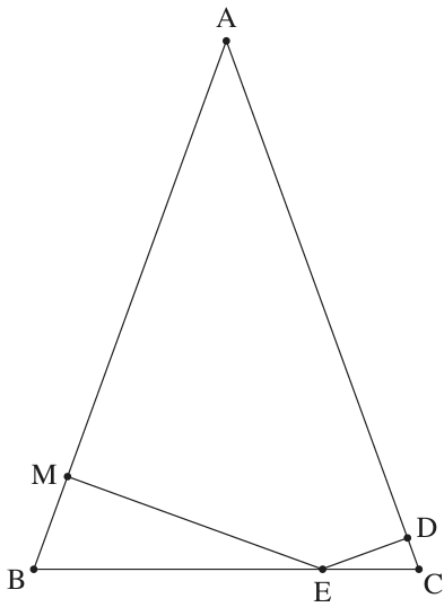
טריגונומטרייה במישור – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י״א (שאלון 571) • 17 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 5



5. בסרטוט שלפניכם משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$.

הנקודה E נמצאת על הבסיס BC כך ש־ $BE = 3 \cdot EC$.

הנקודה D נמצאת על הצלע AC כך ש־ ED מאונך ל־ AC.

הנקודה M נמצאת על הצלע AB כך ש־ EM מאונך ל־ AB.

נסמן: $EC = k$, $\sphericalangle ABC = \alpha$, $30^o < \alpha < 90^o$.

א. הביעו באמצעות k ו־ α את אורכי הקטעים DE ו־ ME.

נתון כי סכום שטחי המשולשים CED ו־ BEM הוא $1.6k^2$.

ב. מצאו את הערך של α.

נתון כי אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED הוא 29.

ג. מצאו את הערך של k.

פתרון מלא

סעיף א

$$EC = k, \quad BE = 3k, \quad BC = 4k$$

במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות: $\angle B = \angle C = \alpha$.

במשולש EDC $(\angle EDC = 90^\circ)$:

$$\sin\alpha = \frac{DE}{EC} \;\Rightarrow\; DE = k\sin\alpha$$

במשולש EMB $(\angle EMB = 90^\circ)$:

$$\sin\alpha = \frac{ME}{BE} \;\Rightarrow\; ME = 3k\sin\alpha$$

תשובה: $DE = k\sin\alpha, \quad ME = 3k\sin\alpha$

סעיף ב

בשני המשולשים ישרי הזווית נחשב גם את הניצב השני:

$$DC = k\cos\alpha, \qquad BM = 3k\cos\alpha$$

$$S_{\triangle EDC} = \frac{DE \cdot DC}{2}$$

$$= \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

$$S_{\triangle EMB} = \frac{ME \cdot BM}{2}$$

$$= \frac{9k^2\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

סכום השטחים:

$$5k^2 \sin\alpha \cos\alpha = 1.6k^2$$

לפי $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$:

$$2.5k^2 \sin 2\alpha = 1.6k^2$$
$$\sin 2\alpha = 0.64$$

יש שני פתרונות עבור 2α בין 0° ל־180°:

$$2\alpha_1 = 39.79^\circ \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 19.90^\circ$$
$$2\alpha_2 = 180^\circ - 39.79^\circ = 140.21^\circ$$
$$\alpha_2 = 70.10^\circ$$

לפי הנתון, α גדולה מ־30°, ולכן:

$$\alpha \approx 70.10^\circ$$

תשובה: $\alpha \approx 70.10^\circ$

סעיף ג

במשולש AED הזווית $\angle ADE = 90^\circ$. לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{AE}{\sin\angle ADE} = 2R$$
$$AE = 2 \cdot 29 \cdot \sin 90^\circ = 58$$

(זווית היקפית של 90° נשענת על קוטר, ולכן AE הוא קוטר.)

נבטא את AE באמצעות k. במשולש ABC נוריד גובה AH לבסיס; הוא גם תיכון, ולכן $HC = 2k$:

$$AC = \frac{HC}{\cos\alpha} = \frac{2k}{\cos\alpha}$$

במשולש AEC, לפי משפט הקוסינוסים:

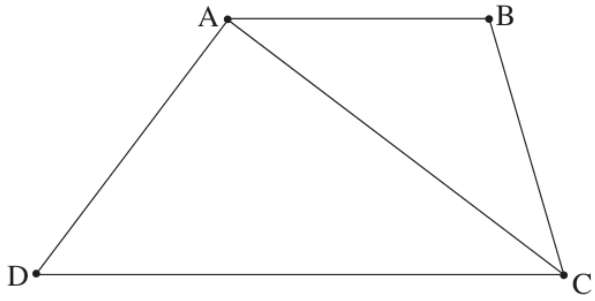
$$AE^2 = AC^2 + EC^2$$
$$\quad -2 \cdot AC \cdot EC \cdot \cos\alpha$$
$$= \frac{4k^2}{\cos^2\alpha} + k^2 - 4k^2$$
$$= k^2\left(\frac{4}{\cos^2\alpha} - 3\right)$$

נציב $\alpha = 70.10^\circ$ ($\cos\alpha \approx 0.3403$):

$$k^2 \cdot 31.54 \approx 58^2 = 3364$$
$$k^2 \approx 106.7 \;\Rightarrow\; k \approx 10.33$$

תשובה: $k \approx 10.33$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 5



5. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$.

נתון כי אורך הבסיס AB שווה לאורך הצלע BC.

נסמן: $AB = BC = k$, $\sphericalangle ACB = \alpha$, $0^o < \alpha < 90^o$.

א. הראו כי $AC = 2k \cdot \cos\alpha$.

נתון: $AD = 1.2k$, $DC = 2k$.

ב. מצאו את הערך של α.

ג. מצאו את גודל הזווית ADC.

המשכי הצלעות DA ו־CB נחתכים בנקודה E.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל <u>החסום</u> במשולש EDC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של k.

פתרון מלא

סעיף א

$AB = BC$, ולכן המשולש ABC שווה שוקיים ו־$\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ (זוויות בסיס). לכן:

$$\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$$

לפי משפט הסינוסים במשולש ABC:

$$\frac{AC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{BC}{\sin\alpha}$$

נשתמש בזהויות:

$$\sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

ולכן:

$$AC = \frac{k \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$AC = 2k\cos\alpha$$

תשובה: הוכחה לפי משפט הסינוסים במשולש ABC.

סעיף ב

$AB \parallel DC$, ולכן $\angle ACD = \angle BAC = \alpha$ (זוויות מתחלפות בין מקבילים).

לפי משפט הקוסינוסים במשולש ACD:

$$AD^2 = AC^2 + DC^2$$
$$-2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos\alpha$$

נציב $AC = 2k\cos\alpha$, $DC = 2k$, $AD = 1.2k$:

$$1.44k^2 = 4k^2\cos^2\alpha + 4k^2$$
$$-8k^2\cos^2\alpha$$

ולכן:

$$1.44k^2 = 4k^2 - 4k^2\cos^2\alpha$$
$$1.44k^2 = 4k^2\sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = 0.36$$
$$\sin\alpha = 0.6$$

(הזווית חדה, ולכן $\sin\alpha > 0$.)

$$\alpha \approx 36.87^\circ$$

תשובה: הזווית: $\alpha \approx 36.87^\circ$

סעיף ג

$\cos\alpha = 0.8$, ולכן:

$$AC = 2k \cdot 0.8 = 1.6k$$

לפי משפט הסינוסים במשולש ACD:

$$\frac{AC}{\sin\angle ADC} = \frac{AD}{\sin\alpha}$$
$$\sin\angle ADC = \frac{1.6k \cdot 0.6}{1.2k} = 0.8$$

שני פתרונות אפשריים:

$$\angle ADC \approx 53.13^\circ$$

או

$$\angle ADC \approx 126.87^\circ$$

הזווית $\angle ADC$ נמצאת מול הצלע $AC = 1.6k$, והזווית $\angle DAC$ מול הצלע $DC = 2k$ הגדולה יותר. לכן $\angle ADC < \angle DAC$, ו־$\angle ADC$ אינה יכולה להיות קהה (אחרת גם $\angle DAC$ הייתה קהה). לכן:

$$\angle ADC \approx 53.13^\circ$$

הערה: אפשר גם לשים לב ש־

$$AD^2 + AC^2 = 1.44k^2 + 2.56k^2$$
$$= 4k^2 = DC^2$$

כלומר $\angle DAC = 90^\circ$ ו־$\angle ADC = 90^\circ - \alpha$.

תשובה: הזווית: $\angle ADC \approx 53.13^\circ$

סעיף ד

הזוויות במשולש EDC:

$$\angle EDC = \angle ADC \approx 53.13^\circ$$
$$\angle DCE = \angle ACD + \angle ACB$$
$$= 2\alpha \approx 73.74^\circ$$
$$\angle DEC \approx 180^\circ - 53.13^\circ - 73.74^\circ$$
$$\angle DEC \approx 53.13^\circ$$

$\angle DEC = \angle EDC$, ולכן המשולש שווה שוקיים:

$$CE = CD = 2k$$

הצלע DE לפי משפט הסינוסים, עם $\sin 2\alpha = 2 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 0.96$:

$$DE = \frac{DC \cdot \sin \angle DCE}{\sin \angle DEC}$$
$$= \frac{2k \cdot 0.96}{0.8} = 2.4k$$

השטח:

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot DC \cdot CE \cdot \sin \angle DCE$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot 2k \cdot 2k \cdot 0.96 = 1.92k^2$$

רדיוס המעגל החסום: נחבר את מרכז המעגל לשלושת הקודקודים ונקבל שלושה משולשים שהגובה בכל אחד מהם הוא r, ולכן $S = r \cdot p$, כאשר p חצי ההיקף:

$$p = \frac{2k + 2k + 2.4k}{2} = 3.2k$$
$$r = \frac{S}{p} = \frac{1.92k^2}{3.2k} = 0.6k$$

לפי הנתון $r = 14$:

$$0.6k = 14$$
$$k = \frac{70}{3} \approx 23.33$$

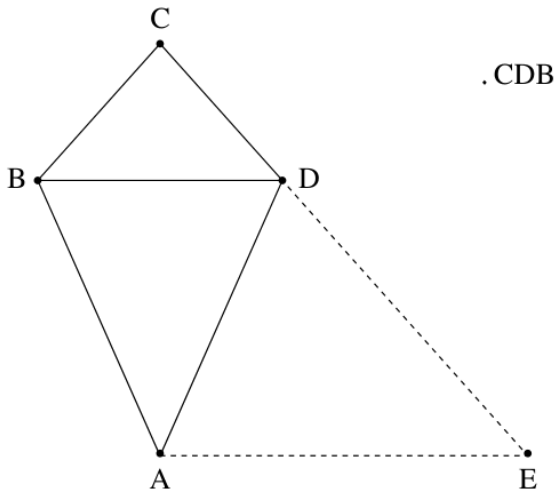
תשובה: $k = \frac{70}{3} \approx 23.33$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 5

5. בסרטוט שלפניכם דלתון $ABCD$ $(CB = CD\ ,\ AB = AD)$.

נתון: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDB = 2\alpha\ ,\ 0^o < \alpha < 45^o$.

נסמן: $AB = k$.



א. הביעו באמצעות k ו־α את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD גדול פי $\frac{4}{3}$ מרדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB.

ב. מצאו את גודל הזווית BAD.

הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABD.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל ל־BD וחותך את המשך הצלע CD בנקודה E.

נתון כי שטח המשולש AOE הוא 70.

ג. מצאו את הערך של k.

פתרון מלא

סעיף א

אורך BD. במשולש ABD: $AB = AD = k$ ו־$\angle BAD = 2\alpha$, ולכן זוויות הבסיס:

$$\angle ABD = \angle ADB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

לפי משפט הסינוסים במשולש ABD:

$$\frac{BD}{\sin 2\alpha} = \frac{k}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$BD = \frac{k \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2k\sin\alpha$$

המשולש CDB. $CB = CD$, ולכן $\angle CBD = \angle CDB = 2\alpha$ ו־

$$\angle BCD = 180^\circ - 4\alpha$$

לפי משפט הסינוסים במשולש CDB, כאשר R_1 רדיוס המעגל החוסם אותו:

$$\frac{BD}{\sin(180^\circ - 4\alpha)} = 2R_1$$

$$2R_1 = \frac{2k\sin\alpha}{\sin 4\alpha}$$

$$R_1 = \frac{k\sin\alpha}{\sin 4\alpha}$$

תשובה: $R_{CDB} = \dfrac{k\sin\alpha}{\sin 4\alpha}$

סעיף ב

רדיוס המעגל החוסם את ABD, שנסמן R_2, לפי משפט הסינוסים:

$$2R_2 = \frac{BD}{\sin 2\alpha} = \frac{2k\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{k}{\cos\alpha}$$
$$R_2 = \frac{k}{2\cos\alpha}$$

נתון $R_2 = \frac{4}{3}R_1$:

$$\frac{k}{2\cos\alpha} = \frac{4}{3}\cdot\frac{k\sin\alpha}{\sin 4\alpha}$$
$$3\sin 4\alpha = 8\sin\alpha\cos\alpha = 4\sin 2\alpha$$

נציב $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$:

$$6\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 4\sin 2\alpha$$

$0^\circ < 2\alpha < 90^\circ$, לכן $\sin 2\alpha \neq 0$ ומותר לחלק:

$$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$$
$$2\alpha \approx 48.19^\circ$$

תשובה: $\angle BAD \approx 48.19^\circ$

סעיף ג

הזווית $\angle OAE$. המשולש ABD שווה שוקיים, ולכן חוצה זווית הראש A הוא גם האנך האמצעי של BD. מרכז המעגל החוסם O נמצא על האנך האמצעי, כלומר $AO \perp BD$. נתון $AE \parallel BD$, ולכן $AO \perp AE$. המשולש AOE ישר זווית ב־A:

$$S_{AOE} = \tfrac{1}{2}\cdot AO\cdot AE$$

$AO = R_2 = \frac{k}{2\cos\alpha}$ (סעיף ב).

האורך AE. במשולש ADE:

- $AE \parallel BD$, זוויות מתחלפות – $\angle DAE = \angle ADB = 90^\circ - \alpha$
- $AE \parallel BD$, זוויות מתאימות – $\angle AED = \angle BDC = 2\alpha$

לפי משפט הסינוסים במשולש ADE:

$$\frac{AE}{\sin\angle ADE} = \frac{AD}{\sin\angle AED}$$
$$\angle ADE = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 2\alpha = 90^\circ - \alpha$$
$$AE = \frac{k\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{k}{2\sin\alpha}$$

השטח.

$$S_{AOE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2\cos\alpha}\cdot\frac{k}{2\sin\alpha} = \frac{k^2}{4\sin 2\alpha}$$

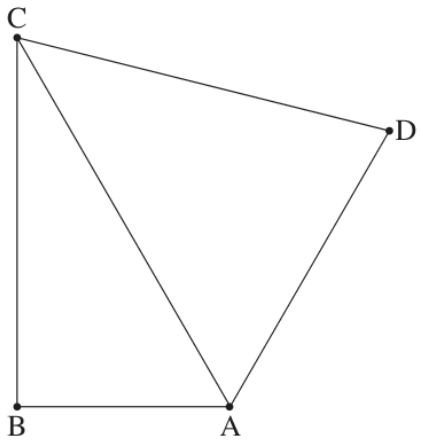
מ־$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$: $\sin 2\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\frac{k^2}{4\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}} = 70$$

$$k^2 = \frac{280\sqrt{5}}{3} \approx 208.70$$
$$k \approx 14.446$$

תשובה: $k \approx 14.446$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 5



5. בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle ABC = 90^o$).

על הצלע AC בנו משולש נוסף ACD כך ש־AC הוא חוצה זווית BAD.

נסמן: $AB = k$, $\sphericalangle CAB = \alpha$.

א. הביעו באמצעות k ו־α את האורך של AC.

נתון: $AD = 1.5 \cdot k$, $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$.

ב. חשבו את הערך של α.

הציבו $\alpha = 60^o$ וענו על סעיפים ג–ד.

הנקודה M היא מרכז המעגל <u>החסום</u> במשולש ABC.

ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.

הנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

נתון: $ME = 6$.

ד. חשבו את הערך של k.

פתרון מלא

סעיף א

במשולש ישר־הזווית ABC הזווית B ישרה. AB הוא הניצב שליד הזווית α, ו־AC הוא היתר:

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{k}{AC}$$

$$AC = \frac{k}{\cos\alpha}$$

תשובה: $AC = \frac{k}{\cos\alpha}$

סעיף ב

AC חוצה את הזווית BAD, ולכן $\angle CAD = \angle CAB = \alpha$.

במשולש ACD לפי משפט הקוסינוסים:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 \\ \quad -2 \cdot AC \cdot AD\cos\alpha$$

נציב את הנתונים:

$$CD = \sqrt{3.25}\,k, \quad AD = 1.5k$$

$$AC = \frac{k}{\cos\alpha}$$

$$3.25k^2 = \frac{k^2}{\cos^2\alpha} + 2.25k^2 \\ \quad -2 \cdot \frac{k}{\cos\alpha} \cdot 1.5k \cdot \cos\alpha$$

$$3.25k^2 = \frac{k^2}{\cos^2\alpha} + 2.25k^2 - 3k^2$$

נחלק ב־k^2:

$$3.25 = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 0.75$$
$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 4 \;\Rightarrow\; \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$$

α זווית חדה במשולש ישר־זווית, ולכן $\cos\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\alpha = 60^\circ$$

תשובה: $\alpha = 60^\circ$

סעיף ג

עבור $\alpha = 60^\circ$, במשולש ABC:

$$AC = \frac{k}{\cos 60^\circ} = 2k$$
$$BC = AB \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}\,k$$

רדיוס המעגל החסום נמצא לפי הנוסחה:

$$S = p \cdot r$$

כאן S הוא שטח המשולש, ו־p מחצית היקפו:

$$S = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{k \cdot \sqrt{3}k}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}k^2$$
$$p = \frac{k + \sqrt{3}k + 2k}{2} = \frac{(3+\sqrt{3})k}{2}$$
$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{3}k^2}{(3+\sqrt{3})k} = \frac{\sqrt{3}k}{3+\sqrt{3}}$$

נכפיל את המונה והמכנה ב־$(3-\sqrt{3})$:

$$r = \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})k}{9-3} = \frac{(3\sqrt{3}-3)k}{6}$$
$$r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,k \approx 0.366k$$

אפשר גם לפי קטעי המשיקים. במשולש ישר־זווית:

$$r = \frac{AB + BC - AC}{2}$$
$$r = \frac{k + \sqrt{3}k - 2k}{2}$$

ומתקבלת אותה תוצאה.

תשובה: $r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,k \approx 0.366k$

סעיף ד

במשולש ישר־זווית מרכז המעגל החוסם הוא אמצע היתר, ולכן E אמצע AC:

$$AE = \frac{AC}{2} = k$$

מרכז המעגל החסום M נמצא על חוצה הזווית A, ולכן:

$$\angle MAE = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

משולש ABC עם המעגל החסום, מרכזו M, ואמצע היתר E

אורך AM**:** המרחק מ־M לצלע AB הוא r. במשולש ישר־הזווית שבו AM יתר והזווית ליד A היא 30°:

$$AM = \frac{r}{\sin 30^\circ} = 2r = (\sqrt{3}-1)k$$

במשולש AME לפי משפט הקוסינוסים:

$$\begin{aligned} ME^2 &= AM^2 + AE^2 \\ &\quad -2 \cdot AM \cdot AE \cos 30^\circ \\ &= (\sqrt{3}-1)^2 k^2 + k^2 \\ &\quad -2(\sqrt{3}-1)k \cdot k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= (4 - 2\sqrt{3})k^2 + k^2 - (3-\sqrt{3})k^2 \\ &= (2-\sqrt{3})k^2 \end{aligned}$$

נתון $ME = 6$:

$$(2-\sqrt{3})k^2 = 36$$

$$k = \frac{6}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \approx 11.59$$

בצורה מדויקת:

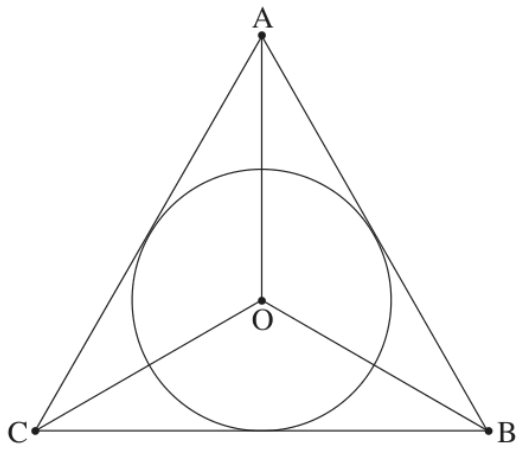
$$k = 3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

תשובה: $k = \frac{6}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \approx 11.59$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 5

5. במשולש שווה שוקיים ABC $(AC = AB)$ חסום מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r (ראו סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle ACB = 2\alpha$.



א. **(1)** הביעו באמצעות r ו־α את אורך הקטע CO.

(2) הביעו באמצעות r ו־α את אורך הצלע AC.

נתון כי אורך הצלע AC גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הקטע CO.

ב. מצאו את הערך של α.

הציבו $\alpha = 30^\circ$ וענו על הסעיפים ג–ד.

המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K.

נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{175}$.

ג. מצאו את הערך של r.

הנקודה E נמצאת על הצלע CB.

נתון כי שטח המשולש CKE הוא 18.

ד. חשבו את אורך הקטע BE.

פתרון מלא

סעיף א (1)

O מרכז המעגל החסום במשולש, ולכן CO חוצה את הזווית C:

$$\angle OCB = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

נסמן ב־D את נקודת ההשקה של המעגל עם הצלע CB. הרדיוס מאונך למשיק, ולכן $OD \perp CB$ ו־$OD = r$.

במשולש ישר הזווית ODC:

$$\sin\alpha = \frac{OD}{CO} = \frac{r}{CO}$$

$$CO = \frac{r}{\sin\alpha}$$

תשובה: $CO = \frac{r}{\sin\alpha}$

סעיף א (2)

במשולש ODC:

$$\tan\alpha = \frac{OD}{CD}$$

$$CD = \frac{r}{\tan\alpha} = \frac{r\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

המשולש ABC שווה שוקיים, ולכן הגובה לבסיס CB הוא גם חוצה הזווית A ועובר דרך O; לכן D היא גם עקב הגובה מ־A, ו־$\angle ADC = 90^\circ$.

במשולש ישר הזווית ADC הזווית C היא 2α:

$$\cos 2\alpha = \frac{CD}{AC}$$
$$AC = \frac{CD}{\cos 2\alpha} = \frac{r\cos\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha}$$

תשובה: $AC = \frac{r\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}$

סעיף ב

נתון $AC = \sqrt{3}\cdot CO$:

$$\frac{r\cos\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{3}\,r}{\sin\alpha}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{3}\cos 2\alpha$$

נשתמש בזהות $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$:

$$2\sqrt{3}\cos^2\alpha - \cos\alpha - \sqrt{3} = 0$$
$$\cos\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4\sqrt{3}} = \frac{1\pm 5}{4\sqrt{3}}$$

הזווית 2α היא זווית בסיס במשולש שווה שוקיים, ולכן היא חדה. מכאן α חדה ו־$\cos\alpha$ חיובי:

$$\cos\alpha = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha = 30^\circ$$

תשובה: $\alpha = 30^\circ$

סעיף ג

עבור $\alpha = 30^\circ$ זוויות הבסיס הן:

$$\angle ACB = \angle ABC = 60^\circ$$

ולכן המשולש ABC שווה צלעות. גם BO חוצה זווית, ולכן:

$$\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$$

במשולש BOC:

$$\angle BOC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$$

לפי סעיף א (1):

$$CO = \frac{r}{\sin 30^\circ} = 2r$$

הנקודה K על המעגל, ולכן $OK = r$.

במשולש COK לפי משפט הקוסינוסים:

$$CK^2 = CO^2 + OK^2$$
$$-2\cdot CO\cdot OK\cdot\cos 120^\circ$$

נציב $CK = \sqrt{175}$:

$$175 = 4r^2 + r^2 - 4r^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$175 = 7r^2$$

$$r^2 = 25 \;\Rightarrow\; r = 5$$

תשובה: $r = 5$

סעיף ד

לפי סעיף ג $r = 5$, וכמו ב־CO גם:

$$BO = 2r = 10$$
$$BK = BO - OK = 10 - 5 = 5$$

הגובה של המשולש CKE לבסיס CE הוא המרחק של K מהצלע CB. נוריד אנך KH ל־CB; במשולש ישר הזווית KHB:

$$KH = BK \cdot \sin 30^\circ = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2.5$$

שטח המשולש CKE:

$$\frac{CE \cdot KH}{2} = 18$$
$$\frac{CE \cdot 2.5}{2} = 18 \;\Rightarrow\; CE = 14.4$$

אורך הצלע CB, לפי סעיף א (2):

$$CD = \frac{r}{\tan 30^\circ} = 5\sqrt{3}$$
$$CB = 2 \cdot CD = 10\sqrt{3}$$
$$BE = CB - CE = 10\sqrt{3} - 14.4$$
$$BE \approx 2.92$$

תשובה: $BE = 10\sqrt{3} - 14.4 \approx 2.92$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 5

5. נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו־AC המשיקים למעגל.

הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל, כמתואר בסרטוט.

נתון: $AE = CE$, $BO \perp AO$.

נסמן ב־2β את הזווית BAC.

א. הביעו באמצעות R ו־β את האורך של AB.

נתון כי האורך של AB הוא $2.5R$,

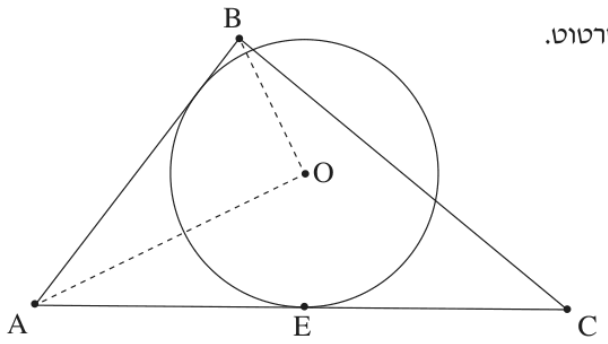
והזווית BAC היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של β.

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש AOB.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל <u>החוסם</u> את המשולש ABC הוא 8.

ד. מצאו את הערך של R.



פתרון מלא

סעיף א

חוצה את הזווית: AB ו־AC משיקים למעגל מאותה נקודה A, ולכן מרכז המעגל O נמצא על חוצה הזווית BAC:

$$\angle OAE = \angle OAB = \beta$$

המשולש AOE: הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה, ולכן $\angle AEO = 90^\circ$ ו־$OE = R$:

$$\sin\beta = \frac{OE}{AO} = \frac{R}{AO} \;\Rightarrow\; AO = \frac{R}{\sin\beta}$$

המשולש AOB: לפי הנתון $\angle AOB = 90^\circ$, ולכן:

$$\cos\beta = \frac{AO}{AB} \;\Rightarrow\; AB = \frac{AO}{\cos\beta}$$

$$AB = \frac{R}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{2R}{\sin 2\beta}$$

תשובה: $AB = \frac{2R}{\sin 2\beta} = \frac{R}{\sin\beta\cos\beta}$

סעיף ב

נציב $AB = 2.5R$ בביטוי מסעיף א:

$$\frac{2R}{\sin 2\beta} = 2.5R$$

$$\sin 2\beta = \frac{2}{2.5} = 0.8$$

הזווית $BAC = 2\beta$ חדה, ולכן:

$$2\beta \approx 53.13^\circ \;\Rightarrow\; \beta \approx 26.57^\circ$$

תשובה: $\beta \approx 26.57^\circ$

סעיף ג

בעזרת מחשבון: $\tan\beta = \tan 26.57^\circ = 0.5$ ו־$\cos 2\beta = \cos 53.13^\circ = 0.6$.

האורך AC: במשולש AOE:

$$\tan\beta = \frac{OE}{AE} \;\Rightarrow\; AE = \frac{R}{0.5} = 2R$$

לפי הנתון $AE = CE$, ולכן:

$$AC = 2AE = 4R$$

שטח המשולש ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot AC \cdot \sin 2\beta$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2.5R \cdot 4R \cdot 0.8 = 4R^2$$

שטח המשולש AOB, שהוא ישר־זווית ב־O:

$$OB = AO\cdot\tan\beta, \qquad AO = \frac{R}{\sin\beta}$$
$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB$$
$$= \frac{1}{2}\cdot AO^2\cdot\tan\beta$$

בעזרת מחשבון $\sin^2\beta = \sin^2 26.57^\circ = 0.2$, ולכן $AO^2 = \frac{R^2}{0.2} = 5R^2$:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot 5R^2 \cdot 0.5 = 1.25R^2$$

היחס:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AOB}} = \frac{4R^2}{1.25R^2}$$
$$= \frac{16}{5} = 3.2$$

תשובה: $\frac{S_{ABC}}{S_{AOB}} = \frac{16}{5} = 3.2$

סעיף ד

בעזרת משפט הקוסינוסים במשולש ABC, עם $AB = 2.5R$, $AC = 4R$ ו־$\cos 2\beta = 0.6$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos 2\beta$$
$$= 6.25R^2 + 16R^2$$
$$-2\cdot 2.5R\cdot 4R\cdot 0.6$$
$$= 22.25R^2 - 12R^2 = 10.25R^2$$
$$BC = R\sqrt{10.25} \approx 3.2016R$$

משפט הסינוסים במשולש ABC, עם רדיוס המעגל החוסם 8:

$$\frac{BC}{\sin 2\beta} = 2\cdot 8$$

$$BC = 16 \cdot 0.8 = 12.8$$

נשווה:

$$3.2016R = 12.8$$
$$R = \frac{12.8}{3.2016} \approx 3.998$$

כלומר $R \approx 4$. הערך המדויק: $R = \frac{128}{5\sqrt{41}}$.

תשובה: $R \approx 4$

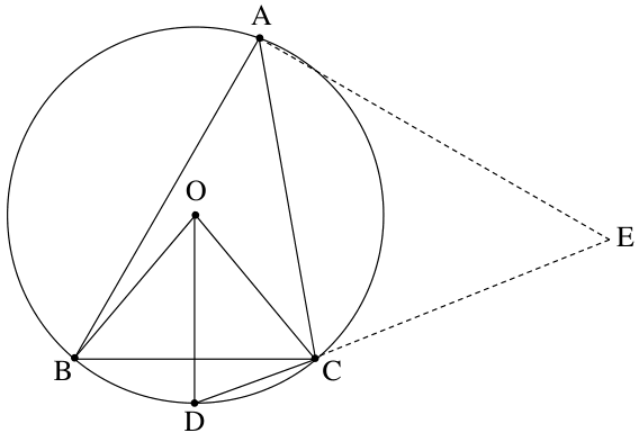
בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 5

5. משולש ABC חד זוויות חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

הנקודה D היא אמצע הקשת הקטנה BC, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\sphericalangle ABC = 60^o$.

נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$.



א. הביעו באמצעות R ו־α את שטחי המשולשים ABC ו־ODC.

נתון כי היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ODC הוא $2\sqrt{3}\sin(80^o)$.

ב. מצאו את הערך של α.

הנקודה E נמצאת על המשך המיתר DC כך ש־$\sphericalangle CAE = 50^o$, כמתואר בסרטוט.

ג. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החסום במשולש ACE.

פתרון מלא

סעיף א

שטח המשולש ABC. זוויות המשולש: $\angle B = 60^\circ$, $\angle A = \alpha$, ולכן:

$$\angle C = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha$$

לפי משפט הסינוסים במעגל החוסם:

$$BC = 2R\sin\alpha$$

$$AB = 2R\sin(120^\circ - \alpha)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2R\sin(120^\circ-\alpha)\cdot 2R\sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}R^2\sin\alpha\sin(120^\circ-\alpha)$$

שטח המשולש ODC. הזווית המרכזית $\angle BOC$ נשענת על אותה קשת כמו הזווית ההיקפית $\angle BAC$:

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$$

D אמצע הקשת BC, ולכן:

$$\angle DOC = \tfrac{1}{2}\angle BOC = \alpha$$

וגם $OD = OC = R$ (רדיוסים):

$$S_{ODC} = \frac{1}{2}\cdot OD \cdot OC \cdot \sin\alpha$$

$$S_{ODC} = \frac{1}{2}R^2\sin\alpha$$

תשובה: $S_{ABC} = \sqrt{3}R^2\sin\alpha\sin(120^\circ-\alpha)$

$S_{ODC} = \tfrac{1}{2}R^2\sin\alpha$

סעיף ב

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ODC}} = \frac{\sqrt{3}R^2 \sin\alpha \sin(120^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2}R^2 \sin\alpha}$$
$$= 2\sqrt{3}\sin(120^\circ - \alpha)$$

לפי הנתון:

$$2\sqrt{3}\sin(120^\circ - \alpha) = 2\sqrt{3}\sin 80^\circ$$
$$\sin(120^\circ - \alpha) = \sin 80^\circ$$

שתי אפשרויות:

$$120^\circ - \alpha = 80^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 40^\circ$$
$$120^\circ - \alpha = 100^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 20^\circ$$

נבדוק את האפשרות השנייה:

$$\alpha = 20^\circ \;\Rightarrow\; \angle C = 120^\circ - 20^\circ = 100^\circ$$

זו זווית קהה, אבל נתון שהמשולש חד־זוויות. לכן:

$$\alpha = 40^\circ$$

תשובה: $\alpha = 40^\circ$

סעיף ג

שימו לב: מבקשים את רדיוס המעגל ה**חסום** במשולש ACE (המעגל שבתוך המשולש).

זוויות המשולש ACE. לפי סעיף ב:

$$\angle ACB = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$$

$\angle BCD$ היא זווית היקפית הנשענת על הקשת BD, שהיא חצי מהקשת BC, ולכן היא חצי מ־$\angle BAC$:

$$\angle BCD = \angle BAD = \tfrac{1}{2}\cdot 40^\circ = 20^\circ$$
$$\angle ACD = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$$
$$\angle ACE = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$
$$\angle AEC = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$$

שתי זוויות שוות (50°), ולכן המשולש ACE שווה שוקיים:

$$CE = CA$$

צלעות המשולש. לפי משפט הסינוסים במשולש ABC:

$$AC = 2R\sin 60^\circ = \sqrt{3}R = CE$$

במשולש שווה השוקיים, הגובה מ־C חוצה את AE:

$$AE = 2\cdot AC\cdot \cos 50^\circ$$
$$= 2\sqrt{3}R\cos 50^\circ \approx 2.2267R$$

שטח וחצי היקף:

$$S = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CE\cdot \sin 80^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 3R^2\sin 80^\circ \approx 1.4772R^2$$

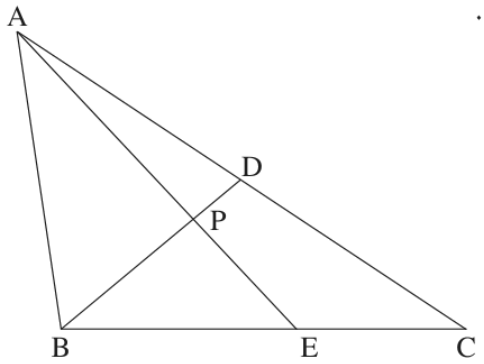
$$p = \frac{\sqrt{3}R + \sqrt{3}R + 2.2267R}{2}$$
$$p \approx 2.8454R$$

רדיוס המעגל החסום: $S = p \cdot r$, ולכן:

$$r = \frac{S}{p} \approx \frac{1.4772R^2}{2.8454R} \approx 0.519R$$

תשובה: $r \approx 0.519R$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 5



5. במשולש ABC, BD הוא תיכון לצלע AC. הנקודה E נמצאת על הצלע BC.
BD ו־AE נחתכים בנקודה P (ראו סרטוט).
נתון: $BP = 3 \cdot PD$.
נסמן: $AB = k$, $\sphericalangle BAP = \alpha$, $\sphericalangle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.

א. הביעו באמצעות α, β ו־k את אורכי הקטעים AP ו־BP.

נתון כי AE ו־BD מאונכים זה לזה, וכי שטח המשולש ABD הוא $\frac{1}{4}k^2$.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

ג. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC
ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEB.

ד. מצאו את אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC, כך שמתקיים $\sphericalangle ABC = 90^o$.
הביעו את תשובתכם באמצעות k.

פתרון מלא

סעיף א

במשולש ABP:

$$\angle APB = 180^\circ - \alpha - \beta$$

לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{AP}{\sin\beta} = \frac{BP}{\sin\alpha} = \frac{k}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}$$

ו־$\sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$, ולכן:

$$AP = \frac{k\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$
$$BP = \frac{k\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

תשובה: $AP = \frac{k\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$
$BP = \frac{k\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

סעיף ב

$AE \perp BD$, ולכן $\angle APB = 90^\circ$ ו־$\alpha + \beta = 90^\circ$. במשולש ישר הזווית ABP:

$$AP = k\cos\alpha$$
$$BP = k\sin\alpha$$

$BP = 3PD$, ולכן:

$$BD = BP + PD = \tfrac{4}{3}BP = \tfrac{4}{3}k\sin\alpha$$

AP הוא הגובה לצלע BD במשולש ABD:

$$S_{\triangle ABD} = \tfrac{1}{2} \cdot BD \cdot AP$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{3}k\sin\alpha \cdot k\cos\alpha$$

$= \frac{1}{3}k^2 \sin 2\alpha$

השתמשנו בזהות $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. לפי הנתון:

$\frac{1}{3}k^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{4}k^2$
$\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$
$2\alpha \approx 48.59^\circ$

או

$2\alpha \approx 131.41^\circ$
$\alpha \approx 24.3^\circ$

או

$\alpha \approx 65.7^\circ$

$\alpha < \beta$ ו־$\alpha + \beta = 90^\circ$, ולכן $\alpha < 45^\circ$:

$\alpha \approx 24.3^\circ$

תשובה: $\alpha \approx 24.3^\circ$

סעיף ג

לפי משפט הסינוסים, רדיוס המעגל החוסם משולש הוא $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ (צלע חלקי פעמיים סינוס הזווית שמולה):

$$R_{AEC} = \frac{AC}{2\sin\angle AEC}$$
$$R_{AEB} = \frac{AB}{2\sin\angle AEB}$$

$\angle AEC$ ו־$\angle AEB$ צמודות, ולכן הסינוסים שלהן שווים. לכן:

$$\frac{R_{AEC}}{R_{AEB}} = \frac{AC}{AB}$$

חישוב AC: $AD = DC$ (BD תיכון), והמשולש APD ישר זווית ב־P:

$AD^2 = AP^2 + PD^2$
$= k^2\cos^2\alpha + \frac{1}{9}k^2\sin^2\alpha$

עם $\alpha \approx 24.3^\circ$:

$AD \approx 0.9217k$
$AC = 2AD \approx 1.8434k$

ולכן:

$$\frac{R_{AEC}}{R_{AEB}} = \frac{AC}{k} \approx 1.843$$

ערך מדויק: $\frac{2\sqrt{5+\sqrt{7}}}{3}$

תשובה: היחס $\frac{R_{AEC}}{R_{AEB}} \approx 1.843$

סעיף ד

בסעיף זה נשתמש בנתונים $AB = k$, $BP = 3PD$, $AE \perp BD$ ובנתון החדש $\angle ABC = 90^\circ$.

שלב 1: במשולש ישר זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר, ולכן:

$$BD = AD = DC$$

נסמן $BD = AD = m$. אז $BP = \frac{3}{4}m$ ו־$PD = \frac{1}{4}m$.

שלב 2: פיתגורס במשולשים ישרי הזווית ABP ו־ADP (הזווית הישרה ב־P):

$$AP^2 = k^2 - \tfrac{9}{16}m^2$$
$$AP^2 = m^2 - \tfrac{1}{16}m^2$$

נשווה:

$$k^2 - \tfrac{9}{16}m^2 = \tfrac{15}{16}m^2$$
$$m^2 = \tfrac{2}{3}k^2$$
$$AC = 2m = 2k\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

שלב 3: במשולש ABP:

$$\sin\alpha = \frac{BP}{AB} = \frac{\frac{3}{4}m}{k} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \tfrac{6}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

במשולש ישר הזווית ABE: $\angle AEB = 90^\circ - \alpha$, ולכן:

$$\sin\angle AEC = \sin\angle AEB = \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

שלב 4: לפי משפט הסינוסים במשולש AEC:

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle AEC} = \frac{2k\sqrt{\frac{2}{3}}}{2\,.\,\frac{\sqrt{10}}{4}}$$
$$R = \frac{4k}{\sqrt{15}} \approx 1.033k$$

שימו לב: במפתח התשובות של משרד החינוך אין תשובה לסעיף ד. הנתון $\angle ABC = 90^\circ$ אינו מתיישב עם הנתון על השטח מסעיף ב – עם נתוני סעיף ב מתקבל $\angle ABC \approx 118.7^\circ$ –, ולכן כאן לא השתמשנו בשטח ובזווית α שמצאנו בסעיף ב, אלא רק בנתונים $BP = 3PD$, $AE \perp BD$ ו־$\angle ABC = 90^\circ$.

תשובה: רדיוס: $\frac{4k}{\sqrt{15}} \approx 1.033k$ **– אין לסעיף זה תשובה במפתח הרשמי.**

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 5

5. נתון מעגל שמרכזו O והרדיוס שלו R.

מנקודה E, הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר החותך את המעגל

בנקודות A ו־B, כמתואר בסרטוט.

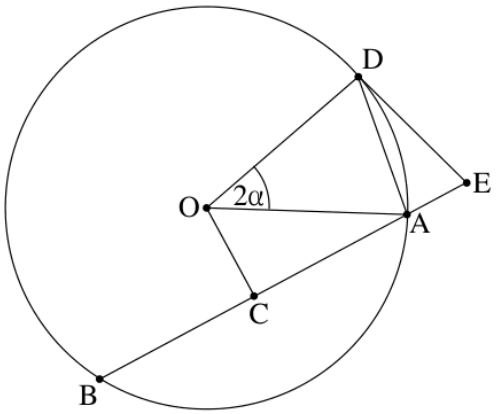
הנקודה D נמצאת על הקשת הגדולה AB,

כך שהקטע ED משיק למעגל.

הנקודה C היא אמצע המיתר AB.

נסמן את הזווית בין הרדיוסים OD ו־OA ב־ 2α $(\alpha < 60^o)$.

נתון: המרחק של הנקודה O מן המיתר AB הוא $0.5R$.



א. מצאו את זוויות המרובע $DOCE$. הביעו באמצעות α אם יש צורך.

ב. הביעו באמצעות R ו־ α את אורך הקטע DE.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOD הוא $\frac{4}{7}R$.

ג. מצאו את α.

ד. מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע $DOCE$ ובין שטח המעגל הנתון.

פתרון מלא

סעיף א

- $OD \perp DE$ – רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה: $\angle ODE = 90^\circ$.
- C אמצע המיתר AB, ולכן $OC \perp AB$ – הקטע ממרכז המעגל לאמצע מיתר מאונך למיתר: $\angle OCE = 90^\circ$.

במשולש ישר הזווית OCA: $OC = 0.5R$ (המרחק מ־O למיתר) ו־$OA = R$, ולכן

$$\cos\angle AOC = \frac{0.5R}{R} = \frac{1}{2}$$
$$\angle AOC = 60^\circ$$
$$\angle DOC = \angle DOA + \angle AOC$$
$$= 2\alpha + 60^\circ$$

סכום הזוויות במרובע הוא 360°:

$$\angle DEC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (60^\circ + 2\alpha)$$
$$= 120^\circ - 2\alpha$$

תשובה: $\angle ODE = \angle OCE = 90^\circ$, $\angle DOC = 60^\circ + 2\alpha$, $\angle DEC = 120^\circ - 2\alpha$

סעיף ב

נעבוד במשולש DAE.

הצלע DA. במשולש AOD מתקיים $OA = OD = R$, והזווית בין השוקיים היא 2α. לפי משפט הסינוסים, או בהורדת גובה:

$$DA = 2R\sin\alpha$$

הזוויות. זוויות הבסיס במשולש AOD: $\angle OAD = 90^\circ - \alpha$. במשולש OCA: $\angle OAC = 90^\circ -$ $30^\circ = 60^\circ$. הנקודות E, A, C על ישר אחד, לכן:

$$\angle DAE = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 30^\circ$$
$$= 60^\circ + \alpha$$

ומסעיף א: $\angle DEA = 120^\circ - 2\alpha$.

משפט הסינוסים במשולש DAE:

$$\frac{DE}{\sin\angle DAE} = \frac{DA}{\sin\angle DEA}$$
$$DE = \frac{2R\sin\alpha\ \sin(60^\circ+\alpha)}{\sin(120^\circ-2\alpha)}$$

תשובה: $DE = \dfrac{2R\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin(120^\circ-2\alpha)}$

סעיף ג

משפט הסינוסים במשולש AOD, מול הזווית $\angle AOD = 2\alpha$:

$$\frac{DA}{\sin 2\alpha} = 2\cdot\frac{4}{7}R$$
$$\frac{2R\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{8}{7}R$$
$$\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{8}{7}R \ \Rightarrow\ \cos\alpha = \frac{7}{8}$$
$$\alpha \approx 28.96^\circ$$

אכן $\alpha < 60^\circ$.

תשובה: $\alpha \approx 28.96^\circ$

סעיף ד

$\angle ODE = \angle OCE = 90^\circ$, ולכן שתיהן זוויות היקפיות ישרות הנשענות על OE: OE הוא קוטר המעגל החוסם את $DOCE$, ורדיוסו $\frac{OE}{2}$.

נחשב את DE עם $\alpha \approx 28.96^\circ$ (סעיף ב):

$$DE = \frac{2R\sin 28.96^\circ \sin 88.96^\circ}{\sin 62.09^\circ} \approx 1.0955R$$

פיתגורס במשולש ODE:

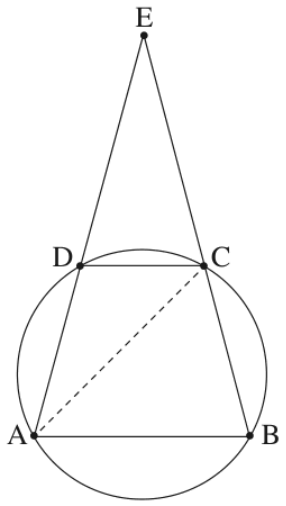
$$OE^2 = R^2 + DE^2 \approx R^2 + 1.2001R^2$$
$$= 2.2001R^2$$

היחס בין השטחים:

$$\frac{\pi\left(\frac{OE}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{OE^2}{4R^2} \approx \frac{2.2001}{4}$$
$$\approx 0.55$$

תשובה: ≈ 0.55

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 5



5. נתון טרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$, החסום במעגל.

המשכי הצלעות AD ו־BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

נסמן: $AC = k$, $\sphericalangle CDE = \alpha$.

א. **(1)** מצאו את זוויות המשולש ACE (הביעו באמצעות α אם יש צורך).

(2) הביעו באמצעות α ו־k את אורכי הצלעות AB ו־DC.

נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא $\sqrt{7}$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

טרפז החסום במעגל הוא טרפז שווה שוקיים, ולכן $\angle EAB = \angle EBA$.

זוויות הבסיס: הישרים DC ו־AB מקבילים, ולכן הזוויות המתאימות שוות:

$$\angle EAB = \angle CDE = \alpha$$

מכאן גם $\angle ABC = \alpha$.

במשולש ABC סכום הזוויות 180°:

$$\angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha$$

זוויות המשולש ACE**:**

הנקודות B, C, E על ישר אחד, ולכן הזווית ACE צמודה לזווית ACB:

$$\angle ACE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\angle CAE = \angle EAB - \angle BAC$$

$$= \alpha - (120^\circ - \alpha) = 2\alpha - 120^\circ$$

במשולש ABE שתי זוויות הבסיס שוות ל־α, ולכן:

$$\angle AEC = 180^\circ - 2\alpha$$

תשובה:

$$\angle ACE = 120^\circ$$
$$\angle CAE = 2\alpha - 120^\circ$$
$$\angle AEC = 180^\circ - 2\alpha$$

סעיף א (2)

הצלע AB – לפי משפט הסינוסים במשולש ABC:

$$\frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin \alpha}$$

$$AB = \frac{k \sin 60^\circ}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}\,k}{2 \sin \alpha}$$

הצלע DC – במשולש ADC:

- $\angle DAC = \angle CAE = 2\alpha - 120^\circ$
- $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$, כי היא צמודה לזווית CDE

לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{DC}{\sin(2\alpha - 120^\circ)} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \alpha)}$$

ומאחר ש־$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$:

$$DC = \frac{k\sin(2\alpha - 120^\circ)}{\sin\alpha}$$

תשובה: $AB = \frac{\sqrt{3}\,k}{2\sin\alpha}$
$DC = \frac{k\sin(2\alpha-120^\circ)}{\sin\alpha}$

סעיף ב

$DC \parallel AB$, ולכן $\triangle DCE \sim \triangle ABE$ (ז.ז.). יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\left(\frac{DC}{AB}\right)^2 = \frac{S_{DCE}}{S_{ABE}} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{DC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

נציב את הביטויים מסעיף א:

$$\frac{k\sin(2\alpha - 120^\circ)}{\sin\alpha} \cdot \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}\,k}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$2\sin(2\alpha - 120^\circ) = 1$$
$$\sin(2\alpha - 120^\circ) = \frac{1}{2}$$

הזווית α היא זווית בסיס במשולש ABE, ולכן היא חדה. כמו כן $2\alpha - 120^\circ$ היא זווית במשולש ACE, ולכן היא חיובית:

$$0^\circ < 2\alpha - 120^\circ < 60^\circ$$

לכן:

$$2\alpha - 120^\circ = 30^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 75^\circ$$

הפתרון השני $2\alpha - 120^\circ = 150^\circ$ נותן $\alpha = 135^\circ$, והוא נפסל.

תשובה: $\alpha = 75^\circ$

סעיף ג

עבור $\alpha = 75^\circ$, זוויות המשולש ACE:

$$\angle ACE = 120^\circ$$
$$\angle CAE = 2\cdot 75^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$
$$\angle AEC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

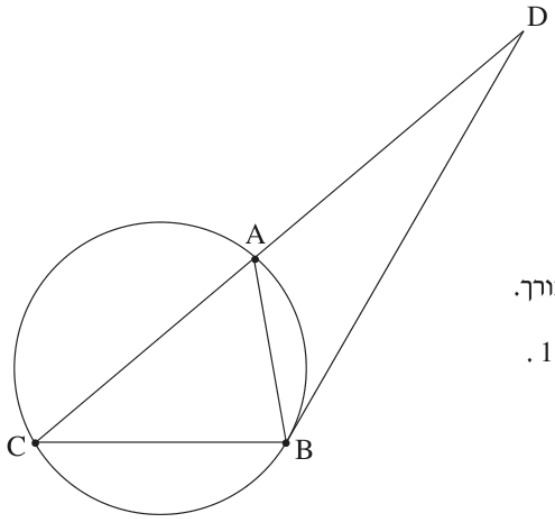
המשולש ACE שווה שוקיים, ולכן $EC = AC = k$.

נסמן ב־T את אמצע EC, ולכן $CT=\frac{k}{2}$. במשולש ACT לפי משפט הקוסינוסים:

$$\begin{aligned}AT^2 &= AC^2+CT^2\\ &\quad -2\cdot AC\cdot CT\cos 120^\circ\\ 7 &= k^2+\frac{k^2}{4}\\ &\quad -2\cdot k\cdot\frac{k}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ 7 &= k^2+\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{2}=\frac{7}{4}k^2\\ k^2 &= 4 \;\Rightarrow\; k=2\end{aligned}$$

תשובה: $k=2$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 5



5. המשולש ABC חסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R.

המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך הצלע CA

בנקודה D, כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\sphericalangle ABD = \alpha$.

נתון: $\sphericalangle DBC = 120^o$.

א. הביעו את אורכי הצלעות AB ו־BC באמצעות R ו־α, אם יש צורך.

נתון: היחס בין שטח המשולש BDC ובין שטח המשולש BDA הוא 1.8.

ב. מצאו את α.

נתון כי רדיוס המעגל החסום במשולש BDA הוא 4.

ג. מצאו את R.

פתרון מלא

סעיף א

BD משיק למעגל, ולכן הזווית בין המשיק למיתר AB שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני:

$$\angle ACB = \angle ABD = \alpha$$

הזוויות של המשולש ABC:

$$\angle ABC = \angle DBC - \angle ABD$$
$$= 120^\circ - \alpha$$
$$\angle BAC = 180^\circ - \alpha - (120^\circ - \alpha)$$
$$= 60^\circ$$

נשתמש במשפט הסינוסים במשולש ABC, שרדיוס המעגל החוסם אותו הוא R:

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R \;\Rightarrow\; AB = 2R\sin\alpha$$
$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R \;\Rightarrow\; BC = R\sqrt{3}$$

תשובה: $AB = 2R\sin\alpha$ **ו־**$BC = \sqrt{3}R$

סעיף ב

המשולשים BDC ו־ADB דומים לפי ז.ז.: הזווית D משותפת, והזוויות $\angle DCB$ ו־$\angle DBA$ שוות שתיהן ל־α לפי סעיף א.

ההתאמה בין הקודקודים:

$$B \leftrightarrow A,\;\; C \leftrightarrow B,\;\; D \leftrightarrow D$$

ולכן יחס הדמיון הוא $k = \frac{BC}{AB}$. יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 1.8$$
$$\frac{3R^2}{4R^2\sin^2\alpha} = 1.8$$

$$\sin^2\alpha = \frac{3}{7.2} = \frac{5}{12}$$
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{\sqrt{15}}{6} \approx 0.6455$$

במשולש ABD הזווית $\angle BAD$ צמודה לזווית של 60°, ולכן היא 120°. מכאן ש־α חדה (קטנה מ־60°), ולכן:

$$\alpha \approx 40.2^\circ$$

תשובה: $\alpha \approx 40.2^\circ$

סעיף ג

נסמן ב־M את מרכז המעגל החסום במשולש BDA. מרכז המעגל החסום הוא מפגש חוצי הזוויות, ולכן:

$$\angle MAB = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$
$$\angle MBA = \frac{\alpha}{2} \approx 20.1^\circ$$

נוריד אנך MK לצלע AB. האנך הוא רדיוס המעגל החסום, ולכן $MK = 4$. במשולש ישר הזווית MKB:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{MK}{MB} \;\Rightarrow\; MB = \frac{4}{\sin 20.1^\circ}$$
$$MB \approx 11.64$$

במשולש AMB:

$$\angle AMB = 180^\circ - 60^\circ - 20.1^\circ \approx 99.9^\circ$$

לפי משפט הסינוסים במשולש AMB:

$$\frac{AB}{\sin 99.9^\circ} = \frac{MB}{\sin 60^\circ}$$
$$AB \approx 13.24$$

לפי סעיף א, $AB = 2R\sin\alpha$:

$$R = \frac{AB}{2\sin\alpha} = \frac{13.24}{2 \cdot 0.6455}$$
$$R \approx 10.25$$

שימו לב: בפתרון של יואל גבע מופיע $R = 10.26$. ההבדל נובע רק מעיגול הזווית ל־40.2° באמצע החישוב; בחישוב מדויק $R \approx 10.255$.

תשובה: $R \approx 10.25$

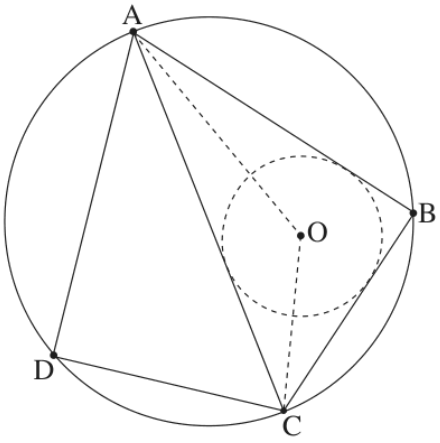
בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 5

5. דלתון ABCD חסום במעגל שרדיוסו R.

המיתר AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון.

הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle CAB = \alpha$.



א. **(1)** מצאו את זוויות המשולש AOC (הביעו באמצעות α במידת הצורך).

(2) הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו־R.

נתון כי אורך הקטע AO הוא $R\sqrt{2}$.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

נתון כי שטח הדלתון הוא $25\sqrt{3}$.

ג. מצאו את R.

ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

פתרון מלא

סעיף א (1)

קוטר: האלכסון הראשי AC של הדלתון הוא ציר סימטריה, ולכן $\angle ABC = \angle ADC$. במרובע החסום במעגל סכום זוויות נגדיות הוא 180°, ולכן כל אחת מהן 90°. זווית היקפית של 90° נשענת על קוטר – AC קוטר, ו־$AC = 2R$.

זוויות המשולש ABC:

$$\angle CAB = \alpha, \quad \angle ABC = 90^\circ$$
$$\angle ACB = 90^\circ - \alpha$$

O מרכז המעגל החסום, ולכן AO ו־CO חוצי זוויות:

$$\angle OAC = \frac{\alpha}{2}$$
$$\angle OCA = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

לפי סכום הזוויות במשולש AOC:

$$\angle AOC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 135^\circ$$

תשובה: $\angle OAC = \frac{\alpha}{2}$, $\angle OCA = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle AOC = 135^\circ$

סעיף א (2)

לפי משפט הסינוסים במשולש AOC, עם $AC = 2R$:

$$\frac{AO}{\sin \angle OCA} = \frac{AC}{\sin \angle AOC}$$
$$\frac{AO}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2R}{\sin 135^\circ}$$

$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ולכן:

$$AO = \frac{2R\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$= 2\sqrt{2}\,R\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

תשובה: $AO = 2\sqrt{2}\,R\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$

סעיף ב

נציב $AO = R\sqrt{2}$:

$$2\sqrt{2}\,R\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = R\sqrt{2}$$
$$\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

α זווית חדה במשולש ישר־זווית, ולכן $0^\circ < 45^\circ - \frac{\alpha}{2} < 45^\circ$:

$$45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 30^\circ$$
$$\alpha = 30^\circ$$

תשובה: $\alpha = 30^\circ$

סעיף ג

במשולש ישר־הזווית ABC, שבו היתר הוא $AC = 2R$:

$$AB = 2R\cos 30^\circ = R\sqrt{3}$$
$$BC = 2R\sin 30^\circ = R$$

הדלתון מורכב משני משולשים חופפים, ABC ו־ADC:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$$
$$= R\sqrt{3} \cdot R = \sqrt{3}R^2$$
$$\sqrt{3}R^2 = 25\sqrt{3}$$
$$R^2 = 25 \;\Rightarrow\; R = 5$$

תשובה: $R = 5$

סעיף ד

AC קוטר, ולכן מרכז המעגל החוסם את הדלתון הוא אמצע AC. נסמן אותו ב־M:

$$AM = R = 5$$

לפי הנתון והסעיפים הקודמים:

$$AO = R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$
$$\angle OAM = \frac{\alpha}{2} = 15^\circ$$

לפי משפט הקוסינוסים במשולש AOM:

$$OM^2 = AO^2 + AM^2$$

$-2 \cdot AO \cdot AM \cdot \cos 15^\circ$

$= 50 + 25$

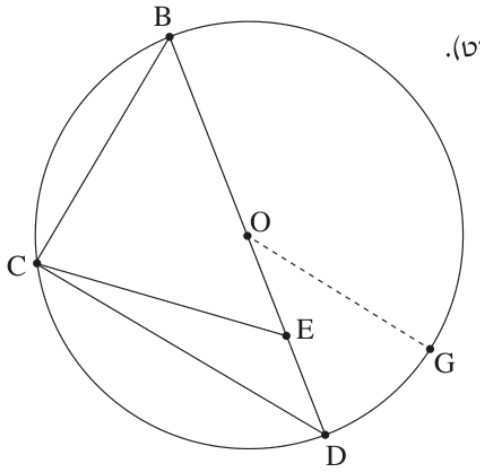
$-2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \cos 15^\circ$

$\approx 75 - 68.30 = 6.70$

$OM \approx 2.59$

תשובה: ≈ 2.59

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 5



5. משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

הנקודות O ו־E נמצאות על הצלע BD כך שמתקיים OE = ED (ראו סרטוט).

נסמן: $CD = m$, $\sphericalangle CDB = \alpha$.

א. הביעו את $\cos\alpha$ באמצעות m ו־R.

ב. הוכיחו כי $CE = \frac{1}{2}\sqrt{2m^2 + R^2}$.

נתון: BC = EC.

ג. חשבו את α.

מעבירים רדיוס OG המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.

ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

פתרון מלא

סעיף א

O נמצאת על BD, ולכן BD קוטר: $BD = 2R$. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה:

$$\angle BCD = 90^\circ$$

במשולש ישר הזווית BCD:

$$\cos\alpha = \frac{CD}{BD} = \frac{m}{2R}$$

תשובה: $\cos\alpha = \frac{m}{2R}$

סעיף ב

$OD = R$ ו־$OE = ED$, ולכן $ED = \frac{R}{2}$. במשולש CED, לפי משפט הקוסינוסים:

$$CE^2 = CD^2 + ED^2 - 2 \cdot CD \cdot ED \cdot \cos\alpha$$

$$= m^2 + \frac{R^2}{4} - 2 \cdot m \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{m}{2R}$$

$$= m^2 + \frac{R^2}{4} - \frac{m^2}{2} = \frac{2m^2 + R^2}{4}$$

$$CE = \frac{1}{2}\sqrt{2m^2 + R^2}$$

תשובה: הוכחה (משפט הקוסינוסים במשולש CED).

סעיף ג

במשולש ישר הזווית BCD, לפי משפט פיתגורס:

$$BC^2 = BD^2 - CD^2 = 4R^2 - m^2$$

נתון $BC = EC$, ולכן (לפי סעיף ב):

$$4R^2 - m^2 = \frac{2m^2 + R^2}{4}$$
$$16R^2 - 4m^2 = 2m^2 + R^2$$
$$15R^2 = 6m^2 \;\Rightarrow\; m^2 = 2.5R^2$$
$$\cos\alpha = \frac{m}{2R} = \frac{\sqrt{2.5}R}{2R}$$
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0.7906$$
$$\alpha \approx 37.76^\circ$$

תשובה: $\alpha \approx 37.76^\circ$

סעיף ד

הזווית $\angle EOG$: $OG \parallel CD$, ולכן $\angle EOG = \angle ODC = \alpha$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים).

במשולש OEG ידועים:

$$OE = \frac{R}{2}, \quad OG = R, \quad \angle EOG = \alpha$$

לפי משפט הקוסינוסים, עם $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$:

$$EG^2 = \frac{R^2}{4} + R^2 - 2 \cdot \frac{R}{2} \cdot R\cos\alpha$$
$$= R^2\left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{10}}{4}\right) \approx 0.4594R^2$$
$$EG \approx 0.6778R$$

שוב לפי משפט הקוסינוסים, הפעם לזווית $\angle OEG$:

$$\cos\angle OEG = \frac{OE^2 + EG^2 - OG^2}{2 \cdot OE \cdot EG}$$
$$\approx \frac{0.25 + 0.4594 - 1}{2 \cdot 0.5 \cdot 0.6778} \approx -0.4288$$
$$\angle OEG \approx 115.38^\circ$$

(משפט הקוסינוסים נותן זווית יחידה, ולכן אין כאן התלבטות בין שתי אפשרויות כמו במשפט הסינוסים.)

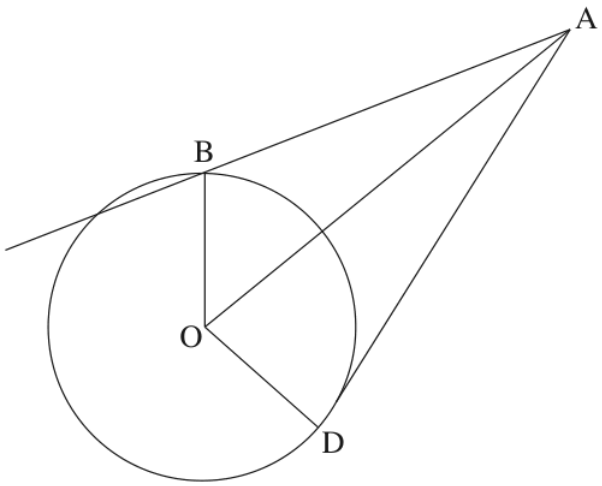
תשובה: $\angle OEG \approx 115.38^\circ$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 5

5. נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

מנקודה A, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D

וישר אחר, שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.



נסמן: $\sphericalangle AOD = \alpha$, $\sphericalangle AOB = \beta$.

א. הביעו באמצעות α , β ו־R, אם יש צורך, את:

(1) אורך הקטע AO.

(2) אורך הקטע AB.

נתון: $AB = \sqrt{2}\,R$.

ב. הוכיחו כי $\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r.

נתון: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו־β.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הישר AD משיק למעגל ב־D, ולכן $OD \perp AD$ (רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה). במשולש ישר הזווית ODA:

$$\cos\alpha = \frac{OD}{AO} = \frac{R}{AO}$$

$$AO = \frac{R}{\cos\alpha}$$

תשובה: $AO = \frac{R}{\cos\alpha}$

סעיף א (2)

לפי משפט הקוסינוסים במשולש AOB (עם $OB = R$):

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2\cdot AO\cdot OB\cdot\cos\beta$$

$$= \frac{R^2}{\cos^2\alpha} + R^2 - \frac{2R^2\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$AB = R\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} + 1 - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}}$$

תשובה: $AB = R\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} + 1 - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}}$

סעיף ב

נציב $AB = \sqrt{2}R$, כלומר $AB^2 = 2R^2$, בביטוי מסעיף א (2):

$$\frac{R^2}{\cos^2\alpha} + R^2 - \frac{2R^2\cos\beta}{\cos\alpha} = 2R^2$$

נחלק ב־R^2:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}$$

אגף שמאל:

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

לכן:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}$$
$$\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$$

תשובה: הוכחה: הצבה בביטוי מסעיף א (2)

סעיף ג

המשולש ADO ישר זווית ב־D, ולכן היתר AO הוא קוטר המעגל החוסם אותו:

$$AO = 2r$$
$$\frac{R}{r} = \frac{R}{AO/2} = \frac{2R}{AO} = 2\cos\alpha$$

לפי הנתון:

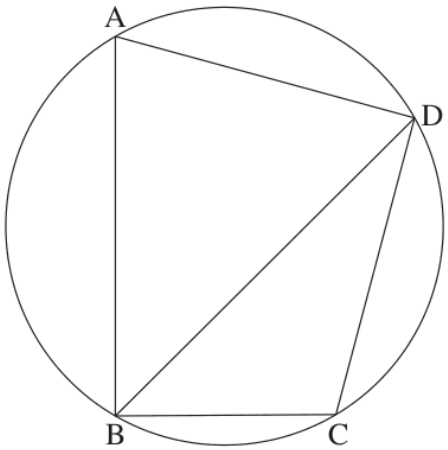
$$2\cos\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$$
$$\alpha \approx 58.05^\circ$$

לפי סעיף ב, עם $\sin^2\alpha = 1 - \frac{7}{25} = \frac{18}{25}$:

$$\cos\beta = \frac{18/25}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{5}} = \frac{9}{5\sqrt{7}} \approx 0.680$$
$$\beta \approx 47.13^\circ$$

תשובה: $\alpha \approx 58.05^\circ$
$\beta \approx 47.13^\circ$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 5



5. מרובע $ABCD$ חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle DAB = \alpha$, α היא זווית חדה.

א. הַביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו־ R.

נתון: $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

ב. חַשבו את α.

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

נסמן ב־ h_1 את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD,

וב־ h_2 את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

פתרון מלא

סעיף א

המעגל החוסם את המרובע חוסם גם את המשולש ABD. לפי משפט הסינוסים במשולש ABD:

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = 2R$$
$$BD = 2R\sin\alpha$$

תשובה: $BD = 2R\sin\alpha$

סעיף ב

במרובע חסום סכום זוויות נגדיות הוא 180°, ולכן:

$$\angle BCD = 180^\circ - \alpha$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

משפט הקוסינוסים במשולש BCD:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$
$$-2\cdot BC\cdot CD\cos(180^\circ - \alpha)$$
$$BD^2 = R^2 + 2R^2 + 2\sqrt{2}R^2\cos\alpha$$

נציב $BD = 2R\sin\alpha$ מסעיף א ונחלק ב־R^2:

$$4\sin^2\alpha = 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha$$
$$4 - 4\cos^2\alpha = 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha$$
$$4\cos^2\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha - 1 = 0$$
$$\cos\alpha = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8+16}}{8}$$
$$= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4}$$

α חדה, ולכן $\cos\alpha > 0$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0.2588$$
$$\alpha = 75^\circ$$

תשובה: $\alpha = 75^\circ$

סעיף ג

$\angle BCD = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. לפי משפט הסינוסים במשולש BCD, החסום באותו מעגל:

$$\frac{CD}{\sin\angle CBD} = 2R$$
$$\sin\angle CBD = \frac{R\sqrt{2}}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\angle CBD = 45^\circ$ או 135°. במשולש יש כבר זווית קהה של 105°, ולכן $\angle CBD = 45^\circ$.

BD חוצה את זווית ABC, ולכן:

$$\angle ABD = \angle CBD = 45^\circ$$

תשובה: $\angle ABD = 45^\circ$

סעיף ד

חישוב h_1. סכום הזוויות במשולש ABD:

$$\angle ADB = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$$

לפי משפט הסינוסים:

$$AB = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3}$$

הגובה מ־A ל־BD במשולש ישר הזווית שהוא יוצר עם AB:

$$h_1 = AB\sin 45^\circ = R\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}R$$

חישוב h_2. הזווית המרכזית $\angle BOD$ נשענת על אותה קשת כמו הזווית ההיקפית $\angle BAD$, ולכן:

$$\angle BOD = 2\cdot 75^\circ = 150^\circ$$

המשולש BOD שווה שוקיים, כי $OB = OD = R$. הגובה מ־O חוצה את זווית הראש, ולכן:

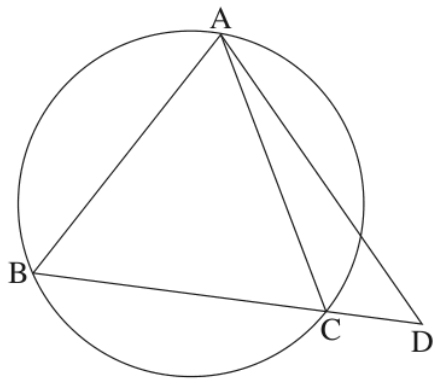
$$h_2 = R\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}R$$

היחס.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{6}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{6-2} = \frac{12+2\sqrt{12}}{4}$$
$$= 3+\sqrt{3} \approx 4.73$$

תשובה: $\frac{h_1}{h_2} = 3+\sqrt{3} \approx 4.73$

בגרות חורף נבצרים תשפ״ב (2022) • שאלה 5



5. בציור שלפניך מתואר משולש שווה־שוקיים ABC , $AB = AC$,
שחסום במעגל שרדיוסו R .
האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D והעבירו ישר מנקודה D
לנקודה A .
נתון: $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle BAC = 2\alpha$.

א. הוכח כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD
שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD .

ב. הבע את שטח משולש ACD באמצעות R ו־ α .

נסמן ב־ m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC .

ג. **(1)** האם ייתכן כי $m = 0.5$? נמק את תשובתך.

(2) נתון כי $m = 0.6$. מצא את גודלי זוויות המשולש ABC .

פתרון מלא

סעיף א

לפי משפט הסינוסים, בכל משולש היחס בין צלע לסינוס הזווית שמולה שווה לקוטר המעגל החוסם את המשולש. נשתמש בצלע המשותפת AD.

במשולש ABD: מול הצלע AD נמצאת הזווית B:

$$R_{ABD} = \frac{AD}{2\sin\angle ABD}$$

במשולש ACD: מול הצלע AD נמצאת הזווית ACD:

$$R_{ACD} = \frac{AD}{2\sin\angle ACD}$$

הזווית ACD צמודה לזווית ACB, ולכן:

$$\sin\angle ACD = \sin(180^\circ - \angle ACB)$$
$$= \sin\angle ACB$$

במשולש שווה־השוקיים ABC זוויות הבסיס שוות: $\angle ACB = \angle ABD$. לכן:

$$\sin\angle ACD = \sin\angle ABD$$
$$R_{ABD} = R_{ACD}$$

תשובה: הוכחה: לפי משפט הסינוסים, $\sin\angle ACD = \sin\angle ABD$, ולכן הרדיוסים שווים.

סעיף ב

זוויות: במשולש ABC זוויות הבסיס:

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2}$$
$$= 90^\circ - \alpha$$
$$\angle ACD = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$$

$$\angle ADC = 180^\circ - \alpha - (90^\circ + \alpha)$$
$$= 90^\circ - 2\alpha$$

הצלע AC – משפט הסינוסים במשולש ABC:

$$\frac{AC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R$$
$$AC = 2R\cos\alpha$$

הצלע AD – משפט הסינוסים במשולש ACD:

$$\frac{AD}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{AC}{\sin(90^\circ - 2\alpha)}$$
$$AD = \frac{2R\cos\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2R\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

השטח:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2R\cos\alpha \cdot \frac{2R\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \sin\alpha$$
$$= \frac{2R^2 \sin\alpha \cos^3\alpha}{\cos 2\alpha}$$

בעזרת $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ אפשר לכתוב:

$$S_{ACD} = R^2\cos^2\alpha\tan 2\alpha$$

תשובה: $S_{ACD} = R^2\cos^2\alpha\tan 2\alpha$

סעיף ג (1)

שטח המשולש ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 2\alpha$$
$$= \frac{1}{2}(2R\cos\alpha)^2 \sin 2\alpha$$
$$= 2R^2\cos^2\alpha\sin 2\alpha$$

היחס:

$$m = \frac{S_{ACD}}{S_{ABC}}$$
$$= \frac{R^2\cos^2\alpha \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{2R^2\cos^2\alpha\sin 2\alpha}$$
$$m = \frac{1}{2\cos 2\alpha}$$

נבדוק אם $m = 0.5$:

$$\frac{1}{2\cos 2\alpha} = 0.5 \;\Rightarrow\; \cos 2\alpha = 1$$

זה מתקיים רק כאשר 2α שווה ל־0° או לכפולה של 360°. אבל 2α היא זווית במשולש, ולכן **לא ייתכן** כי $m = 0.5$.

תשובה: לא: זה מחייב $\cos 2\alpha = 1$, ואין זווית כזו במשולש.

סעיף ג (2)

$$\frac{1}{2\cos 2\alpha} = 0.6$$
$$\cos 2\alpha = \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$$

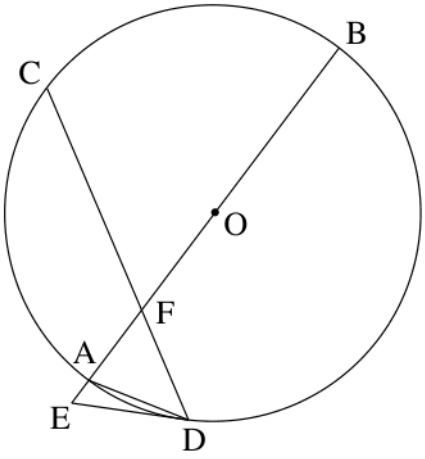
הזווית 2α חדה, כי $\angle ADC = 90^\circ - 2\alpha$ חיובית. לכן:

$$\angle BAC = 2\alpha \approx 33.56^\circ$$
$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 33.56^\circ}{2} \approx 73.22^\circ$$

תשובה: $\angle BAC \approx 33.56^\circ$
$\angle ABC = \angle ACB \approx 73.22^\circ$

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 5

5. AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O. המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F.
המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB בנקודה E (ראה סרטוט).
נסמן: $\sphericalangle ADE = \alpha$.



א. הראה כי $\sphericalangle BAD = 90^o - \alpha$.

נתון כי $ED = FD$.

ב. הבע באמצעות α את גודל $\sphericalangle CDA$.

ג. הבע באמצעות R ו־α את שטח המשולש AFD.

ד. **(1)** הבע באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) נתון כי $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$.

מצא את α.

פתרון מלא

סעיף א

טענה	נימוק
$\angle ADB = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר ישרה
$\angle ABD = \angle ADE = \alpha$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני
$\angle BAD = 90° - \alpha$	סכום הזוויות במשולש ABD הוא $180°$

תשובה: הוכחה: $\angle ADB = 90°$ **ו־**$\angle ABD = \alpha$ **(משיק ומיתר), ולכן** $\angle BAD = 90° - \alpha$**.**

סעיף ב

הזווית $\angle DAE$ צמודה ל־$\angle BAD$:

$$\angle DAE = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$$

במשולש ADE:

$$\angle DEA = 180° - \alpha - (90° + \alpha)$$
$$= 90° - 2\alpha$$

נתון $ED = FD$, ולכן המשולש EDF שווה שוקיים, וזוויות הבסיס שוות:

$$\angle DFA = \angle DEF = 90° - 2\alpha$$

במשולש AFD:

$$\angle CDA = 180° - (90° - \alpha)$$
$$-(90° - 2\alpha)$$
$$= 3\alpha$$

תשובה: $\angle CDA = 3\alpha$

סעיף ג

במשולש ישר הזווית ADB:

$$AD = AB \cdot \sin\alpha = 2R\sin\alpha$$

במשולש AFD ידועות הצלע AD ושלוש הזוויות: ליד A הזווית $90^\circ - \alpha$, ליד D הזווית 3α, וליד F הזווית $90^\circ - 2\alpha$. לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{AF}{\sin 3\alpha} = \frac{AD}{\sin(90^\circ - 2\alpha)}$$

$$AF = \frac{2R\sin\alpha\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha}$$

שטח המשולש לפי $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, עם הזווית A שבין AD ל־AF:

$$S_{AFD} = \frac{1}{2}\cdot AD \cdot AF \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha \cdot \frac{2R\sin\alpha\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\cos\alpha$$

$$= \frac{2R^2\sin^2\alpha\cos\alpha\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha}$$

אפשר לפשט בעזרת $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$:

$$S_{AFD} = R^2\tan 2\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha$$

תשובה: $S_{AFD} = R^2\tan 2\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha$

סעיף ד (1)

למשולשים AFD ו־AED יש אותו גובה מהקודקוד D לישר EB, ולכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים:

$$\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = \frac{AF}{AE}$$

לפי משפט הסינוסים במשולש AED (הזווית ליד E היא $90^\circ - 2\alpha$):

$$\frac{AE}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin(90^\circ - 2\alpha)}$$

$$AE = \frac{AD\sin\alpha}{\cos 2\alpha}$$

ומסעיף ג: $AF = \frac{AD\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha}$. לכן:

$$\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$$

תשובה: $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$

סעיף ד (2)

נפתח את $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha)$:

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha$$

$$= \sin\alpha\cos 2\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha$$

נחלק ב־$\sin\alpha$:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha$$

$$= \cos 2\alpha + (1 + \cos 2\alpha)$$
$$= 1 + 2\cos 2\alpha$$

נציב בנתון:

$$1 + 2\cos 2\alpha = 1 + \sqrt{3}$$
$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

הזווית $90^\circ - 2\alpha$ היא זווית במשולש, ולכן $0^\circ < 2\alpha < 90^\circ$:

$$2\alpha = 30^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 15^\circ$$

תשובה: $\alpha = 15^\circ$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.