = 3\sqrt{2} + 3 \approx 7.24$$

תשובה: $3\sqrt{2} + 3 \approx 7.24$

סעיף ה

הבסיס $KF = 3$ נמצא על ציר ה־x, ולכן הגובה לבסיס הוא $|y_C|$:

$$S_{CKF} = \frac{3 \cdot |y_C|}{2}$$

באליפסה $|y_C| \leq b = 1.5$, ולכן:

$$S_{CKF} \leq \frac{3 \cdot 1.5}{2} = 2.25 < 3$$

לכן אין נקודה C כזו.

תשובה: לא. השטח המקסימלי הוא $2.25 < 3$.

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 1

1. נתונות הנקודות $A(-9a\,,\,0)$ ו־ $B(41a\,,\,0)$. a הוא פרמטר חיובי.

הנקודה P מקיימת $\sphericalangle APB = 90^{o}$.

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה נמצא על מעגל, ומצאו את משוואתו.

הביעו את תשובתכם באמצעות a .

נתון כי השטח הגדול ביותר של המשולש APB הוא 156.25 .

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=\frac{1}{2}$ וענו על סעיפים ג–ד.

אמצע הקטע AB הוא מוקד של פרבולה שמשוואתה קנונית.

הפרבולה והמעגל שמצאתם נחתכים ברביע הראשון בנקודה C .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה C .

הישר ℓ משיק לפרבולה בנקודה C .

מעבירים משיק למעגל שמצאתם.

נתון כי משיק זה מקביל לישר ℓ .

ד. מצאו את המרחק בין הישר ℓ ובין המשיק למעגל (מצאו את שתי האפשרויות).

פתרון מלא

סעיף א

הזווית APB היא זווית ישרה. זווית היקפית של 90° נשענת על קוטר, ולכן כל נקודה P נמצאת על המעגל שהקטע AB הוא קוטר שלו (פרט לנקודות A ו־B עצמן).

המרכז הוא אמצע AB:

$$x_M = \frac{-9a + 41a}{2} = 16a$$

כלומר $M(16a, 0)$.

הרדיוס הוא חצי מאורך AB:

$$R = \frac{41a - (-9a)}{2} = 25a$$

$$(x - 16a)^2 + y^2 = 625a^2$$

תשובה: $(x - 16a)^2 + y^2 = 625a^2$ (ללא הנקודות A ו־B)

סעיף ב

הבסיס $AB = 50a$ קבוע, ולכן השטח הגדול ביותר מתקבל כשהגובה מ־P לבסיס הוא הגדול ביותר – כש־P נמצאת בקצה העליון (או התחתון) של המעגל, והגובה שווה לרדיוס $25a$:

$$S_{max} = \frac{50a \cdot 25a}{2} = 625a^2$$

$$625a^2 = 156.25 \;\Rightarrow\; a^2 = 0.25$$

a חיובי, ולכן:

$$a = 0.5$$

תשובה: $a = 0.5$

סעיף ג

נציב $a = \frac{1}{2}$. הנקודות הן $A(-4.5, 0)$ ו־$B(20.5, 0)$ והמעגל הוא:

$$(x-8)^2 + y^2 = 156.25$$

אמצע AB הוא $(8, 0)$, והוא המוקד של הפרבולה הקנונית $y^2 = 2px$, שהמוקד שלה $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$:

$$\frac{p}{2} = 8 \;\Rightarrow\; p = 16 \;\Rightarrow\; y^2 = 32x$$

נציב $y^2 = 32x$ במשוואת המעגל:

$$(x-8)^2 + 32x = 156.25$$
$$x^2 + 16x - 92.25 = 0$$
$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 369}}{2} = \frac{-16 \pm 25}{2}$$

ברביע הראשון $x > 0$, ולכן $x = 4.5$:

$$y^2 = 32 \cdot 4.5 = 144 \;\Rightarrow\; y = 12$$

תשובה: $C(4.5,\ 12)$

סעיף ד

המשיק ℓ: לפי הנוסחאון המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה (x_1, y_1) הוא:

$$y \cdot y_1 = p(x + x_1)$$
$$12y = 16(x + 4.5)$$
$$y = \frac{4}{3}x + 6$$
$$4x - 3y + 18 = 0$$

משיק מקביל למעגל: נכתוב אותו בצורה

$$4x - 3y + c = 0$$

המרחק שלו מהמרכז $(8, 0)$ שווה לרדיוס שהוא 12.5:

$$\frac{|4 \cdot 8 - 0 + c|}{\sqrt{16 + 9}} = 12.5$$
$$|32 + c| = 62.5$$
$$c_1 = 30.5$$
$$c_2 = -94.5$$

המרחק בין ישרים מקבילים: המרחק בין הישר ℓ לבין הישר עם c הוא

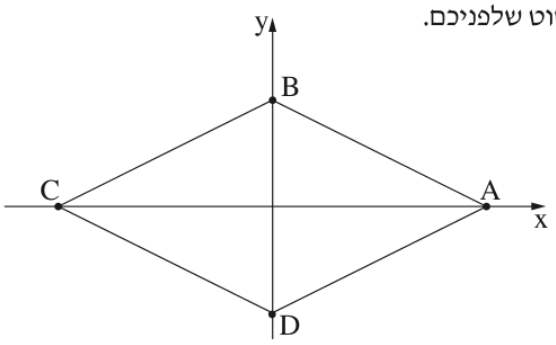
$$d = \frac{|c - 18|}{5}$$
$$d_1 = \frac{|30.5 - 18|}{5} = 2.5$$

$$d_2 = \frac{|-94.5-18|}{5} = 22.5$$

תשובה: 2.5 **או** 22.5

בגרות קיץ תשפ״ד (2024) – מועד ב׳ • שאלה 1

1. נתון מעוין $ABCD$. אלכסוני המעוין מונחים על הצירים, כמתואר בסרטוט שלפניכם.



נתון: אורך האלכסון AC הוא 10.

המרחק של כל אחת מצלעות המעוין מראשית הצירים הוא $\sqrt{5}$.

א. מצאו את משוואת הצלע AB.

בתוך המעוין חסום מעגל.

ב. מצאו את משוואת המעגל.

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל והמעוין ברביע הראשון.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה M.

מן הנקודה M מורידים אנך לציר ה־x החותך אותו בנקודה $K(a,0)$.

על הישר $x=-a$ מסמנים נקודה E ומעבירים דרכה ישר המקביל לציר ה־x.

הישר המקביל חותך את האנך האמצעי לקטע EK בנקודה G.

ד. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות G המתקבלות באופן זה נמצא על פרבולה, ומצאו את משוואתה.

הנקודה N נמצאת ברביע הראשון על הפרבולה שאת משוואתה מצאתם. שיעור ה־x של הנקודה N הוא 5.

ה. מצאו את משוואות שני המעגלים שמרכזם בנקודה N והם משיקים למעגל החסום במעוין.

פתרון מלא

סעיף א

האלכסונים מונחים על הצירים וחוצים זה את זה בראשית. אורך האלכסון AC הוא 10, ולכן:

$$A(5,0),\quad C(-5,0)$$

נסמן את הקודקוד על ציר ה־y החיובי:

$$B(0,b),\quad b>0$$

משוואת הישר AB לפי נקודות החיתוך עם הצירים:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{b}=1$$
$$bx+5y-5b=0$$

המרחק מהראשית לישר הוא $\sqrt{5}$:

$$\frac{|-5b|}{\sqrt{b^2+25}}=\sqrt{5}$$
$$25b^2=5(b^2+25)$$
$$20b^2=125\ \Rightarrow\ b=2.5$$

ולכן:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{2.5}=1$$
$$y=-\frac{1}{2}x+2.5$$

תשובה: $y=-\frac{1}{2}x+2.5$

סעיף ב

במעוין מרכז המעגל החסום הוא מפגש האלכסונים – הראשית. הרדיוס הוא המרחק מהמרכז לצלע, כלומר $\sqrt{5}$:

$$x^2+y^2=5$$

תשובה: $x^2+y^2=5$

סעיף ג

הנקודה M היא נקודת ההשקה, ולכן הרדיוס OM מאונך לצלע AB. השיפוע של AB הוא $-\frac{1}{2}$, ולכן:

$$m_{OM}=2, \qquad OM:\ y=2x$$

נחתוך עם הישר AB:

$$2x=-\frac{1}{2}x+2.5$$
$$2.5x=2.5 \ \Rightarrow\ x=1,\ y=2$$

תשובה: $M(1,\ 2)$

סעיף ד

האנך מ־$M(1,2)$ לציר ה־x חותך אותו בנקודה:

$$K(1,0), \qquad a=1$$

הנקודה E נמצאת על הישר $x=-1$, ולכן נסמן:

$$E(-1,t)$$

הישר דרך E המקביל לציר ה־x הוא $y=t$, ולכן לנקודה $G(x,y)$ שעליו יש $y=t$.

הנקודה G על האנך האמצעי של EK, ולכן $GE=GK$:

$$GE=|x+1|$$
$$GK=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

נשווה ונעלה בריבוע:

$$(x+1)^2=(x-1)^2+y^2$$
$$x^2+2x+1=x^2-2x+1+y^2$$
$$y^2=4x$$

זו פרבולה שהמוקד שלה הוא $K(1,0)$ והמדריך שלה הוא הישר $x=-1$.

תשובה: פרבולה: $y^2=4x$

סעיף ה

N על הפרבולה עם $x=5$ ברביע הראשון:

$$y^2=20 \ \Rightarrow\ y=2\sqrt{5}$$
$$N(5,\ 2\sqrt{5})$$

המרחק בין N למרכז המעגל החסום O:

$$NO=\sqrt{25+20}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

הרדיוס של המעגל החסום הוא $\sqrt{5}$, והנקודה N מחוץ לו. יש שני מעגלים שמרכזם N ומשיקים לו.

השקה מבחוץ – המרחק בין המרכזים שווה לסכום הרדיוסים:

$$R+\sqrt{5}=3\sqrt{5} \;\Rightarrow\; R=2\sqrt{5}$$
$$R^2=20$$

השקה מבפנים – המעגל החסום בתוך המעגל החדש, והמרחק שווה להפרש הרדיוסים:

$$R-\sqrt{5}=3\sqrt{5} \;\Rightarrow\; R=4\sqrt{5}$$
$$R^2=80$$

משוואות המעגלים:

$$(x-5)^2+(y-2\sqrt{5})^2=20$$
$$(x-5)^2+(y-2\sqrt{5})^2=80$$

המעוין ABCD, המעגל החסום, הפרבולה $y^2=4x$ והנקודה N

תשובה: שני מעגלים:

$$(x-5)^2+(y-2\sqrt{5})^2=20$$
$$(x-5)^2+(y-2\sqrt{5})^2=80$$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 1

1. נתון מעגל I שמשוואתו $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, ומרכזו בנקודה K.

נתון מעגל II שמשוואתו $(x+5)^2+(y-2)^2=1$, ומרכזו בנקודה L.

הנקודה A נמצאת על מעגל I, והנקודה B נמצאת על מעגל II.

מעבירים משיק למעגל I דרך הנקודה A ומשיק למעגל II דרך הנקודה B. שני המשיקים נחתכים בנקודה M.

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M המקיימות $MA=MB$ הוא קו ישר, ומצאו את משוואתו.

ב. **(1)** הראו כי הישר שאת משוואתו מצאתם בסעיף א והישר KL מאונכים זה לזה.

(2) האם קיימת נקודה M שמתקיים בעבורה $ML=MK$? נמקו את תשובתכם.

נתון כי בעבור אחת מן הנקודות M, הנמצאת מעל הישר KL, שטח המשולש KLM הוא 9.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה M.

הנקודה M שמצאתם בסעיף ג נמצאת על הפרבולה $y^2=2px$, p הוא פרמטר.

ד. מצאו את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה M.

פתרון מלא

סעיף א

המעגל הראשון: המרכז $K(3,4)$ והרדיוס 3. המעגל השני: המרכז $L(-5,2)$ והרדיוס 1.

המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. לכן לפי משפט פיתגורס במשולשים MAK ו־MBL:

$$MA^2=MK^2-9$$
$$MB^2=ML^2-1$$

נסמן $M(x,y)$ ונשווה:

$$(x-3)^2+(y-4)^2-9$$
$$=(x+5)^2+(y-2)^2-1$$

נפתח סוגריים. האיברים x^2 ו־y^2 מצטמצמים:

$$-6x-8y+16=10x-4y+28$$
$$-16x-4y-12=0$$
$$y=-4x-3$$

זו משוואה של ישר ולכן המקום הגאומטרי הוא ישר.

תשובה: $y=-4x-3$

סעיף ב (1)

השיפוע של הישר שמצאנו הוא -4. השיפוע של KL הוא:

$$m_{KL}=\frac{4-2}{3-(-5)}=\frac{1}{4}$$
$$-4\cdot\frac{1}{4}=-1$$

מכפלת השיפועים היא -1 ולכן הישרים מאונכים.

תשובה: הוכח: מכפלת השיפועים היא -1

סעיף ב (2)

הנקודות שמקיימות $ML = MK$ נמצאות על האנך האמצעי לקטע KL. גם האנך האמצעי מאונך ל-KL ולכן הוא מקביל לישר מסעיף א.

נבדוק אם אמצע KL נמצא על הישר מסעיף א. אמצע הקטע הוא $(-1, 3)$:

$$-4 \cdot (-1) - 3 = 1 \neq 3$$

אמצע הקטע לא נמצא על הישר. לכן שני הישרים מקבילים ושונים ואין להם נקודה משותפת.

תשובה: לא – הישר מסעיף א מקביל לאנך האמצעי של KL ושונה ממנו.

סעיף ג

משוואת הישר KL:

$$y - 4 = \tfrac{1}{4}(x - 3)$$
$$x - 4y + 13 = 0$$

אורך הקטע:

$$KL = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

השטח הוא חצי מכפלת הבסיס KL בגובה. לכן המרחק של M מהישר KL הוא:

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot d = 9$$
$$d = \frac{9}{\sqrt{17}}$$

הנקודה M על הישר מסעיף א ולכן $M(x,\ -4x - 3)$. לפי נוסחת המרחק:

$$\frac{|x - 4(-4x - 3) + 13|}{\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{17}}$$
$$|17x + 25| = 9$$
$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -\tfrac{16}{17}$$

עבור $x = -2$ מתקבל $y = 5$. על הישר KL באותו x הערך הוא $y = 2.75$ ולכן הנקודה מעל הישר.

עבור $x = -\frac{16}{17}$ מתקבל $y = \frac{13}{17}$ וזו נקודה מתחת לישר KL.

תשובה: $M(-2, 5)$

סעיף ד

נציב את M במשוואת הפרבולה:

$$5^2 = 2p \cdot (-2)$$
$$p = -\tfrac{25}{4}$$

לפי הנוסחאון המשיק בנקודה (x_1, y_1) הוא $y \cdot y_1 = p(x + x_1)$:

$$5y = -\tfrac{25}{4}(x - 2)$$
$$y = -\tfrac{5}{4}x + 2.5$$

תשובה: $y = -1.25x + 2.5$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 1

1. במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle BAC = 90^o)$, שיעורי הקודקוד A הם $(a\ ,\ 0)$, a הוא פרמטר שונה מאפס.

שיעור ה־ x של הקודקוד B הוא $-a$. הצלע BC מקבילה לציר ה־ x.

הנקודה M היא אמצע הצלע BC.

א. הביעו באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל הנקודות M.

ב. סרטטו את העקום המתואר על ידי המשוואה שמצאתם בסעיף א.

סרטטו את שתי האפשרויות במערכת צירים אחת.

באחת מן הנקודות M, שנמצאת ברביע הראשון, העבירו ישר ℓ המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ג. הוכיחו כי הישר ℓ מקביל לישר AC.

נתון גם כי $AM = 10$ (הנקודה M נמצאת ברביע הראשון), והקודקוד B נמצא על הישר $x = -2$.

ד. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו־ C.

דרך הקודקוד A העבירו מעגל המשיק לישרים ℓ ו־ AC.

ה. מצאו את שיעורי מרכז המעגל.

פתרון מלא

סעיף א

שיעור ה־x של הקודקוד B הוא:

$$x_B = -a$$

הצלע BC מקבילה לציר ה־x, ולכן לשני הקודקודים אותו שיעור y. נסמן:

$$B(-a,\ t), \qquad C(c,\ t)$$

הזווית BAC ישרה, ולכן מכפלה סקלרית של שני הווקטורים היוצאים מ־$A(a,0)$ שווה לאפס:

$$\underline{AB} = (-2a,\ t), \qquad \underline{AC} = (c-a,\ t)$$

$$-2a(c-a) + t^2 = 0$$

$$c = a + \frac{t^2}{2a}$$

הנקודה M היא אמצע BC:

$$x_M = \frac{-a+c}{2} = \frac{t^2}{4a}, \qquad y_M = t$$

נציב $t = y$ ונקבל את המקום הגאומטרי:

$$x = \frac{y^2}{4a}$$

$$y^2 = 4ax$$

תשובה: $y^2 = 4ax$

סעיף ב

זו פרבולה שקודקודה בראשית וציר הסימטרייה שלה הוא ציר ה־x.

כאשר $a>0$ היא פתוחה ימינה, וכאשר $a<0$ היא פתוחה שמאלה.

שתי פרבולות y²=4ax: אחת פתוחה ימינה (a>0) ואחת פתוחה שמאלה (a<0)

תשובה: פרבולה שקודקודה בראשית.

כאשר $a>0$ היא פתוחה ימינה, וכאשר $a<0$ היא פתוחה שמאלה.

סעיף ג

נסמן את נקודת ההשקה:

$$M(x_0,\ y_0), \qquad y_0 = t$$

נגזור את משוואת הפרבולה בגזירה סתומה:

$$2yy' = 4a \ \Rightarrow \ y' = \frac{2a}{y}$$

שיפוע המשיק בנקודה M:

$$m_\ell = \frac{2a}{t}$$

שיפוע הישר AC, לפי השיעורים מסעיף א:

$$m_{AC} = \frac{t-0}{\left(a+\frac{t^2}{2a}\right)-a} = \frac{t}{\frac{t^2}{2a}} = \frac{2a}{t}$$

השיפועים שווים, ולכן המשיק מקביל לישר AC.

תשובה: לשני הישרים אותו שיפוע, ולכן הם מקבילים:
$m_\ell = m_{AC} = \frac{2a}{t}$

סעיף ד

הקודקוד B נמצא על הישר הנתון, ולכן:

$$-a = -2 \ \Rightarrow \ a = 2$$

המקום הגאומטרי והקודקוד A:

$$y^2 = 8x, \qquad A(2,0)$$

נסמן את הנקודה M על הפרבולה:

$$M\left(\frac{t^2}{8},\ t\right)$$

נשתמש בנתון:

$$AM = 10$$
$$\left(\frac{t^2}{8}-2\right)^2 + t^2 = 100$$

נסמן:

$$u = \frac{t^2}{8}, \qquad t^2 = 8u$$

ונקבל:

$$(u-2)^2 + 8u = 100$$
$$u^2 + 4u + 4 = 100$$
$$(u+2)^2 = 100$$

$$u+2=10 \;\Rightarrow\; u=8$$
$$u+2=-10 \;\Rightarrow\; u=-12$$

$u=\frac{t^2}{8}\geq 0$, ולכן $u=-12$ נפסל ו־$u=8$.

הנקודה M ברביע הראשון, ולכן:

$$t^2=64, \quad t=8, \quad M(8,8)$$

לפי סעיף א:

$$c=2+\frac{64}{4}=18$$
$$B(-2,\ 8), \qquad C(18,\ 8)$$

תשובה: $B(-2,8)$
$C(18,8)$

סעיף ה

השיפוע של הישר AC הוא $\frac{1}{2}$, והוא עובר דרך A. משוואתו:

$$y=\frac{1}{2}x-1$$

למשיק בנקודה M אותו שיפוע. משוואתו:

$$y=\frac{1}{2}x+4$$

המעגל משיק לשני ישרים מקבילים, ולכן הקוטר שלו שווה למרחק ביניהם:

$$d=\frac{|4-(-1)|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{5}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=2\sqrt{5}$$
$$R=\sqrt{5}$$

המעגל עובר דרך A, שנמצאת על הישר AC, ולכן הוא משיק לישר זה בנקודה A.
לכן מרכז המעגל נמצא על האנך ל־AC בנקודה A. זה הישר AB, כי הזווית BAC ישרה.
המרכז נמצא במרחק $\sqrt{5}$ מהנקודה A, לכיוון הישר המשיק:

$$\underline{AB}=(-4,\ 8)=4\cdot(-1,\ 2)$$
$$O=(2,0)+\sqrt{5}\cdot\frac{(-1,\ 2)}{\sqrt{5}}=(1,\ 2)$$

בדיקה: המרחק מ־$(1,2)$ לישר המשיק:

$$\frac{|\frac{1}{2}-2+4|}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2.5\cdot 2}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\ \checkmark$$

תשובה: $(1,\ 2)$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 1

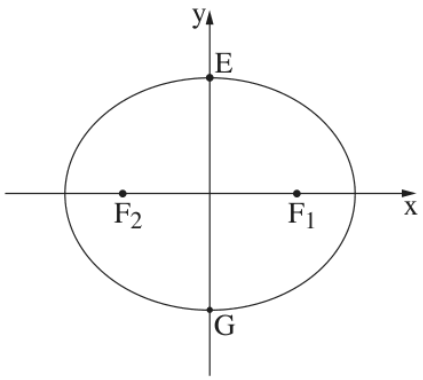
1. נתונות הנקודות $A(0,24)$, $B(18,0)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות C המקיימות: $AC^2+BC^2=1{,}250$.

את המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א מזיזים 9 יחידות שמאלה ו־12 יחידות למטה כך שמתקבל מקום גאומטרי חדש.

המקום הגאומטרי החדש חותך את ציר ה־y בנקודות E ו־G (E מעל G).

הנקודות F_1 ו־F_2 הן מוקדי אליפסה קנונית שעוברת דרך הנקודות E ו־G, כמתואר בסרטוט.



נתון: המרחק בין הישרים EF_1 ו־GF_2 הוא 24.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי הנקודה F_1.

(2) מצאו את משוואת האליפסה.

העבירו מעגלים המשיקים לישר EF_1, לציר ה־x ולציר ה־y.

ג. מצאו משוואות של שני מעגלים כאלה הנמצאים ברביעים שונים.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן $C(x,y)$ ונציב בנוסחת המרחק:

$$x^2+(y-24)^2$$
$$+(x-18)^2+y^2=1250$$
$$2x^2-36x+2y^2-48y+900=1250$$

נחלק ב־2 ונשלים לריבוע:

$$x^2-18x+y^2-24y=175$$
$$(x-9)^2+(y-12)^2$$
$$=175+81+144$$
$$(x-9)^2+(y-12)^2=400$$

זה מעגל שמרכזו $(9,12)$ ורדיוסו 20.

תשובה: $(x-9)^2+(y-12)^2=400$

סעיף ב (1)

אחרי ההזזה המרכז עובר לראשית ומתקבל המעגל:

$$x^2+y^2=400$$

נקודות החיתוך עם ציר ה־y הן $E(0,20)$ ו־$G(0,-20)$. האליפסה עוברת דרכן ולכן $b=20$.

נסמן $F_1(c,0)$ ו־$F_2(-c,0)$. משוואת הישר EF_1 לפי החיתוכים עם הצירים:

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{20}=1$$
$$20x+cy-20c=0$$

משוואת הישר GF_2 באותו אופן:

$$20x+cy+20c=0$$

הישרים מקבילים. המרחק ביניהם:

$$\frac{|20c-(-20c)|}{\sqrt{400+c^2}}=24$$
$$40c=24\sqrt{400+c^2}$$
$$1600c^2=576(400+c^2)$$
$$1024c^2=230400$$
$$c^2=225\ \Rightarrow\ c=15$$

תשובה: $F_1(15,\ 0)$

סעיף ב (2)

באליפסה מתקיים $a^2=b^2+c^2$:

$$a^2=400+225=625$$
$$\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$$

תשובה: $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$

סעיף ג

עם $c=15$ משוואת הישר EF_1 היא:

$$4x+3y-60=0$$

מעגל שמשיק לשני הצירים הוא בעל רדיוס r ומרכז שבו שני השיעורים שווים ל־r בערך מוחלט. המרחק של המרכז מהישר צריך להיות r.

ברביע הראשון המרכז הוא (r,r):

$$\frac{|4r+3r-60|}{5}=r$$
$$|7r-60|=5r$$

שתי אפשרויות: $7r-60=5r$ נותנת $r=30$ (גם זה מעגל מתאים, מעבר לישר), ו־$60-7r=5r$ נותנת $r=5$. נבחר את $r=5$:

$$(x-5)^2+(y-5)^2=25$$

ברביע הרביעי המרכז הוא $(r,-r)$:

$$\frac{|4r-3r-60|}{5}=r$$
$$|r-60|=5r$$

שתי אפשרויות: $r-60=5r$ נותנת $r=-15$ – נפסל, כי רדיוס חיובי; $60-r=5r$ נותנת $r=10$:

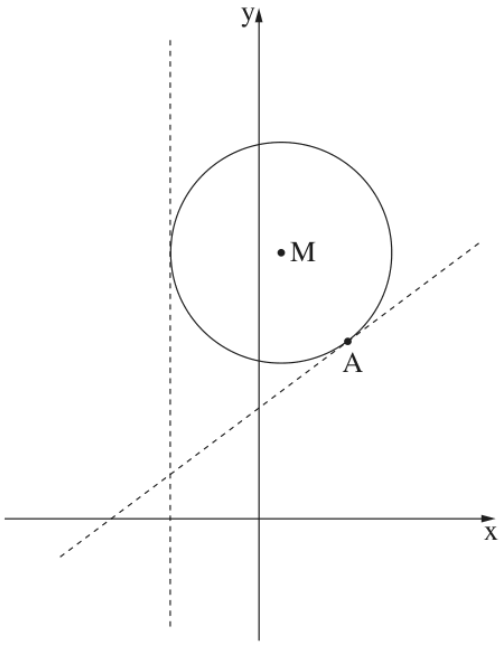
$$(x-10)^2+(y+10)^2=100$$

יש גם מעגלים נוספים שמתאימים, למשל $(x+15)^2+(y-15)^2=225$ ברביע השני. מספיק למצוא שניים ברביעים שונים.

תשובה: $(x-5)^2+(y-5)^2=25$
$(x-10)^2+(y+10)^2=100$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 1

1. נתונים הישרים שמשוואותיהם: $\ell_1:\ 4y-3x-20=0$,
$\ell_2:\ x=-4$.



א. מצאו את המשוואות המתארות את המקום הגאומטרי
של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מן הישרים ℓ_1 ו־ ℓ_2.

מעגל שמרכזו M משיק לישרים ℓ_1 ו־ ℓ_2.
המעגל משיק לישר ℓ_1 בנקודה A שבה $x=4$.
המרכז M נמצא ברביע הראשון (ראו סרטוט).

ב. מצאו את שיעורי הנקודה M.

הישר ℓ_2 הוא מדריך של פרבולה קנונית.

ג. האם הישר ℓ_1 משיק בנקודה A לפרבולה זו? נמקו את תשובתכם.

ד. מצאו את משוואת המעגל המשיק לפרבולה זו בשתי נקודות
שאחת מהן היא הנקודה A.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן נקודה כללית על המקום הגאומטרי:

$$P(x,\ y)$$

המרחק מהישר הראשון (נכתוב אותו בצורה כללית):

$$\ell_1:\ -3x+4y-20=0$$
$$d_1=\frac{|-3x+4y-20|}{5}$$

המרחק מהישר השני, שהוא ישר אנכי:

$$d_2=|x+4|$$

נשווה את המרחקים:

$$|-3x+4y-20|=5|x+4|$$

אפשרות ראשונה – אותו סימן:

$$-3x+4y-20=5x+20$$
$$4y=8x+40$$
$$y=2x+10$$

אפשרות שנייה – סימנים הפוכים:

$$-3x+4y-20=-5x-20$$
$$4y=-2x$$
$$y=-\frac{1}{2}x$$

אלה שני חוצי הזוויות שבין הישרים, והם מאונכים זה לזה (מכפלת השיפועים היא מינוס 1).

תשובה: $y = 2x + 10$
$y = -\frac{1}{2}x$

סעיף ב

נקודת ההשקה A נמצאת על הישר הראשון, וידוע שיעור ה־x שלה:

$$x = 4: \quad 4y = 12 + 20 \;\Rightarrow\; y = 8$$
$$A(4,\ 8)$$

הרדיוס MA מאונך למשיק. שיפוע הישר הראשון הוא $\frac{3}{4}$, ולכן שיפוע הרדיוס:

$$m_{MA} = -\frac{4}{3}$$
$$y - 8 = -\frac{4}{3}(x - 4)$$

המרכז נמצא במרחקים שווים משני הישרים, כלומר על אחד מחוצי הזוויות. לפי הסרטוט המרכז ברביע הראשון, ולכן הוא על החוצה הראשון:

$$2x + 10 - 8 = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3}$$
$$\frac{10}{3}x = \frac{10}{3} \;\Rightarrow\; x = 1$$
$$y = 2 \cdot 1 + 10 = 12$$

בדיקה: המרחק מהמרכז לשני הישרים שווה 5:

$$MA = \sqrt{9 + 16} = 5$$
$$|1 - (-4)| = 5 \;\checkmark$$

תשובה: $M(1,\ 12)$

סעיף ג

לפרבולה קנונית $y^2 = 2px$ יש מדריך $x = -\frac{p}{2}$. כאן המדריך הוא הישר השני, ולכן:

$$\frac{p}{2} = 4 \;\Rightarrow\; p = 8$$
$$y^2 = 16x$$

הנקודה A על הפרבולה:

$$8^2 = 64 = 16 \cdot 4 \;\checkmark$$

משוואת המשיק לפרבולה בנקודה שעליה:

$$yy_0 = p(x + x_0)$$
$$8y = 8(x + 4)$$
$$y = x + 4$$

שיפוע המשיק הוא 1, ואילו שיפוע הישר הראשון הוא $\frac{3}{4}$. השיפועים שונים, ולכן הישר הראשון **אינו** משיק לפרבולה בנקודה A.

תשובה: לא. שיפוע המשיק לפרבולה ב־A הוא 1, ואילו שיפוע הישר הוא $\frac{3}{4}$, ולכן הישר אינו משיק.

סעיף ד

הפרבולה סימטרית לציר ה־x. כדי שהמעגל ישיק לה בשתי נקודות, מרכזו על ציר ה־x, ונקודת ההשקה השנייה היא:

$A'(4,\ -8)$

נסמן את המרכז:

$N(n,\ 0)$

בנקודה A למעגל ולפרבולה משיק משותף, שמשוואתו לפי סעיף ג:

$y = x + 4$

הרדיוס AN מאונך למשיק, ולכן שיפועו מינוס 1:

$$\frac{8-0}{4-n} = -1 \ \Rightarrow\ n = 12$$
$$N(12,\ 0)$$

הרדיוס:

$$R^2 = (4-12)^2 + (8-0)^2 = 128$$

משוואת המעגל:

$$(x-12)^2 + y^2 = 128$$

בדיקה: נציב $y^2 = 16x$ במשוואת המעגל:

$$(x-12)^2 + 16x = 128$$
$$x^2 - 8x + 16 = 0$$
$$(x-4)^2 = 0$$

קיבלנו שורש כפול $x = 4$, כלומר המעגל משיק לפרבולה בדיוק בשתי הנקודות $(4, \pm 8)$ בלבד.

הישרים, חוצי הזוויות, המעגל שמרכזו M(1,12), הפרבולה y²=16x והמעגל שמרכזו (12,0)

תשובה: $(x-12)^2 + y^2 = 128$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 1

1. נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{144-4k^2}=1$, $0<k<6$.

הנקודה F_1 היא המוקד הימני של האליפסה, והנקודה F_2 היא המוקד השמאלי שלה.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודות F_1 ו־ F_2 .

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה שמשוואתה קנונית והמוקד שלה נמצא בנקודה F_1 , כך שמתקיים: $AF_1=10k$.

ב. **(1)** הביעו באמצעות k את משוואת מדריך הפרבולה.

(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A .

AF_1 הוא קוטר במעגל. הישר שמשוואתו $5x+12y=138$ משיק למעגל זה.

ג. מצאו את הערך של k .

D היא נקודה על האליפסה.

ד. קבעו אם היקף המשולש F_1AF_2 גדול מהיקף המשולש F_1DF_2 , קטן ממנו או שווה לו. נמקו את קביעתכם.

פתרון מלא

סעיף א

$$a^2=144,\qquad b^2=144-4k^2$$
$$c^2=a^2-b^2=4k^2\ \Rightarrow\ c=2k$$

תשובה: $F_1(2k,0)$, $F_2(-2k,0)$

סעיף ב (1)

מוקד הפרבולה $F_1(2k,0)$, ולכן $\frac{p}{2}=2k$ ו־$p=4k$:

$$y^2=8kx$$

המדריך: $x=-\frac{p}{2}$.

תשובה: $x=-2k$

סעיף ב (2)

כל נקודה על הפרבולה נמצאת במרחק שווה מהמוקד ומהמדריך:

$$AF_1=x_A+2k=10k\ \Rightarrow\ x_A=8k$$
$$y_A^2=8k\cdot 8k=64k^2$$

A ברביע הראשון, ולכן $y_A=8k$.

תשובה: $A(8k,\ 8k)$

סעיף ג

מרכז המעגל – אמצע AF_1: $(5k,\ 4k)$. הרדיוס: $\frac{10k}{2}=5k$.

המרחק מהמרכז אל המשיק שווה לרדיוס:

$$\frac{|25k+48k-138|}{\sqrt{25+144}}=5k$$
$$|73k-138|=65k$$

כלומר $73k-138=65k$, ואז $k=17.25$ – נפסל, כי $144-4k^2>0$ מחייב $k<6$.

או $73k - 138 = -65k$:

$$138k = 138 \;\Rightarrow\; k = 1$$

האליפסה, הפרבולה והמעגל עבור k=1

תשובה: $k = 1$

סעיף ד

עבור $k = 1$: $A(8,8)$, $F_1(2,0)$, $F_2(-2,0)$.

$$AF_1 = 10$$

$$AF_2 = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164}$$

$$P_{F_1AF_2} = 10 + \sqrt{164} + 4 \approx 26.81$$

הנקודה D על האליפסה, ולכן $DF_1 + DF_2 = 2a = 24$:

$$P_{F_1DF_2} = 24 + 4 = 28$$

תשובה: היקף F_1AF_2 (≈ 26.81) קטן מהיקף F_1DF_2 (28).

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 1

1. נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$, b הוא פרמטר חיובי.

ידוע כי המוקדים של האליפסה נמצאים על ציר ה־ x .

נסמן את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה־ y ב־ D_1 ו־ D_2 , את המוקד השמאלי של האליפסה נסמן ב־ F_1 , ואת המוקד הימני שלה ב־ F_2 .

נתון כי המרובע $F_1D_1F_2D_2$ הוא ריבוע.

א. **(1)** מצאו את הערך של b .

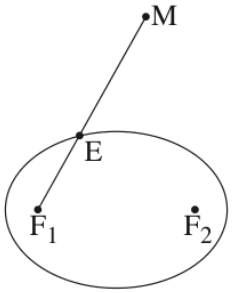
(2) חשבו את שטח הריבוע $F_1D_1F_2D_2$.

הציבו במשוואת האליפסה $b^2=4.5$, וענו על הסעיפים ב–ד.

הנקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה.

מחברים באמצעות קו ישר את המוקד השמאלי F_1 עם הנקודה E

וממשיכים את הקו הישר עד לנקודה M (ראו סרטוט), כך שמתקיים $EM=EF_2$.



ב. הוכיחו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M הוא מעגל, ורשמו את משוואתו.

מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב ימינה ב־ $\frac{3}{\sqrt{2}}$ יחידות, ומתקבל מעגל אחר.

מכפילים ב־ $\frac{2}{3}$ את שיעור ה־ y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל האחר, ומתקבל עקום חדש.

ג. זהו את צורת העקום החדש, ומצאו את משוואתו.

נתון משולש ששניים מקודקודיו הם נקודות החיתוך של העקום החדש עם ציר ה־ x , והקודקוד הנוסף נמצא גם הוא על העקום החדש.

ד. מצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש. נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

באליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$ המוקדים על ציר ה־x, ולכן $a^2=9$ ו־$c^2=a^2-b^2=9-b^2$.

המוקדים: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. נקודות החיתוך עם ציר ה־y: $D_1(0,b)$, $D_2(0,-b)$.

במרובע $F_1D_1F_2D_2$ האלכסונים הם $F_1F_2=2c$ ו־$D_1D_2=2b$. בריבוע האלכסונים שווים, ולכן $c=b$:

$$9-b^2=b^2$$

$$2b^2=9 \;\Rightarrow\; b^2=4.5$$

$$b=\sqrt{4.5}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(האלכסונים גם חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה, כי הם מונחים על הצירים, כך שהמרובע אכן ריבוע.)

תשובה: $b=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\approx 2.12$

סעיף א (2)

שטח ריבוע הוא מחצית מכפלת האלכסונים:

$$S = \frac{F_1F_2 \cdot D_1D_2}{2} = \frac{2c \cdot 2b}{2} = 2b^2$$
$$S = 2 \cdot 4.5 = 9$$

תשובה: $S = 9$ יחידות שטח

סעיף ב

עם $b^2 = 4.5$: $c^2 = 9 - 4.5 = 4.5$, ולכן $c = \frac{3}{\sqrt{2}}$ והמוקד השמאלי $F_1\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

הנקודה E על האליפסה, ולכן סכום מרחקיה מהמוקדים שווה ל־$2a = 6$:

$$EF_1 + EF_2 = 6$$

הנקודה M נמצאת על המשך F_1E ו־$EM = EF_2$, לכן:

$$F_1M = F_1E + EM$$
$$= F_1E + EF_2 = 6$$

כלומר כל הנקודות M נמצאות במרחק קבוע 6 מהנקודה הקבועה F_1 – זהו מעגל שמרכזו F_1 ורדיוסו 6:

$$\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 36$$

האליפסה והמעגל שמרכזו F1 ורדיוסו 6

תשובה: מעגל שמרכזו $F_1\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ורדיוסו 6: $\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 36$

סעיף ג

הזזה ימינה ב־$\frac{3}{\sqrt{2}}$ יחידות מעבירה את המרכז לראשית:

$$x^2 + y^2 = 36$$

נקודה (x_0, y_0) על המעגל עוברת לנקודה (x, y) שבה $x = x_0$ ו־$y = \frac{2}{3}y_0$, כלומר $y_0 = \frac{3}{2}y$. נציב במשוואת המעגל:

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 36$$
$$x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 36 \quad / : 36$$
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

העקום החדש הוא אליפסה שמרכזה בראשית, $a = 6$, $b = 4$.

תשובה: אליפסה: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

סעיף ד

נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה־x: $(-6, 0)$ ו־$(6, 0)$, כלומר בסיס המשולש הוא 12.

הקודקוד השלישי (x, y) על האליפסה, והגובה לבסיס (שעל ציר ה־x) הוא $|y|$. באליפסה $|y| \leq 4$, והערך 4 מתקבל בקודקודים $(0, \pm 4)$.

$$S_{max} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24$$

תשובה: השטח הגדול ביותר: 24 (הקודקוד השלישי ב־$(0, 4)$ או $(0, -4)$)

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 1

1. נתונות הנקודות $A(-5,3)$ ו־ $B(0,-2)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה־ x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M.

ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב־ F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה־ x עובר במוקד השמאלי של האליפסה.

הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו־ T, ואת המעגל M בנקודות K ו־ L.

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF.

פתרון מלא

סעיף א

מרכז של מעגל שהקטע AB הוא מיתר בו נמצא במרחק שווה מ־A ומ־B, כלומר על האנך האמצעי לקטע AB.

אמצע הקטע:

$$\left(\frac{-5+0}{2},\ \frac{3-2}{2}\right)=(-2.5,\ 0.5)$$

שיפוע AB:

$$m_{AB}=\frac{-2-3}{0-(-5)}=-1$$

שיפוע האנך: $m=1$ (מכפלת השיפועים -1).

$$y-0.5=1\cdot(x+2.5)$$
$$y=x+3$$

תשובה: הישר $y=x+3$ (כלומר $x-y+3=0$)

סעיף ב

נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה־x הן מוקדי אליפסה קנונית, ולכן הן סימטריות ביחס לראשית: $(c,0)$ ו־ $(-c,0)$.

מרכז המעגל נמצא על האנך האמצעי של המיתר שבין שתי הנקודות האלה – זהו ציר ה־y. לכן $x_M=0$.

המרכז נמצא גם על הישר מסעיף א:

$$y=0+3=3\ \Rightarrow\ M(0,3)$$

הרדיוס הוא המרחק מ־M ל־$B(0,-2)$:

$$R=3-(-2)=5$$

תשובה: $M(0,3)$, $R=5$

סעיף ג

משוואת המעגל: $x^2+(y-3)^2=25$. החיתוך עם ציר ה־x ($y=0$):

$$x^2+9=25 \;\Rightarrow\; x=\pm 4$$

לכן מוקדי האליפסה $(\pm 4,0)$ ו־$c=4$.

אורך הציר הראשי שווה לקוטר המעגל:

$$2a=2R=10 \;\Rightarrow\; a=5$$

$$b^2=a^2-c^2=25-16=9$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

תשובה: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

סעיף ד

המוקד השמאלי $(-4,0)$, ולכן הישר המאונך לציר ה־x הוא $x=-4$. המוקד הימני $F(4,0)$.

חיתוך עם האליפסה:

$$\frac{16}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \;\Rightarrow\; y^2=\frac{81}{25}$$

$$y=\pm\frac{9}{5}$$

כלומר $QT=\frac{18}{5}=3.6$.

חיתוך עם המעגל:

$$16+(y-3)^2=25 \;\Rightarrow\; y-3=\pm 3$$

כלומר $y=6$ או $y=0$.

כלומר $KL=6$.

לשני המשולשים יש אותו גובה מ־F לישר $x=-4$, באורך 8, ולכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים:

$$\frac{S_{KLF}}{S_{TQF}}=\frac{KL}{TQ}=\frac{6}{3.6}=\frac{5}{3}$$

תשובה: $\frac{S_{KLF}}{S_{TQF}}=\frac{5}{3}$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 1

1. נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.

מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא $(x-a)^2+y^2=r^2$, a הוא פרמטר חיובי.

מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא $(x-13)^2+y^2=R^2$.

אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9 , והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא $1:2$, $r<R$.

א. מְצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M .

נתון כי $a<13$.

ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.

ג. מְצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

ד. הישר $mx-y+n=0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים. מְצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).

נתונים שני מעגלים <u>אחרים</u> המשיקים זה לזה מבחוץ.

משוואות המעגלים הן: $(x-t)^2+y^2=r^2$; $(x-k)^2+y^2=R^2$, t ו־k הם פרמטרים.

ערכי הרדיוסים r ו־R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.

ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה?

אם כן – מְצאו את t ואת k . אם לא – נַמקו.

פתרון מלא

סעיף א

המעגלים משיקים מבחוץ, ולכן המרחק בין המרכזים שווה לסכום הרדיוסים:

$$r+R=9, \qquad R=2r$$

$$3r=9 \;\Rightarrow\; r=3,\; R=6$$

המעגל שמרכזו $N(13,0)$:

$$(x-13)^2+y^2=36$$

המרכז $M(a,0)$ נמצא במרחק 9 מ־N:

$$|a-13|=9$$

כלומר $a=4$ או $a=22$.

שני הערכים חיוביים, ולכן שתי אפשרויות:

$$(x-4)^2+y^2=9$$

$$(x-22)^2+y^2=9$$

תשובה: N: $(x-13)^2+y^2=36$. M: $(x-4)^2+y^2=9$ **או** $(x-22)^2+y^2=9$

סעיף ב

מכיוון ש־$a<13$: $a=4$, כלומר המעגלים $(x-4)^2+y^2=9$ ו־$(x-13)^2+y^2=36$.

לשני מעגלים המשיקים מבחוץ יש שלושה משיקים משותפים: המשיק בנקודת ההשקה (מאונך לקו המרכזים), ושני משיקים חיצוניים.

שני המעגלים ושלושת המשיקים המשותפים

תשובה: שלושה משיקים משותפים: המשיק בנקודת ההשקה $(7,0)$ ושני משיקים חיצוניים (ראו סקיצה).

סעיף ג

נקודת ההשקה נמצאת על קו המרכזים (ציר ה־x), במרחק $r=3$ מ־$M(4,0)$ בכיוון N: הנקודה $(7,0)$.

המשיק בנקודה זו מאונך לרדיוס, שמונח על ציר ה־x, ולכן המשיק אנכי:

$$x=7$$

תשובה: $x=7$

סעיף ד

הישר $mx-y+n=0$ משיק למעגל כאשר המרחק ממרכז המעגל אל הישר שווה לרדיוס:

$$\frac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=3$$
$$\frac{|13m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=6$$

נחלק את המשוואות: $|13m+n|=2|4m+n|$.

אם הביטויים באותו סימן (שני המרכזים מאותו צד של הישר – משיק חיצוני):

$$13m+n=8m+2n \;\Rightarrow\; n=5m$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$|9m|=3\sqrt{m^2+1}$$
$$81m^2=9m^2+9$$
$$m^2=\frac{1}{8} \;\Rightarrow\; m=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

אם הביטויים בסימנים הפוכים: $13m+n=-8m-2n$, כלומר $n=-7m$, ואז $|-3m|=3\sqrt{m^2+1}$, כלומר $m^2=m^2+1$ – אין פתרון (המשיק האמצעי $x=7$ אנכי ואין לו שיפוע).

תשובה: $m=\frac{\sqrt{2}}{4},\ n=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ **או** $m=-\frac{\sqrt{2}}{4},\ n=-\frac{5\sqrt{2}}{4}$

סעיף ה

שני הישרים מסעיף ד הם $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(x+5)$, שניהם עוברים בנקודה $(-5,0)$ על ציר ה־x.

המרחק של נקודה $(c,0)$ מכל אחד מהישרים:

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{4}(c+5)\right|}{\sqrt{\frac{1}{8}+1}}=\frac{|c+5|}{3}$$

כדי שהישרים ישיקו למעגל שמרכזו $(t,0)$ ורדיוסו 3:

$$|t+5|=9$$

כלומר $t=4$ או $t=-14$.

ולמעגל שמרכזו $(k,0)$ ורדיוסו 6:

$$|k+5|=18$$

כלומר $k=13$ או $k=-23$.

המעגלים צריכים להשיק זה לזה מבחוץ, כלומר $|t-k|=r+R=9$. הזוג $t=4,\ k=13$ הוא זוג המעגלים המקורי; הזוגות $(4,-23)$ ו־$(-14,13)$ נותנים מרחק 27. נשאר:

$$t=-14, \qquad k=-23$$

כלומר כן – המעגלים $(x+14)^2+y^2=9$ ו־$(x+23)^2+y^2=36$.

תשובה: כן, $t=-14,\ k=-23$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 1

1. מעגל שמרכזו בנקודה M חסום במשולש ABC.

הצלע AB נמצאת על הישר $2x+y-13=0$ והצלע AC נמצאת על הישר $-x+2y+4=0$.

מרכז המעגל M נמצא על הישר $y=x-1$. ראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש ABC.

א. מצא את משוואת המעגל החסום במשולש ABC.

נתון כי הישר BM מאונך לציר ה־x.

ב. מצא את משוואת הצלע BC.

ג. מצא את המרחק בין מרכז המעגל החסום במשולש ABC ובין מרכז המעגל החוסם את המשולש הזה.

פתרון מלא

סעיף א

שיפוע AB הוא -2 ושיפוע AC הוא $\frac{1}{2}$, ולכן $AB \perp AC$.

מרכז המעגל החסום $M(x,\ x-1)$ נמצא במרחק שווה משתי הצלעות:

המרחק מ־AB:

$$\frac{|2x+(x-1)-13|}{\sqrt{5}} = \frac{|3x-14|}{\sqrt{5}}$$

המרחק מ־AC:

$$\frac{|-x+2(x-1)+4|}{\sqrt{5}} = \frac{|x+2|}{\sqrt{5}}$$

נשווה:

$$|3x-14| = |x+2|$$

כלומר $x=8$ או $x=3$.

ראשית הצירים בתוך המשולש, ולכן גם M נמצא באותו צד של כל צלע כמו הראשית. בראשית: $2x+y-13 = -13 < 0$ ו־$-x+2y+4 = 4 > 0$.

עבור $M(3,2)$: $6+2-13=-5<0$ ו־$-3+4+4=5>0$ ✓. עבור $M(8,7)$: $16+7-13=10>0$ ✗.

$$r = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=5$$

המשולש ABC והמעגל החסום

תשובה: $(x-3)^2+(y-2)^2=5$

סעיף ב

BM מאונך לציר ה־x, ולכן $x_B=3$. B על AB:

$$y_B = 13-2\cdot 3 = 7 \ \Rightarrow\ B(3,7)$$

BM חוצה את זווית B והוא אנכי, ולכן BA ו־BC יוצרים זוויות שוות עם הישר האנכי $x=3$, כל אחד מצד אחר שלו. מכאן שזוויות השיפוע שלהם (עם הכיוון החיובי של ציר ה־x) הן α ו־$180^\circ-\alpha$, ו־$\tan(180^\circ-$

$:\alpha) = -\tan\alpha$

$m_{BC} = -m_{AB} = -(-2) = 2$

$y - 7 = 2(x - 3)$

$y = 2x + 1$

בדיקה – המרחק מ־$M(3,2)$: $r = \sqrt{5} = \frac{|6-2+1|}{\sqrt{5}}$ ✓.

תשובה: $y = 2x + 1$

סעיף ג

הזווית A ישרה, ולכן מרכז המעגל החוסם הוא אמצע היתר BC.

הנקודה C – חיתוך BC עם AC:

$-x + 2(2x + 1) + 4 = 0$

$3x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; C(-2, -3)$

אמצע BC: $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$. המרחק מ־$M(3,2)$:

$d = 3 - \frac{1}{2} = 2.5$

תשובה: 2.5

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 1

1. הנקודה $(t\ ,\ 0)$ היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית. t הוא פרמטר חיובי.

אורך הציר הראשי של האליפסה הוא $4t$.

בסעיפים שלפניך הבע את תשובותיך באמצעות t, אם יש צורך.

א. מצא את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.

המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בשתי נקודות, A ו־B. הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו־B.

ישר המאונך לציר ה־x, עובר במוקד הפרבולה וחותך את הפרבולה בשתי נקודות, C ו־D.

הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D.

ג. מצא את שיעורי הנקודות C ו־D.

ד. **(1)** הסבר מדוע ארבע הנקודות A, B, C ו־D נמצאות על מעגל אחד.

(2) מצא את שיעורי מרכז המעגל הזה.

פתרון מלא

סעיף א

מוקד הפרבולה הקנונית $y^2=2px$ הוא $\left(\frac{p}{2},0\right)$, ולכן $\frac{p}{2}=t$:

$$y^2=4tx$$

באליפסה: $2a=4t$, כלומר $a=2t$, ו־$c=t$:

$$b^2=a^2-c^2=4t^2-t^2=3t^2$$

$$\frac{x^2}{4t^2}+\frac{y^2}{3t^2}=1$$

הפרבולה, האליפסה והמעגל דרך A, B, C, D

תשובה: פרבולה: $y^2=4tx$

אליפסה: $\frac{x^2}{4t^2}+\frac{y^2}{3t^2}=1$

סעיף ב

המדריך של הפרבולה: $x=-t$. נציב באליפסה:

$$\frac{t^2}{4t^2}+\frac{y^2}{3t^2}=1$$

$$\frac{y^2}{3t^2}=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ y^2=\frac{9t^2}{4}$$

$$y=\pm 1.5t$$

תשובה: $A(-t,\ 1.5t)$, $B(-t,\ -1.5t)$

סעיף ג

הישר הוא $x=t$. נציב בפרבולה:

$$y^2 = 4t \cdot t = 4t^2 \;\Rightarrow\; y = \pm 2t$$

תשובה: $C(t,\ 2t)$, $D(t,\ -2t)$

סעיף ד (1)

AB ו־CD מאונכים לציר ה־x, ולכן מקבילים. שתי הצלעות סימטריות ביחס לציר ה־x, ולכן $AC = BD$.

המרובע $ABDC$ הוא טרפז שווה שוקיים. בטרפז שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות, וזוויות שעל אותה שוק משלימות ל־180° (זוויות חד־צדדיות בין ישרים מקבילים). לכן סכום כל זוג זוויות נגדיות הוא 180°, ולפי המשפט: מרובע שסכום זוג זוויות נגדיות בו 180° – אפשר לחסום אותו במעגל.

תשובה: $ABDC$ טרפז שווה שוקיים, ולכן הוא בר־חסימה במעגל.

סעיף ד (2)

מכיוון שהמרובע סימטרי ביחס לציר ה־x, מרכז המעגל עליו: $(k, 0)$. נשווה את המרחקים ל־A ול־C:

$$(k+t)^2 + (1.5t)^2 = (k-t)^2 + (2t)^2$$

$$2kt + 2.25t^2 = -2kt + 4t^2$$

$$4kt = 1.75t^2$$

$$k = \frac{7t}{16}$$

תשובה: $\left(\frac{7t}{16},\ 0\right)$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.