חדו"א – פונקציות טריגונומטריות – כל השאלות עם פתרונות מלאים

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(\sin x)^2\cdot\cos(2x)$, המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$.

א. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\sqrt{a\cdot f'(x)}$.

a הוא פרמטר שלילי.

ד. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־x.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד בתחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

פתרון מלא

סעיף א

התחום הנתון סימטרי סביב 0. נבדוק את $f(-x)$, בעזרת הזהויות:

$$\sin(-x)=-\sin x$$
$$\cos(-x)=\cos x$$
$$f(-x)=\sin^2(-x)\cdot\cos(-2x)$$
$$=(-\sin x)^2\cdot\cos 2x$$
$$=\sin^2 x\cos 2x=f(x)$$

לכן f זוגית.

תשובה: הוכחה: $f(-x)=f(x)$.

סעיף ב

נגזור לפי כלל המכפלה ($(\sin^2 x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$):

$$f'(x)=\sin 2x\cos 2x$$
$$+\sin^2 x\cdot(-2\sin 2x)$$
$$=\sin 2x\,(\cos 2x-2\sin^2 x)$$

לפי $2\sin^2 x=1-\cos 2x$:

$$f'(x)=\sin 2x\,(2\cos 2x-1)$$

השוואה ל־0. בתחום הנתון $-\frac{\pi}{2}\le 2x\le\frac{\pi}{2}$:

$$\sin 2x=0\ \Rightarrow\ 2x=0\ \Rightarrow\ x=0$$
$$\cos 2x=\tfrac12\ \Rightarrow\ 2x=\pm\tfrac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ x=\pm\tfrac{\pi}{6}$$

טבלת סימנים:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x=-\frac{\pi}{4}$		מינימום (קצה)
$-\frac{\pi}{4}<x<-\frac{\pi}{6}$	+	עולה
$x=-\frac{\pi}{6}$	0	מקסימום
$-\frac{\pi}{6}<x<0$	–	יורדת
$x=0$	0	מינימום
$0<x<\frac{\pi}{6}$	+	עולה
$x=\frac{\pi}{6}$	0	מקסימום
$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$	–	יורדת
$x=\frac{\pi}{4}$		מינימום (קצה)

$$f(\pm\tfrac{\pi}{6})=\left(\frac12\right)^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac14\cdot\frac12=\frac18$$
$$f(0)=0$$
$$f(\pm\tfrac{\pi}{4})=\frac12\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$$

תשובה: מקסימום: $(\pm\frac{\pi}{6},\frac18)$
מינימום: $(0,0)$ **ובקצוות** $(\pm\frac{\pi}{4},0)$

סעיף ג

לפי סעיף ב: הגרף מתחיל ב־$(-\frac{\pi}{4},0)$, עולה למקסימום $(-\frac{\pi}{6},\frac18)$, יורד ל־$(0,0)$, עולה ל־$(\frac{\pi}{6},\frac18)$ ויורד ל־$(\frac{\pi}{4},0)$. הגרף סימטרי לציר ה־y (פונקציה זוגית) ו־$f(x)\ge 0$.

סקיצה של f בצורת M עם מקסימום ב־±π/6 ומינימום ב־0 ו־±π/4

תשובה: צורת „M": מקסימום ב־$(\pm\frac{\pi}{6},\frac18)$, מינימום ב־$(0,0)$ ובקצוות $(\pm\frac{\pi}{4},0)$.

סעיף ד (1)

$g(x)=\sqrt{a\,f'(x)}$ מוגדרת כאשר $a\,f'(x)\ge 0$. נתון $a<0$, ולכן צריך $f'(x)\le 0$.

לפי טבלת הסימנים בסעיף ב, $f'(x)\le 0$ בקטעים:

$$-\tfrac{\pi}{6}\le x\le 0\qquad \tfrac{\pi}{6}\le x\le\tfrac{\pi}{4}$$

בדיקת קצות התחום:

$$f'(-\tfrac{\pi}{4})=(-1)\cdot(2\cdot 0-1)=1>0$$

– לא בתחום.

$$f'(\tfrac{\pi}{4})=1\cdot(2\cdot 0-1)=-1<0$$

– בתחום.

תשובה: $-\frac{\pi}{6} \le x \le 0$
או
$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}$

סעיף ד (2)

$g(x)=0$ בדיוק כאשר $f'(x)=0$. לפי סעיף ב זה קורה ב־$x=-\frac{\pi}{6},\ 0,\ \frac{\pi}{6}$, ושלוש הנקודות בתחום ההגדרה של g.

תשובה: $(-\frac{\pi}{6},0),\ (0,0),\ (\frac{\pi}{6},0)$

סעיף ה

בנקודת פיתול של f יש ל־f' נקודת קיצון. נבחן כל אחד משני חלקי התחום של g.

הקטע השמאלי ($-\frac{\pi}{6}$ עד 0): f' מתחילה ב־0, שלילית באמצע הקטע וחוזרת ל־0. לכן יש לה מינימום בתוך הקטע – זו נקודת הפיתול של f שבתחום. מכיוון ש־$a<0$, הביטוי af' מתחיל ב־0, עולה למקסימום וחוזר ל־0, וכך גם $g=\sqrt{af'}$: „גבעה" עם מקסימום אחד.

הקטע הימני ($\frac{\pi}{6}$ עד $\frac{\pi}{4}$): אין בו נקודת פיתול, ולכן f' מונוטונית שם: יורדת מ־0 ל־-1. לכן g עולה מ־0 עד:

$$g(\tfrac{\pi}{4})=\sqrt{a\cdot(-1)}=\sqrt{-a}$$

סקיצה של g: גבעה בין -π/6 ל־0, ועלייה מ־π/6 עד π/4

(הסקיצה איכותית: היא נובעת מניתוח הסימן והמונוטוניות של f' בלבד, ולכן מתאימה לכל $a<0$ בלי להציב ערך מספרי במקום a.)

תשובה: בקטע השמאלי: „גבעה" – עולה מ־0 למקסימום ויורדת ל־0.
בקטע הימני: עולה מ־0 עד $\sqrt{-a}$.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(1+\cos x)\cdot(-1+b\cos x)$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

b הוא פרמטר.

נתון: $0<b<1$.

א. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־x.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{3}$.

ג. מצאו את הערך של b.

הציבו $b=\frac{1}{2}$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ה.

ד. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=f(x)+|f(x)|$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

נקודה A היא נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקצייה $h(x)$.

ה. האם שיעור ה־y של נקודה A הוא חיובי, שלילי, שווה אפס או שאי אפשר לקבוע? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

התחום $-\pi\le x\le\pi$ סימטרי סביב 0, ו־$\cos(-x)=\cos x$, ולכן:

$$f(-x)=$$
$$(1+\cos(-x))(-1+b\cos(-x))$$
$$=(1+\cos x)(-1+b\cos x)$$
$$=f(x)$$

תשובה: הפונקצייה זוגית, כי $f(-x)=f(x)$.

סעיף ב

$f(x)=0$ כאשר אחד הגורמים מתאפס:

הגורם הראשון:

$$1+\cos x=0\Rightarrow\cos x=-1$$
$$x=\pm\pi$$

הגורם השני:

$$-1+b\cos x=0\Rightarrow\cos x=\frac{1}{b}$$

כיוון ש־$0<b<1$, מתקיים $\frac{1}{b}>1$, ולכן למשוואה זו אין פתרון.

תשובה: נקודות החיתוך: $(-\pi,0)$ **ו־**$(\pi,0)$

סעיף ג

נפתח סוגריים:

$$f(x) = -1 + (b-1)\cos x + b\cos^2 x$$
$$f'(x) = -(b-1)\sin x - 2b\cos x \sin x$$
$$= \sin x\,(1 - b - 2b\cos x)$$

בנקודת קיצון $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$. כיוון ש־$\sin\frac{\pi}{3} \neq 0$:

$$1 - b - 2b \cdot \tfrac{1}{2} = 0$$
$$1 - 2b = 0 \Rightarrow b = \tfrac{1}{2}$$

תשובה: $b = \frac{1}{2}$

סעיף ד (1)

עם $b = \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \sin x\left(\tfrac{1}{2} - \cos x\right)$$

$f'(x) = 0$ כאשר $\sin x = 0$, כלומר $x = 0, \pm\pi$, או כאשר $\cos x = \frac{1}{2}$, כלומר $x = \pm\frac{\pi}{3}$.

הפונקצייה זוגית, ולכן מספיק לבדוק את הקטע $0 \le x \le \pi$:

x	$\sin x$	$\frac{1}{2} - \cos x$	f'	f
0	0	$-$	0	מקס'
$0 < x < \frac{\pi}{3}$	$+$	$-$	$-$	↘
$\frac{\pi}{3}$	$+$	0	0	מינ'
$\frac{\pi}{3} < x < \pi$	$+$	$+$	$+$	↗
π	0	$+$	0	מקס' קצה

נחשב ערכים:

$$f(0) = 2 \cdot (-\tfrac{1}{2}) = -1$$
$$f(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{3}{2} \cdot (-\tfrac{3}{4}) = -\tfrac{9}{8}$$
$$f(\pi) = 0 \cdot (-\tfrac{3}{2}) = 0$$

לפי הזוגיות, אותו דבר בצד השלילי.

תשובה: מקסימום $(0,-1)$ **ו־**$(\pm\pi, 0)$ **בקצוות; מינימום:** $\left(\pm\frac{\pi}{3},\ -\frac{9}{8}\right)$

סעיף ד (2)

הגרף סימטרי לציר ה־y (פונקצייה זוגית), נמצא כולו מתחת לציר ה־x או עליו, ונוגע בציר ה־x רק בקצוות $x = \pm\pi$.

סקיצה של f: מקסימום (0,-1), מינימום (±π/3,-9/8), קצוות (±π,0)

תשובה: סקיצה: גרף זוגי מתחת לציר ה־x**, מינימום** $\left(\pm\frac{\pi}{3}, -\frac{9}{8}\right)$**, מקסימום** $(0,-1)$**, קצוות** $(\pm\pi, 0)$**.**

סעיף ה

לפי הסעיפים הקודמים, הערך הגדול ביותר של f הוא 0, כלומר $f(x) \le 0$ לכל x בתחום. לכן $|f(x)| = -f(x)$, ו:

$$h(x) = f(x) + |f(x)|$$
$$= f(x) - f(x) = 0$$

הגרף של h הוא קטע של ציר ה־x, ולכן לכל נקודה A על הגרף שיעור ה־y שווה לאפס.

תשובה: שיעור ה־y **שווה לאפס, כי** $f(x) \le 0$ **ולכן** $h(x) = 0$**.**

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = (\sin x)^2 + \cos x - 1$, המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{f(x) + b}$, b הוא פרמטר.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק שתי אסימפטוטות אנכיות.

ד. כתבו שני ערכים אפשריים של b , שאחד מהם חיובי והאחר שלילי.

הציבו בפונקצייה $g(x)$ את הערך השלילי של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ה–ו.

ה. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

פתרון מלא

סעיף א

התחום $-\pi \le x \le \pi$ סימטרי סביב 0. נבדוק $f(-x)$, בעזרת $\sin(-x) = -\sin x$ ו־ $\cos(-x) = \cos x$:

$$f(-x) = \sin^2(-x) + \cos(-x) - 1$$
$$= (-\sin x)^2 + \cos x - 1$$
$$= \sin^2 x + \cos x - 1 = f(x)$$

לכן $f(x)$ זוגית.

תשובה: הוכחה: $f(-x) = (-\sin x)^2 + \cos x - 1 = f(x)$, והתחום סימטרי.

סעיף ב (1)

נציב $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$f(x) = 1 - \cos^2 x + \cos x - 1 = \cos x(1 - \cos x)$$
$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = 1 \text{ או } \cos x = 0$$

בתחום $-\pi \le x \le \pi$:

$$\cos x = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\tfrac{\pi}{2}$$
$$\cos x = 1 \;\Rightarrow\; x = 0$$

תשובה: $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

סעיף ב (2)

$$f'(x)=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)$$
$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \sin x=0 \text{ או } \cos x=\tfrac{1}{2}$$

הפתרונות בתחום:

$$\sin x=0\ \Rightarrow\ x=0,\ x=\pm\pi$$
$$\cos x=\tfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=\pm\tfrac{\pi}{3}$$

בגלל שהפונקציה זוגית מספיק לבדוק את $0\le x\le\pi$ (הצד השני סימטרי):

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x=0$	0	מינימום
$0<x<\frac{\pi}{3}$	+	עולה
$x=\frac{\pi}{3}$	0	מקסימום
$\frac{\pi}{3}<x<\pi$	–	יורדת
$x=\pi$	0	מינימום (קצה)

למשל ב־$x=\frac{\pi}{2}$: $f'=1\cdot(0-1)<0$.

$$f(0)=0+1-1=0$$
$$f\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}-1=\tfrac{1}{4}$$
$$f(\pi)=0-1-1=-2$$

תשובה: מינימום $(0,0)$**; מקסימום** $\left(\pm\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$**; מינימום (קצה)** $(\pm\pi,-2)$

סעיף ג

לפי הסעיפים הקודמים: הגרף סימטרי סביב ציר y, מתחיל ב־$(-2,-\pi)$, עולה דרך $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ עד המקסימום $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, יורד למינימום $(0,0)$, וחוזר באופן סימטרי עד $(-2,\pi)$.

סקיצה של f(x)

תשובה: גרף סימטרי לציר y**: עולה מ־**$(-2,-\pi)$ **עד המקסימום** $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$**, יורד למינימום** $(0,0)$**, ובאופן סימטרי עד** $(-2,\pi)$**.**

סעיף ד

ל־$g(x)=\frac{1}{f(x)+b}$ יש אסימפטוטה אנכית בכל נקודה שבה המכנה מתאפס, כלומר שבה $f(x)=-b$. צריך שלמשוואה $f(x)=-b$ יהיו בדיוק שני פתרונות בתחום.

לפי הגרף מסעיף ג, טווח הערכים של f הוא $-2\le f(x)\le\frac{1}{4}$, ומספר הפתרונות הוא:

- $-b=\frac{1}{4}$: שני פתרונות, $x=\pm\frac{\pi}{3}$.
- $-2<-b<\frac{1}{4}$: ארבעה פתרונות.
- $-b=0$: שלושה פתרונות – $0,\pm\frac{\pi}{2}$.
- $-2\le-b<0$: שני פתרונות (אחד בכל צד).

לכן $b=-\frac{1}{4}$ (הערך השלילי היחיד), או כל b בתחום $0<b\le2$ – למשל $b=1$.

תשובה: ערך שלילי: $b=-\frac{1}{4}$**; ערך חיובי: כל** $0<b\le2$**, למשל** $b=1$

סעיף ה (1)

עם $b = -\frac{1}{4}$:

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - \frac{1}{4}}$$

המכנה מתאפס כאשר $f(x) = \frac{1}{4}$, כלומר ב־$x = \pm\frac{\pi}{3}$ – המקסימום של f. לכן:

$$-\pi \le x < -\frac{\pi}{3}$$
$$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$$
$$\frac{\pi}{3} < x \le \pi$$

תשובה: $-\pi \le x \le \pi$, $x \neq \pm\frac{\pi}{3}$

סעיף ה (2)

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{\left(f(x) - \frac{1}{4}\right)^2}$$

המכנה חיובי, ולכן הסימן של g' הפוך לסימן של f': היכן ש־f עולה g יורדת, ולהפך. נקודות החשודות הן נקודות הקיצון של f שבתחום של g: $x = 0$ ו־$x = \pm\pi$.

x	$g'(x)$	$g(x)$
$x = 0$	0	מקסימום
$0 < x < \frac{\pi}{3}$	–	יורדת
$\frac{\pi}{3} < x < \pi$	+	עולה
$x = \pi$	0	מקסימום (קצה)

$$g(0) = \frac{1}{0 - \frac{1}{4}} = -4$$
$$g(\pm\pi) = \frac{1}{-2 - \frac{1}{4}} = -\frac{4}{9}$$

בגלל הזוגיות, אותו דבר ב־$x = -\pi$.

תשובה: מקסימום $(0, -4)$; מקסימום (קצה) $\left(\pm\pi, -\frac{4}{9}\right)$

סעיף ו

$f(x) \le \frac{1}{4}$ בכל התחום, ולכן $g(x) < 0$ – הגרף כולו מתחת לציר x. ליד $x = \pm\frac{\pi}{3}$ המכנה שואף ל־0 מצד שלילי, ולכן $g \to -\infty$ משני הצדדים. במרכז: מקסימום $(0, -4)$; בקצוות: $\left(\pm\pi, -\frac{4}{9}\right)$, משם הגרף יורד אל האסימפטוטות.

סקיצה של g(x)

תשובה: גרף שלילי עם אסימפטוטות $x = \pm\frac{\pi}{3}$; משני צדיהן $g \to -\infty$. מקסימום $(0, -4)$; בקצוות $\left(\pm\pi, -\frac{4}{9}\right)$.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos x}$, בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה־x של הפונקצייה $f(x)$.

ב. קבעו אם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית. נמקו את קביעתכם.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=2\cos x+\frac{2\sin x}{\sin(2x)}$, בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

ה. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) הראו כי $g(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos x}$, בעבור כל x בתחום הגדרתה.

ו. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקצייה $g(x)$ ב־3 נקודות בדיוק?
אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הפונקציה מוגדרת כשהמכנה $\cos x\neq 0$. בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ מתקיים $\cos x=0$ רק ב־$x=\pm\frac{\pi}{2}$. לכן תחום ההגדרה:

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

תשובה: $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

סעיף א (2)

בתחום מתקיים $\cos x>0$. בקצוות התחום $\cos x\to 0^+$, ולכן $\frac{1}{\cos x}\to+\infty$ ו־$f(x)\to+\infty$:

$$x=\frac{\pi}{2},\qquad x=-\frac{\pi}{2}$$

תשובה: $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$

סעיף ב

תחום ההגדרה סימטרי סביב 0, ו־$\cos(-x)=\cos x$, ולכן:

$$f(-x)=2\cos(-x)+\frac{1}{\cos(-x)}$$
$$=2\cos x+\frac{1}{\cos x}=f(x)$$

הפונקציה **זוגית**.

תשובה: זוגית: $f(-x)=f(x)$.

סעיף ג

נגזור:

$$f'(x) = -2\sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \sin x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \right)$$
$$f'(x) = 0$$
$$\sin x = 0 \quad \text{או} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

בתחום ההגדרה:

$$\sin x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{\pi}{4}$$

למשוואה $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ אין פתרון בתחום, כי בו $\cos x > 0$.
נבדוק סימן בנקודות נבחרות:

$$f'\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3} - 2\right) < 0$$
$$f'\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(4 - 2) > 0$$

בצד השלילי הסימנים הפוכים, כי הנגזרת של פונקציה זוגית היא אי־זוגית. טבלת סימנים:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$	–	יורדת
$x = -\frac{\pi}{4}$	0	מינימום
$-\frac{\pi}{4} < x < 0$	+	עולה
$x = 0$	0	מקסימום
$0 < x < \frac{\pi}{4}$	–	יורדת
$x = \frac{\pi}{4}$	0	מינימום
$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$	+	עולה

$$f(0) = 2 \cdot 1 + \frac{1}{1} = 3$$
$$f\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

נקודות הקיצון:

$$\max(0, 3)$$
$$\min\left(-\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right),\ \min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$$

תשובה: מקסימום: $(0, 3)$
מינימום: $\left(\pm\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$

סעיף ד

סקיצה של f: צורת W בין האסימפטוטות x=±π/2, מינימום ב-±π/4 ומקסימום (0,3)

הגרף סימטרי לציר ה־y. בתחום $\cos x > 0$, ולכן $f(x) > 0$ והגרף כולו מעל ציר ה־x. יש לו אסימפטוטות $x = \pm\frac{\pi}{2}$, מקסימום $(0,3)$ ומינימום $\left(\pm\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

תשובה: צורת W, סימטרית לציר ה־y.

אסימפטוטות: $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

מקסימום $(0,3)$, מינימום $\left(\pm\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

סעיף ה (1)

המכנה צריך להיות שונה מאפס:

$$\sin 2x \neq 0 \;\Rightarrow\; 2x \neq \pi k$$

$$x \neq \frac{\pi k}{2}$$

בתחום הנתון זה מוציא שלוש נקודות:

$$x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}$$

תחום ההגדרה:

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad x \neq 0$$

תשובה: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$

סעיף ה (2)

לפי הזהות $\sin 2x = 2\sin x \cos x$:

$$g(x) = 2\cos x + \frac{2\sin x}{2\sin x \cos x}$$

בתחום ההגדרה $\sin x \neq 0$, ולכן מותר לצמצם:

$$g(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos x}$$

תשובה: הוכחה בעזרת הזהות $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

סעיף ו

לפי סעיף ה, $g(x) = f(x)$ בכל התחום, פרט לנקודה $x = 0$ שבה g אינה מוגדרת. כלומר, גרף g הוא גרף f בלי הנקודה $(0,3)$.

נבדוק כמה נקודות חיתוך יש לישר $y = k$ עם גרף f (לפי הסקיצה):

- $k > 3$: שתי נקודות.
- $k = 3$: שלוש נקודות – $x = 0$ ועוד שתיים.
- $2\sqrt{2} < k < 3$: ארבע נקודות.
- $k = 2\sqrt{2}$: שתי נקודות.
- $k < 2\sqrt{2}$: אין נקודות.

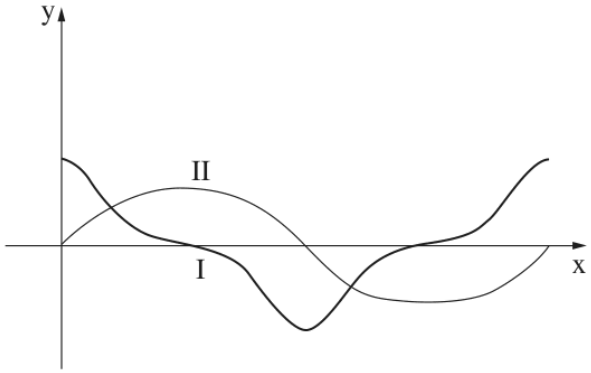
רק עבור $k = 3$ יש לגרף f שלוש נקודות חיתוך, אבל אחת מהן היא $(0,3)$, שאינה על גרף g. לכן לגרף g יש עבור $k = 3$ רק שתי נקודות חיתוך.

לא קיים ערך של k שבעבורו הישר חותך את גרף g בשלוש נקודות בדיוק.

תשובה: לא קיים ערך כזה.

רק הישר $y = 3$ חותך את גרף f בשלוש נקודות, ובגרף g חסרה הנקודה $(0,3)$.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 7



7. בסרטוט שלפניכם נתונים שני גרפים, I–II, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$,

ואחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$ מוגדרות לכל x בתחום הנתון.

א. קבעו איזה מן הגרפים I–II מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

נתון כי $f(x)=\frac{\sin x}{1+(\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\left|f(x)-0.4\right|$ המוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x.

ד. **(1)** סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

פתרון מלא

סעיף א

בכל נקודת קיצון של f הנגזרת מתאפסת; בתחום שבו f עולה $f'>0$, ובתחום שבו היא יורדת $f'<0$.

- לגרף II יש מקסימום (בערך באמצע החצי הראשון של התחום) ומינימום (בחצי השני). בדיוק שם גרף I חותך את ציר ה־x.
- גרף II עולה בהתחלה ובסוף התחום, ושם גרף I חיובי; באמצע, כשגרף II יורד, גרף I שלילי.
- לעומת זאת, לגרף I יש מינימום בחצי השני של התחום, אבל שם גרף II אינו מתאפס – ולכן II אינו יכול להיות הנגזרת של I.

לכן גרף II מתאר את $f(x)$ וגרף I מתאר את $f'(x)$.

תשובה: גרף II

סעיף ב (1)

$f(x)=\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$. המכנה תמיד חיובי, ולכן:

$$f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \sin x=0$$

בתחום $0\le x\le 2\pi$:

$$x=0,\;\; x=\pi,\;\; x=2\pi$$

תשובה: $(0,0),\ (\pi,0),\ (2\pi,0)$

סעיף ב (2)

נגזור לפי כלל המנה. המונה של הנגזרת:

$$\cos x(1+\sin^2 x)-\sin x\cdot 2\sin x\cos x$$
$$=\cos x\,(1-\sin^2 x)=\cos^3 x$$

ולכן:

$$f'(x)=\frac{\cos^3 x}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \cos x=0$, ובתחום: $x=\frac{\pi}{2},\; x=\frac{3\pi}{2}$.

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$
$$f\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

בקצוות: $f(0)=0$ ו־$f(2\pi)=0$. המכנה של f' חיובי, ולכן סימן f' הוא סימן $\cos x$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
0		מינ' קצה
$0<x<\frac{\pi}{2}$	$+$	↗
$\frac{\pi}{2}$	0	מקס'
$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$	$-$	↘
$\frac{3\pi}{2}$	0	מינ'
$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$	$+$	↗
2π		מקס' קצה

תשובה: מינ' קצה $(0,0)$; מקס' $(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})$; מינ' $(\frac{3\pi}{2},-\frac{1}{2})$; מקס' קצה $(2\pi,0)$

סעיף ג

הפונקציה g מתאפסת כאשר הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס:

$$g(x)=0 \;\Leftrightarrow\; f(x)=0.4$$
$$\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}=0.4$$
$$\sin x=0.4+0.4\sin^2 x$$

נכפול ב־5 ונסדר:

$$2\sin^2 x-5\sin x+2=0$$
$$\sin x=\frac{5\pm 3}{4}$$

$\sin x=2$ – אין פתרון. $\sin x=\frac{1}{2}$:

$$x=\frac{\pi}{6},\;\; x=\frac{5\pi}{6}$$

תשובה: $(\frac{\pi}{6},0),\;(\frac{5\pi}{6},0)$

סעיף ד (1)

נבנה את הגרף של g מהגרף של f: מורידים את גרף f ב־0.4, ואת החלק שמתחת לציר ה־x משקפים כלפי מעלה.

- $f(x)-0.4$ שווה ל־-0.4 בקצוות, ל־0.1 ב־$x=\frac{\pi}{2}$, ול־-0.9 ב־$x=\frac{3\pi}{2}$.
- $f(x)-0.4>0$ רק בין $\frac{\pi}{6}$ ל־$\frac{5\pi}{6}$; בשאר התחום הוא שלילי ומשתקף.

לכן: $g(0)=0.4$, יורדת ל־0 ב־$\frac{\pi}{6}$, עולה ל־0.1 ב־$\frac{\pi}{2}$, יורדת ל־0 ב־$\frac{5\pi}{6}$, עולה ל־0.9 ב־$\frac{3\pi}{2}$ ויורדת ל־0.4 ב־2π.

סקיצה של g: נקודות (0,0.4), (π/6,0), (π/2,0.1), (5π/6,0), (3π/2,0.9), (2π,0.4)

תשובה: סקיצה: $g\geq 0$, נוגעת בציר ה־x ב־$\frac{5\pi}{6}$,$\frac{\pi}{6}$, מקסימומים ב־$(\frac{\pi}{2},0.1)$ ו־$(\frac{3\pi}{2},0.9)$.

סעיף ד (2)

מהסקיצה ומהקשר ל־f:

- בנקודות $x=\frac{\pi}{6}$ ו־$x=\frac{5\pi}{6}$ מתקיים $g=0$, ושם יש מינימום, כי תמיד $g\geq 0$.
- בנקודות הקיצון של f, כלומר ב־$x=\frac{\pi}{2}$ וב־$x=\frac{3\pi}{2}$, יש ל־g מקסימום:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=|0.5-0.4|=0.1$$
$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=|-0.5-0.4|=0.9$$

בקצוות:

$$g(0)=g(2\pi)=|0-0.4|=0.4$$

- מימין ל־$x=0$ הפונקצייה f עולה לכיוון 0.4, ולכן g יורדת – ב־$x=0$ יש מקסימום קצה.
- משמאל ל־$x=2\pi$ הפונקצייה f עולה מ־$-\frac{1}{2}$ ל־0, ולכן g יורדת – ב־$x=2\pi$ יש מינימום קצה.

תשובה: מקס' $(0,0.4)$, מינ' $(\frac{\pi}{6},0)$, מקס' $(\frac{\pi}{2},0.1)$, מינ' $(\frac{5\pi}{6},0)$, מקס' $(\frac{3\pi}{2},0.9)$, מינ' $(2\pi,0.4)$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\cos x+\frac{2}{(\cos x)^2}+a$, בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי גרף הפונקצייה $f(x)$ משיק לישר $y=2$ בשתי נקודות.

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$ וענו על הסעיפים ד–ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונות הפונקצייה $g(x)=f(x)-k$ והפונקצייה $h(x)=\frac{1}{g(x)}$, שתיהן בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.
k הוא פרמטר, $k\neq2$, $k\neq4$.

ו. מצאו את הערך של k שבעבורו גרף הפונקצייה $g(x)$ וגרף הפונקצייה $h(x)$ נפגשים בכל אחת מנקודות הקיצון שלהן.

פתרון מלא

סעיף א

המכנה $\cos^2 x$ לא יכול להתאפס:

$$\cos x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$$

בתחום $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ נוציא את הנקודות $x=\pm\frac{\pi}{2}$ ו־$x=\pm\frac{3\pi}{2}$. תחום ההגדרה:

$$-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$$
$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

תשובה: $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

סעיף ב

תחום ההגדרה סימטרי ביחס ל־0. נשתמש ב־$\cos(-x)=\cos x$:

$$f(-x)=\cos(-x)+\frac{2}{\cos^2(-x)}+a$$

$$= \cos x + \frac{2}{\cos^2 x} + a = f(x)$$

לכן הפונקציה **זוגית**.

תשובה: זוגית: $f(-x) = f(x)$

סעיף ג

נגזרת: נכתוב $\frac{2}{\cos^2 x} = 2(\cos x)^{-2}$ ונגזור לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = -\sin x$$
$$-4(\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x)$$
$$= -\sin x + \frac{4\sin x}{\cos^3 x}$$
$$= \sin x \cdot \left(\frac{4}{\cos^3 x} - 1\right)$$

$f'(x) = 0$**:**

- $\sin x = 0$: בתחום ההגדרה $x = -\pi,\ 0,\ \pi$.
- $\frac{4}{\cos^3 x} = 1$, כלומר $\cos^3 x = 4$ – אין פתרון, כי $\cos x \le 1$.

הישר $y = 2$ אופקי, ולכן הוא משיק לגרף רק בנקודה שבה $f'(x) = 0$ ו־$f(x) = 2$.

$$f(0) = 1 + 2 + a = 3 + a$$
$$f(\pm\pi) = -1 + \frac{2}{1} + a = 1 + a$$

הישר משיק בשתי נקודות. ב־$x = 0$ יש רק נקודה אחת, וב־$x = \pm\pi$ יש שתיים (הפונקציה זוגית). לכן:

$$1 + a = 2 \ \Rightarrow\ a = 1$$

בדיקה: אז $f(0) = 4 \neq 2$, כך שיש בדיוק שתי נקודות השקה.

תשובה: $a = 1$

סעיף ד

עבור $a = 1$:

$$f(x) = \cos x + \frac{2}{\cos^2 x} + 1$$

לפי סעיף ג, $f'(x) = 0$ ב־$x = -\pi, 0, \pi$:

$$f(0) = 4, \qquad f(\pm\pi) = 2$$

סוג הנקודות – הגורם $\frac{4}{\cos^3 x} - 1$: כאשר $\cos x > 0$ הוא חיובי, כי $\cos^3 x \le 1 < 4$, וכאשר $\cos x < 0$ הוא שלילי. טבלת סימנים (מספיק $x \ge 0$, הפונקציה זוגית):

x	$\sin x$	$\frac{4}{\cos^3 x} - 1$	$f'(x)$
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	+	+
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+	−	−
$-\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	−	−	+

ב־$x = 0$ הפונקציה עוברת מירידה (משמאל, מהזוגיות) לעלייה – מינימום. ב־$x = \pi$ מירידה לעלייה – מינימום. מהזוגיות גם $(-\pi, 2)$ מינימום.

נקודות הקצה $\pm\frac{3\pi}{2}$ אינן בתחום ההגדרה, ולכן אין קיצון בקצוות.

תשובה: שלוש נקודות מינימום: $(-\pi,2),\ (0,4),\ (\pi,2)$

סעיף ה

אסימפטוטות אנכיות: כאשר $\cos x \to 0$, המחובר $\frac{2}{\cos^2 x} \to +\infty$, ולכן $f(x) \to +\infty$ משני הצדדים של:

$$x = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad x = \pm\frac{3\pi}{2}$$

חיתוך עם הצירים: $f(0) = 4$. עם ציר ה־x אין חיתוך – כל נקודות המינימום מעל הציר, כי $f \geq 2$.

בכל אחד משלושת קטעי התחום הגרף יורד מ־$+\infty$ עד נקודת המינימום ועולה שוב ל־$+\infty$:

סקיצה: שלושה ענפים בצורת U, מינימום ב־(-π,2), (0,4), (π,2), אסימפטוטות אנכיות ב־±π/2 ו־±3π/2

תשובה: שלושה ענפים בצורת U מעל ציר ה־x, עם נקודות מינימום ואסימפטוטות אנכיות ב־$x = \pm\frac{\pi}{2}$ וב־$x = \pm\frac{3\pi}{2}$

סקיצה: שלושה ענפים בצורת U, מינימום ב־(-π,2), (0,4), (π,2), אסימפטוטות אנכיות ב־±π/2 ו־±3π/2

סעיף ו

נקודות הקיצון של g ו־h: $g'(x) = f'(x)$, ולכן ל־g יש קיצון באותם ערכי x כמו ל־f: $x = -\pi, 0, \pi$. גם

$$h'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

מתאפסת באותם ערכי x. כלומר לשתי הפונקציות יש קיצון ב־$x = -\pi, 0, \pi$.

נקודת מפגש: הגרפים נפגשים בנקודה אם $g(x) = h(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{g(x)} \ \Rightarrow\ g^2(x) = 1$$

$g(x) = 1$ או $g(x) = -1$

זה צריך להתקיים גם ב־$x = 0$ וגם ב־$x = \pm\pi$:

$$g(0) = 4 - k = \pm 1$$

$k = 3$ או $k = 5$

$$g(\pi) = 2 - k = \pm 1$$

$k = 1$ או $k = 3$

הערך המשותף:

$$k = 3$$

בדיקה: עבור $k = 3$, $g(0) = 1 = h(0)$ ו־$g(\pm\pi) = -1 = h(\pm\pi)$.

תשובה: $k = 3$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(b+\cos x)\sin x$, המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$, b הוא פרמטר.

א. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי לגרף הפונקצייה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה־ x .

ב. לפניכם שלוש אפשרויות I–III לערכים של b .

קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקצייה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם.

I. $b=0$ II. $0<b<1$ III. $1\le b$

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$, כאשר $\cos x=\frac{1}{4}$, הוא $\left(-\frac{5}{8}\right)$.

ג. מצאו את הערך של b .

הציבו $b=1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. **(1)** סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$ המקיימת $g(x)=\left(f(x)\right)^2\cdot f'(x)$. הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le \pi$.

ו. חשבו את השטח ברביע הראשון, המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

פתרון מלא

סעיף א

התחום סימטרי סביב 0. נבדוק את $f(-x)$, בעזרת הזהויות:

$$\cos(-x)=\cos x$$
$$\sin(-x)=-\sin x$$
$$f(-x)=\big(b+\cos(-x)\big)\sin(-x)$$
$$=(b+\cos x)\cdot(-\sin x)=-f(x)$$

לכן f אי־זוגית.

תשובה: אי־זוגית
$f(-x)=-f(x)$

סעיף ב

נקודות החיתוך עם ציר ה־x: $f(x)=0$, כלומר:

$$\sin x=0 \quad \text{או} \quad \cos x=-b$$

בתחום הנתון, $\sin x=0$ בשלוש נקודות:

$$x=-\pi,\ 0,\ \pi$$

אלה כבר שלוש נקודות, ולכן המשוואה $\cos x=-b$ לא יכולה להוסיף נקודות חדשות.

I: אם $b=0$, המשוואה היא $\cos x=0$, והפתרונות $x=\pm\frac{\pi}{2}$ – עוד שתי נקודות (סך הכול 5). לא מתאים.

II: אם b בין 0 ל־1, אז $-b$ בין -1 ל־0, ולמשוואה $\cos x = -b$ יש שני פתרונות בתוך התחום – סך הכול 5. לא מתאים.
III: אם $b > 1$, אין פתרון ל־$\cos x = -b$. אם $b = 1$, הפתרונות הם $x = \pm\pi$, שכבר נספרו. בשני המקרים יש בדיוק שלוש נקודות ✓.
תשובה: טענה III

סעיף ג
נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = -\sin x \cdot \sin x \\ \quad +(b+\cos x)\cos x \\ = -\sin^2 x + b\cos x + \cos^2 x$$

בנקודה שבה $\cos x = \frac{1}{4}$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{16}$$
$$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

השיפוע שם הוא $-\frac{5}{8}$:

$$-\frac{15}{16} + \frac{b}{4} + \frac{1}{16} = -\frac{5}{8}$$
$$\frac{b}{4} = -\frac{5}{8} + \frac{14}{16} = \frac{1}{4}$$
$$b = 1$$

תשובה: $b = 1$

סעיף ד
עבור $b = 1$:

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x$$
$$= \cos 2x + \cos x$$
$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$$
$$= (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

השוואה ל־0:

$$\cos x = \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \pm\tfrac{\pi}{3}$$
$$\cos x = -1 \;\Rightarrow\; x = \pm\pi$$

הגורם $\cos x + 1$ אינו שלילי, ולכן הסימן של f' נקבע לפי הגורם $2\cos x - 1$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x = -\pi$	0	מקסימום (קצה)
$-\pi < x < -\frac{\pi}{3}$	–	יורדת
$x = -\frac{\pi}{3}$	0	מינימום
$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$	+	עולה
$x = \frac{\pi}{3}$	0	מקסימום

$\frac{\pi}{3} < x < \pi$	–	יורדת
$x = \pi$	0	מינימום (קצה)

$$f(\tfrac{\pi}{3}) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f(-\tfrac{\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{(אי־זוגית)}$$

$$f(\pm\pi) = (1 - 1) \cdot 0 = 0$$

תשובה: מקסימום: $(-\pi, 0)$

מקסימום: $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

מינימום: $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

מינימום: $(\pi, 0)$

סעיף ה (1)

לפי סעיף ד, הגרף:

- מתחיל בנקודה $(-\pi, 0)$ ויורד;
- מגיע למינימום $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$;
- עולה דרך הראשית עד המקסימום $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$;
- יורד עד הנקודה $(\pi, 0)$.

הגרף סימטרי ביחס לראשית (פונקציה אי־זוגית).

סקיצה של f: מינימום ב־(-π/3, -3√3/4), מקסימום ב־(π/3, 3√3/4)

תשובה: סקיצה:

סקיצה של f: מינימום ב־(-π/3, -3√3/4), מקסימום ב־(π/3, 3√3/4)

סעיף ה (2)

$$f'(x) = \cos 2x + \cos x$$

- f' זוגית (סכום של פונקציות זוגיות), ולכן הגרף סימטרי לציר ה־y.
- בראשית: $f'(0) = 1 + 1 = 2$.
- אפסים (סעיף ד): $x = \pm\frac{\pi}{3}$ וגם $x = \pm\pi$.
- הסימן לפי טבלת סעיף ד: חיובית בין $-\frac{\pi}{3}$ ל־$\frac{\pi}{3}$, ושלילית בשאר התחום.

נקודות הקיצון של f':

$$f''(x) = -2\sin 2x - \sin x$$

$$= -\sin x\,(4\cos x + 1)$$

הנגזרת f'' מתאפסת ב־$x = 0$ (שם מקסימום של f') וכאשר $\cos x = -\frac{1}{4}$ (שם מינימום של f'):

$$f' = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$$

סקיצה של הנגזרת: מקסימום (0,2), אפסים ב־±π/3 ו־±π, מינימום -9/8

תשובה: סקיצה:

סקיצה של הנגזרת: מקסימום (0,2), אפסים ב־±π/3 ו־±π, מינימום -9/8

סעיף ו

הביטוי $\left(f(x)\right)^2$ אינו שלילי, ולכן הסימן של g שווה לסימן של f'. בין 0 ל־π, הנגזרת f' חיובית רק בין 0 ל־$\frac{\pi}{3}$ – זה השטח שברביע הראשון.

לפי כלל השרשרת:

$$\left(\frac{(f(x))^3}{3}\right)' = (f(x))^2 \cdot f'(x) = g(x)$$

לכן:

$$S = \int_0^{\pi/3} g(x)\,dx = \left[\frac{(f(x))^3}{3}\right]_0^{\pi/3}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{81\sqrt{3}}{64} = \frac{27\sqrt{3}}{64} \approx 0.731$$

תשובה: $\frac{27\sqrt{3}}{64} \approx 0.731$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\cos x-\sqrt{\cos x}$, בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) הראו כי הפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה זוגית.

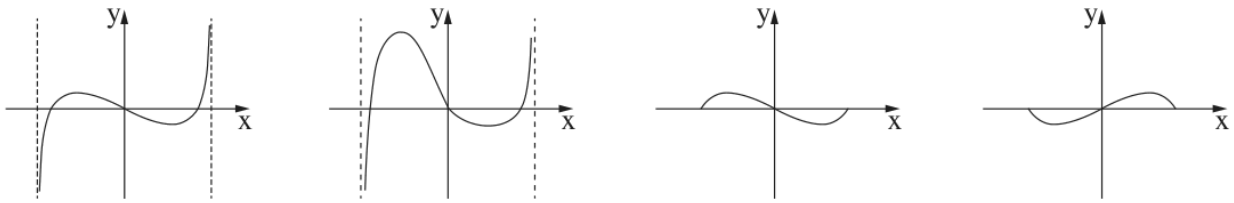
(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. קבעו איזה מן הגרפים $\text{I}-\text{IV}$ שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



I II III IV

נתונה הפונקצייה $g(x)=k-f(x)$, k הוא פרמטר חיובי. הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

נסמן ב־S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־x בתחום בין 0 ל־$\frac{\pi}{2}$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ ועל ידי הישרים $x=\frac{\pi}{2}$ ו־$x=-\frac{\pi}{2}$ הוא $10\cdot S$.

ה. הביעו את k באמצעות S .

פתרון מלא

סעיף א (1)

ביטוי בתוך שורש חייב להיות אי־שלילי:

$$\cos x \geq 0$$

בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$ זה מתקיים כאשר:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

תשובה: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

סעיף א (2)

התחום סימטרי סביב 0, ו־$\cos(-x) = \cos x$, ולכן:

$$f(-x) = \cos(-x) - \sqrt{\cos(-x)}$$
$$= \cos x - \sqrt{\cos x} = f(x)$$

תשובה: $f(-x) = f(x)$**, ולכן** f **זוגית.**

סעיף א (3)

חיתוך עם ציר ה־y**:** $f(0) = 1 - 1 = 0$.

חיתוך עם ציר ה־x: נציב $t = \sqrt{\cos x}$ ($t \geq 0$):

$$t^2 - t = 0 \Rightarrow t(t-1) = 0$$

- $t = 0$: $\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$.
- $t = 1$: $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$.

תשובה: $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$

סעיף א (4)

נגזור:

$$f'(x) = -\sin x - \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$$f'(x) = \sin x \left(\frac{1}{2\sqrt{\cos x}} - 1 \right)$$

$f'(x) = 0$:

- $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $\cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\cos x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} = 1$, ולכן $x \approx \pm 1.32$ (רדיאנים, בערך $\pm 0.42\pi$).

$$f(\pm 1.32) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4}$$

הפונקצייה זוגית, ולכן נבדוק את $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. כאשר $\cos x > \frac{1}{4}$, הסוגריים שליליים; כאשר $\cos x < \frac{1}{4}$, חיוביים:

x	$\sin x$	סוגריים	f'	f
0	0	$-$	0	מקס'
$0 < x < 1.32$	$+$	$-$	$-$	↘
1.32	$+$	0	0	מינ'
$1.32 < x < \frac{\pi}{2}$	$+$	$+$	$+$	↗
$\frac{\pi}{2}$	$+$			מקס' קצה

בקצוות $f(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$.

תשובה: מקסימום: $(0,0)$ **ו־**$(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$ **בקצוות; מינימום:** $(\pm 1.32, -0.25)$**, כלומר** $x \approx \pm 0.42\pi$

סעיף ב

הגרף סימטרי לציר ה־y, נמצא בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$ ואינו עולה מעל ציר ה־x.

סקיצה של f: מקסימום (0,0), מינימום (1.32±,-0.25), קצוות (π/2,0±)

תשובה: סקיצה: גרף זוגי מתחת לציר ה־x **עם מינימום** $(\pm 1.32, -0.25)$ **ומקסימום** $(0,0)$

סעיף ג

בתחום ההגדרה $0 \leq \cos x \leq 1$, ולכן $\cos x \leq \sqrt{\cos x}$, כלומר $f(x) \leq 0$. השוויון מתקיים רק ב־ $x = 0, \pm\frac{\pi}{2}$.

תשובה: שלילית: $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ **וגם** $0 < x < \frac{\pi}{2}$**. אין תחום חיוביות.**

סעיף ד

- f זוגית, ולכן f' אי־זוגית – הגרף שלה סימטרי לראשית.

- לפי הטבלה בסעיף א (4): $f' < 0$ ב־$0 < x < 1.32$ ו־$f' > 0$ ב־$1.32 < x < \frac{\pi}{2}$.
- כאשר $x \to \frac{\pi}{2}^-$, המכנה $2\sqrt{\cos x} \to 0^+$ ו־$\sin x \to 1$, ולכן $f' \to +\infty$; בצד השני $f' \to -\infty$.

גרפים I ו־II אינם שואפים לאינסוף בקצוות. גרף III אינו סימטרי לראשית. הגרף המתאים הוא IV.

תשובה: גרף IV

סעיף ה

$f \le 0$, ולכן השטח בין f לציר ה־x בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$S = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

f זוגית, ולכן:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = -2S$$

$k > 0$ ו־$f \le 0$, ולכן $g(x) = k - f(x) > f(x)$. השטח בין הגרפים:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g - f)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (k - 2f)\,dx$$
$$= k\pi - 2 \cdot (-2S) = k\pi + 4S$$

לפי הנתון:

$$k\pi + 4S = 10S$$
$$k = \frac{6S}{\pi}$$

תשובה: $k = \frac{6S}{\pi}$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{\sin(x)-a}{\sin(x)+a}$. a הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x המקיים $\sin(x)\neq -a$.

נתון כי הגרף של הפונקצייה $f(x)$ משיק לציר x בכל נקודות הקיצון שלה.

א. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ב–ה עבור התחום $-2\pi \le x \le 2\pi$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=-1$ בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי הפונקצייה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה.

ה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

$$\int_0^{\pi}(f(x)+1)\,dx>\frac{\pi}{2}$$.

פתרון מלא

סעיף א

נגזור לפי נגזרת המנה:

$$f'(x)=\frac{\cos x(\sin x+a)-(\sin x-a)\cos x}{(\sin x+a)^2}$$

$$=\frac{2a\cos x}{(\sin x+a)^2}$$

$a>0$, ולכן נקודות החשודות כקיצון הן היכן ש־$\cos x=0$, כלומר $\sin x=1$ או $\sin x=-1$.

הגרף משיק לציר x בכל נקודות הקיצון, כלומר בכל נקודת קיצון $f(x)=0$.

- היכן ש־$\sin x=1$: $a=1 \Rightarrow f=\frac{1-a}{1+a}=0$.
- אם $a\neq 1$, אז גם $\sin x=-1$ בתחום, ושם $f=\frac{-1-a}{-1+a}=\frac{1+a}{1-a}\neq 0$ – סתירה.

עבור $a=1$ הנקודות שבהן $\sin x=-1$ אינן בתחום, ובשאר נקודות הקיצון $f=0$.

$a = 1$

תשובה: $a = 1$

סעיף ב (1)

$f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}$. המכנה מתאפס כאשר $\sin x = -1$. בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$:

$$x = -\frac{\pi}{2}, \qquad x = \frac{3\pi}{2}$$

לכן התחום: $-2\pi \le x \le 2\pi$ פרט ל־$x = -\frac{\pi}{2}$ ו־$x = \frac{3\pi}{2}$.

תשובה: $-2\pi \le x \le 2\pi$, $x \ne -\frac{\pi}{2}$, $x \ne \frac{3\pi}{2}$

סעיף ב (2)

ציר y: $f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1$.

ציר x: $\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1$. בתחום:

$$x = \frac{\pi}{2}, \qquad x = -\frac{3\pi}{2}$$

תשובה: $(0, -1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right)$

סעיף ב (3)

$$f'(x) = \frac{2\cos x}{(\sin x + 1)^2}$$

המכנה חיובי, ולכן הסימן של f' הוא הסימן של $\cos x$. בתחום, $\cos x = 0$ ב־$x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$; מהן רק $x = \frac{\pi}{2}$ ו־$x = -\frac{3\pi}{2}$ בתחום ההגדרה. נוסיף את קצוות התחום $x = \pm 2\pi$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x = -2\pi$		מינימום (קצה)
$-2\pi < x < -\frac{3\pi}{2}$	+	עולה
$x = -\frac{3\pi}{2}$	0	מקסימום
$-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$	–	יורדת
$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	+	עולה
$x = \frac{\pi}{2}$	0	מקסימום
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$	–	יורדת
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	+	עולה
$x = 2\pi$		מקסימום (קצה)

$$f(\pm 2\pi) = \frac{0-1}{0+1} = -1$$
$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = f\left(-\tfrac{3\pi}{2}\right) = 0$$

תשובה: מקסימום $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right)$**; מקסימום (קצה)** $(2\pi, -1)$**; מינימום (קצה)** $(-2\pi, -1)$

סעיף ג

$\sin x - 1 \le 0$ ו־$\sin x + 1 \ge 0$, ולכן $f(x) \le 0$ בכל התחום – הגרף מתחת לציר x ונוגע בו בשתי נקודות המקסימום. ליד $x = -\frac{\pi}{2}$ ו־$x = \frac{3\pi}{2}$ המונה שואף ל־-2 והמכנה ל־0^+, ולכן $f \to -\infty$: אלה אסימפטוטות אנכיות.

סקיצה של f(x)

תשובה: הגרף כולו מתחת לציר x, נוגע בו ב־$\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$ ו־$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$; אסימפטוטות אנכיות $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$; בקצוות $(\pm 2\pi,-1)$.

סעיף ד

$$\frac{\sin x-1}{\sin x+1}=-1$$
$$\sin x-1=-\sin x-1$$
$$2\sin x=0 \;\Rightarrow\; \sin x=0$$

בתחום $-2\pi\le x\le 2\pi$:

$$x=-2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi$$

כל הערכים בתחום ההגדרה, ולכן יש 5 פתרונות. בסקיצה: הישר $y=-1$ חותך את הגרף בחמש נקודות

תשובה: 5 פתרונות

סעיף ה

נסמן $h(x)=f(x)+1=\frac{2\sin x}{\sin x+1}$. בקטע $[0,\pi]$:

$$h(0)=h(\pi)=0,\qquad h\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1$$

h היא הזזה של f כלפי מעלה, ולכן גם היא קעורה כלפי מטה בקטע – הקטע $[0,\pi]$ כלול בחלק התחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.

גרף של פונקציה קעורה כלפי מטה נמצא מעל המיתרים שלו. לכן בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ הגרף מעל הקטע מ־$(0,0)$ ל־$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, ובקטע $[\frac{\pi}{2},\pi]$ – מעל הקטע מ־$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ ל־$(\pi,0)$.

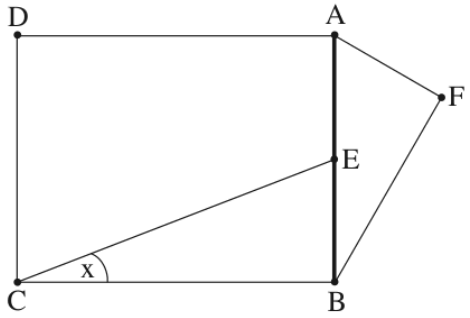
שני הקטעים יוצרים משולש שבסיסו π וגובהו 1:

$$\int_0^{\pi}\big(f(x)+1\big)dx>\frac{\pi\cdot 1}{2}=\frac{\pi}{2}$$

הטענה נכונה. לבדיקה: ערך האינטגרל הוא $2\pi-4\approx 2.28$, ואכן הוא גדול מ־$\frac{\pi}{2}\approx 1.57$.

תשובה: נכונה: הגרף של $f+1$ קעור, ולכן מעל המשולש שקודקודיו $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, $(\pi,0)$, ששטחו $\frac{\pi}{2}$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 8



8. הנקודה E היא אמצע הקטע AB .

על הקטע AB בונים מלבן ABCD

ומשולש ישר זווית AFB , $\sphericalangle AFB = 90^o$, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\sphericalangle ECB = x$, $\sphericalangle FAB = 2x$.

נסמן את אורך הקטע AB ב־ h .

א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x ? הסבירו את תשובתכם.

ב. הביעו באמצעות x ו־ h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF .

ג. מצאו את הערך של x שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.

ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB .

פתרון מלא

סעיף א

במשולש ישר־הזווית AFB הזווית F ישרה, ולכן שתי הזוויות האחרות חדות:

$$0^\circ < 2x < 90^\circ \;\Rightarrow\; 0^\circ < x < 45^\circ$$

במשולש ECB הזווית B ישרה, כי $ABCD$ מלבן. לכן גם שם x זווית חדה, וזה כבר מתקיים בתחום שמצאנו.

$$0^\circ < x < 45^\circ$$

תשובה: $0^\circ < x < 45^\circ$

סעיף ב

E אמצע AB, ולכן $EB = \frac{h}{2}$.

במשולש ECB הזווית B ישרה:

$$\sin x = \frac{EB}{CE} \;\Rightarrow\; CE = \frac{h}{2\sin x}$$

במשולש AFB הזווית F ישרה, ו־AB הוא היתר:

$$\cos 2x = \frac{AF}{AB} \;\Rightarrow\; AF = h\cos 2x$$

ההפרש:

$$CE - AF = \frac{h}{2\sin x} - h\cos 2x$$

תשובה: $CE - AF = \frac{h}{2\sin x} - h\cos 2x$

סעיף ג

נגדיר את פונקציית ההפרש בתחום $0^\circ < x < 45^\circ$:

$$d(x) = \frac{h}{2\sin x} - h\cos 2x$$

נגזור, כאשר h קבוע:

$$d'(x) = -\frac{h\cos x}{2\sin^2 x} + 2h\sin 2x$$

נשתמש ב־$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ונוציא גורם משותף:

$$d'(x) = h\cos x\left(4\sin x - \frac{1}{2\sin^2 x}\right)$$
$$= \frac{h\cos x\,(8\sin^3 x - 1)}{2\sin^2 x}$$

בתחום $\cos x > 0$, ולכן:

$$d'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 8\sin^3 x = 1$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = 30^\circ$$

x	$d'(x)$	$d(x)$
$0^\circ < x < 30^\circ$	–	יורדת
$x = 30^\circ$	0	מינימום
$30^\circ < x < 45^\circ$	+	עולה

בדיקה: ב־$x = 20^\circ$ מתקיים $8\sin^3 20^\circ \approx 0.32$, קטן מ־1, וב־$x = 40^\circ$ מתקיים $8\sin^3 40^\circ \approx 2.12$, גדול מ־1.

ההפרש מינימלי עבור $x = 30^\circ$.

תשובה: $x = 30^\circ$

סעיף ד

עבור $x = 30^\circ$:

שטח המלבן: במשולש ECB:

$$\tan 30^\circ = \frac{EB}{BC}$$
$$BC = \frac{h/2}{\tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}h$$
$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2}h^2$$

שטח המשולש AFB**:** $\angle FAB = 60^\circ$, ולכן:

$$AF = h\cos 60^\circ = \frac{h}{2}$$
$$FB = h\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}h$$
$$S_{AFB} = \frac{AF \cdot FB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}h^2$$

היחס:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{AFB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}h^2}{\frac{\sqrt{3}}{8}h^2} = 4$$

תשובה: $S_{ABCD} : S_{AFB} = 4$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\sin(x)\cdot\cos^3(x)$ המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

א. **(1)** האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו (בקו מקווקו) סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקצייה $f(x)$.

ענו על סעיף ג בעבור התחום שבו מוגדרות שתי הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$.

ג. מצאו את המרחק המינימלי בין הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ סימטרי סביב 0. נחשב את $f(-x)$, ונשתמש ב־$\sin(-x)=-\sin x$ וב־$\cos(-x)=\cos x$:

$$f(-x)=\sin(-x)\cdot\cos^3(-x)$$
$$=-\sin x\cdot\cos^3 x=-f(x)$$

לכן $f(x)$ אי־זוגית.

תשובה: אי־זוגית, כי $f(-x)=-f(x)$.

סעיף א (2)

חיתוך עם ציר ה־y: $f(0)=0$, כלומר הנקודה $(0,0)$.

חיתוך עם ציר ה־x:

$$\sin x\cdot\cos^3 x=0$$

אפשרות ראשונה:

$$\sin x=0\ \Rightarrow\ x=0$$

אפשרות שנייה:

$$\cos x=0\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{2}$$

תשובה: $(-\frac{\pi}{2},0),\ (0,0),\ (\frac{\pi}{2},0)$

סעיף א (3)

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = \cos x \cdot \cos^3 x$$
$$+ \sin x \cdot 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)$$
$$= \cos^2 x \left(\cos^2 x - 3\sin^2 x\right)$$

הנגזרת מתאפסת בקצוות, שבהם $\cos x = 0$, או כאשר:

$$\cos^2 x = 3\sin^2 x$$
$$\tan^2 x = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$x = \pm\frac{\pi}{6}$$
$$f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

ומכיוון ש־f אי־זוגית: $f\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) = -\tfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$-\frac{\pi}{2}$		מקס' קצה
$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$	$-$	↘
$-\frac{\pi}{6}$	0	מינ'
$-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$	$+$	↗
$\frac{\pi}{6}$	0	מקס'
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$	$-$	↘
$\frac{\pi}{2}$		מינ' קצה

(למשל $f'(0) = 1 > 0$.)

תשובה: מקס' קצה $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$**; מינ'** $\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$**; מקס'** $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$**; מינ' קצה** $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

סעיף א (4)

לפי הסעיפים הקודמים: הגרף סימטרי ביחס לראשית, עובר דרך $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(0,0)$ ו־$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, יורד עד למינימום ב־$x = -\frac{\pi}{6}$, עולה עד למקסימום ב־$x = \frac{\pi}{6}$ ויורד שוב.

סקיצה של f(x)=sin x cos^3 x: מינימום (-π/6,-3√3/16), מקסימום (π/6,3√3/16)

תשובה: סקיצה: מינימום ב־$\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$**, מקסימום ב־**$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$**, והגרף עובר דרך הראשית ודרך** $\left(\pm\frac{\pi}{2}, 0\right)$**.**

סעיף ב (1)

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ מוגדרת כאשר הביטוי שבתוך השורש חיובי (הוא גם במכנה, ולכן שונה מ־0):

$$f(x) > 0$$

מסעיף א: f חיובית רק בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

תשובה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$

סעיף ב (2)

נגזור:

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{2f(x)\sqrt{f(x)}}$$

בתחום ההגדרה המכנה חיובי, ולכן הסימן של g' הפוך לסימן של f': כאשר f עולה g יורדת, וכאשר f יורדת g עולה.

x		f	g
$0 < x < \frac{\pi}{6}$	↗	↘	
$\frac{\pi}{6}$		מקס'	מינ'
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$	↘	↗	

$$g\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$$

$$\approx 1.755$$

תשובה: מינימום בנקודה $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{4}{\sqrt{3\sqrt{3}}}\right)$**, כלומר בערך** $\left(\frac{\pi}{6},\ 1.755\right)$**.**

סעיף ב (3)

כאשר x מתקרב ל־0 מימין, או ל־$\frac{\pi}{2}$ משמאל, $f(x)$ מתקרב ל־0 והוא חיובי. לכן:

$$g(x) \to +\infty$$

כלומר הישרים $x = 0$ ו־$x = \frac{\pi}{2}$ הם אסימפטוטות אנכיות של g.

הגרף של g יורד מפלוס אינסוף עד למינימום $\left(\frac{\pi}{6}, 1.755\right)$ ועולה שוב לפלוס אינסוף. בסרטוט, g מסומנת בקו מקווקו:

f ו-g באותה מערכת צירים: g בקו מקווקו עם מינימום (π/6,1.755)

תשובה: סקיצה: הגרף של g **בקו מקווקו, בין האסימפטוטות** $x = 0$ **ו־**$x = \frac{\pi}{2}$**, עם מינימום ב־**$\left(\frac{\pi}{6}, 1.755\right)$**.**

סעיף ג

בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$ הערך הגדול ביותר של f הוא $\frac{3\sqrt{3}}{16}$, שקטן מ־1. לכן $g = \frac{1}{\sqrt{f}}$ גדולה מ־1, וגרף g נמצא מעל גרף f. המרחק האנכי בין הגרפים:

$$d(x) = g(x) - f(x)$$

נגזור, ונשתמש בנגזרת של g מסעיף ב (2):

$$d'(x) = g'(x) - f'(x)$$

$$= -f'(x)\left(\frac{1}{2f(x)\sqrt{f(x)}} + 1\right)$$

הביטוי שבסוגריים חיובי, ולכן הסימן של d' הפוך לסימן של f':

x	f'	d'	d
$0 < x < \frac{\pi}{6}$	−	+	↘
$\frac{\pi}{6}$	0	0	מינ'
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$	+	−	↗

$$d_{min} = g\left(\frac{\pi}{6}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 1.755 - \frac{3\sqrt{3}}{16} \approx 1.43$$

בנקודה זו g מקבלת את הערך הקטן ביותר שלה ו־f את הגדול ביותר שלה.

תשובה: המרחק המינימלי הוא בערך 1.43, ומתקבל ב־$x = \frac{\pi}{6}$.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 8

8. נתון מעוין $ABCD$. נקודה E היא אמצע הצלע BC.

נסמן: $\sphericalangle ECD = x$.

נתון: שטח המשולש ECD הוא 18.

א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן ב־s את אורך צלע המעוין. E אמצע BC, ולכן:

$$EC = \frac{s}{2}, \qquad CD = s$$

שטח המשולש ECD לפי שתי צלעות והזווית שביניהן:

$$S_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot CD \cdot \sin x$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot s \cdot \sin x = \frac{s^2 \sin x}{4}$$
$$\frac{s^2 \sin x}{4} = 18 \;\Rightarrow\; s^2 = \frac{72}{\sin x}$$
$$s = \sqrt{\frac{72}{\sin x}}$$

תשובה: $\sqrt{\frac{72}{\sin x}}$

סעיף ב

DE **כפונקציה של** x – משפט הקוסינוסים במשולש ECD:

$$DE^2 = EC^2 + CD^2$$
$$-2 \cdot EC \cdot CD \cos x$$
$$= \frac{s^2}{4} + s^2 - s^2 \cos x$$
$$= s^2\left(\frac{5}{4} - \cos x\right)$$

נציב $s^2 = \frac{72}{\sin x}$:

$$DE^2 = \frac{72\left(\frac{5}{4} - \cos x\right)}{\sin x}$$

$$= \frac{90 - 72\cos x}{\sin x}$$

DE מינימלי כאשר DE^2 מינימלי. נסמן $h(x) = \frac{90-72\cos x}{\sin x}$, בתחום $0^\circ < x < 180^\circ$.

נגזרת לפי כלל המנה:

$$h'(x) = \frac{72\sin^2 x - (90 - 72\cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{72\sin^2 x + 72\cos^2 x - 90\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{72 - 90\cos x}{\sin^2 x}$$

$$h'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = \frac{72}{90} = 0.8$$

$$x \approx 36.87^\circ$$

סוג הקיצון: המכנה חיובי. המונה $72 - 90\cos x$ שלילי כאשר $\cos x > 0.8$, כלומר בזוויות קטנות יותר, וחיובי כאשר $\cos x < 0.8$:

x	$h'(x)$	$h(x)$
$x < 36.87^\circ$	–	יורדת
$x \approx 36.87^\circ$	0	מינ׳
$x > 36.87^\circ$	+	עולה

הערך המינימלי: כאשר $\cos x = 0.8$, $\sin x = 0.6$:

$$DE^2 = \frac{90 - 72 \cdot 0.8}{0.6} = \frac{32.4}{0.6} = 54$$

$$DE_{\min} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \approx 7.35$$

תשובה: $DE_{\min} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \approx 7.35$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2\sin(x)}{\cos^2(x)-1}$ בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x.

(3) האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? הוכיחו את תשובתכם.

ב. ענו על התת־סעיפים (1)–(2) שלפניכם בעבור התחום $0 \le x \le 2\pi$.

(1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ (בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$).

ד. הוכיחו כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה־ x, בתחום $1.7 \le x \le 2$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה מתאפס כאשר $\cos^2 x = 1$, כלומר $\sin^2 x = 0$, כלומר $\sin x = 0$. בתחום הנתון:

$$x = -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi$$

אלה הנקודות שיש להוציא מהתחום.

תשובה: כל x בתחום פרט ל:

$$x = -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi$$

סעיף א (2)

נפשט: $\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$, ולכן:

$$f(x) = \frac{2\sin x}{-\sin^2 x} = -\frac{2}{\sin x}$$

בכל אחת מהנקודות שהוצאו, $\sin x \to 0$ והמונה -2 שונה מ־0, ולכן הפונקציה שואפת לאינסוף – אסימפטוטה אנכית.

תשובה: $x = -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi$

סעיף א (3)

התחום סימטרי סביב 0. בעזרת $\sin(-x) = -\sin x$ ו־$\cos(-x) = \cos x$:

$$f(-x) = \frac{2\sin(-x)}{\cos^2(-x)-1}$$

$$= \frac{-2\sin x}{\cos^2 x - 1} = -f(x)$$

לכן f אי־זוגית.

תשובה: אי־זוגית

$$f(-x) = -f(x)$$

סעיף ב (1)

$f(x) = -\frac{2}{\sin x}$ – המונה -2, ולכן הפונקציה אף פעם לא מתאפסת: אין חיתוך עם ציר ה־x.

$x = 0$ לא בתחום ההגדרה, ולכן אין גם חיתוך עם ציר ה־y.

תשובה: אין נקודות חיתוך עם הצירים.

סעיף ב (2)

$$f(x) = -2(\sin x)^{-1}$$

$$f'(x) = 2(\sin x)^{-2}\cos x = \frac{2\cos x}{\sin^2 x}$$

$\sin^2 x > 0$ בתחום, ולכן הסימן של f' כסימן של $\cos x$. בתחום $0 < x < 2\pi$:

$$\cos x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2},\quad x = \frac{3\pi}{2}$$

תחום	f'	f
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	עולה
$x = \frac{\pi}{2}$	0	מקסימום
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$	–	יורדת
$x = \frac{3\pi}{2}$	0	מינימום
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	+	עולה

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = -\frac{2}{1} = -2$$

$$f(\tfrac{3\pi}{2}) = -\frac{2}{-1} = 2$$

(הנקודה $x = \pi$ אינה בתחום – שם אסימפטוטה.)

תשובה: מקסימום $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$

מינימום $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$

סעיף ג

לפי סעיף ב בתחום החיובי, ולפי הסימטריה ביחס לראשית (פונקציה אי־זוגית) בתחום השלילי:

מקסימום:

$$\left(\frac{\pi}{2}, -2\right),\quad \left(-\frac{3\pi}{2}, -2\right)$$

מינימום:

$$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right),\quad \left(-\frac{\pi}{2}, 2\right)$$

אסימפטוטות אנכיות:

$$x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi$$

סקיצה של f=-2/sin x בתחום מ־-2π עד 2π עם אסימפטוטות ב־0, ±2π, ±π

תשובה: סקיצה:

סקיצה של f=-2/sin x בתחום מ־-2π עד 2π עם אסימפטוטות ב־0, ±2π, ±π

סעיף ד

נגזור את $f'(x) = \frac{2\cos x}{\sin^2 x}$ לפי נגזרת המנה. המונה של f'':

$$-2\sin x\cdot\sin^2 x-2\cos x\cdot 2\sin x\cos x$$
$$=-2\sin x\left(\sin^2 x+2\cos^2 x\right)$$

המכנה $\sin^4 x$. נצמצם ב־$\sin x$, ונשתמש ב־$\sin^2 x+\cos^2 x=1$:

$$f''(x)=\frac{-2(\sin^2 x+2\cos^2 x)}{\sin^3 x}$$
$$f''(x)=\frac{-2(1+\cos^2 x)}{\sin^3 x}$$

המונה $-2(1+\cos^2 x)$ אף פעם אינו מתאפס, כי $1+\cos^2 x\geq 1$. לכן f'' אינה מתאפסת בשום נקודה בתחום, ואין נקודות פיתול.

(הסימן של f'' מתחלף רק באסימפטוטות, שאינן בתחום.)

תשובה: הוכחה: המונה של f'' הוא $-2(1+\cos^2 x)$, ואינו מתאפס.

סעיף ה

הקטע שבין 1.7 ל־2 נמצא בין $\frac{\pi}{2}$ לבין π:

$$\frac{\pi}{2}\approx 1.571<1.7<2<\pi$$

שם $\cos x$ שלילי, ולכן $f'(x)$ שלילית – הגרף של f' מתחת לציר ה־x.

f היא פונקציה קדומה של f', ולכן:

$$S=-\int_{1.7}^{2} f'(x)\,dx=-\left[f(x)\right]_{1.7}^{2}$$
$$=f(1.7)-f(2)$$
$$=-\frac{2}{\sin 1.7}+\frac{2}{\sin 2}$$
$$\approx -2.0168+2.1995\approx 0.18$$

תשובה: ≈ 0.18

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\sin^2(x)-\cos^2(x)-1$, המוגדרת לכל x.

א. האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית? נמקו.

ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2\le f(x)\le 0$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(2x)$, המוגדרת לכל x.

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(g'(x)-f'(x)\right)dx=S$.

הביעו באמצעות S את $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0}\left(g'(x)-f'(x)\right)dx$. הסבירו את התשובה.

פתרון מלא

סעיף א

נפשט: $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, ולכן:

$$f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$$
$$-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$
$$f(x)=-2\cos^2 x$$

מתקיים $\cos(-x)=\cos x$, ולכן $f(-x)=-2\cos^2 x=f(x)$: הפונקצייה זוגית.

תשובה: כן, הפונקצייה זוגית

סעיף ב

לפי סעיף א, $f(x)=-2\cos^2 x$. לכל x:

$$0\le\cos^2 x\le 1$$

נכפיל ב־-2 (היפוך סימני אי־השוויון):

$$-2\le -2\cos^2 x\le 0$$
$$-2\le f(x)\le 0$$

תשובה: הוכחה בעזרת הפישוט מסעיף א

סעיף ג

ציר ה־x:

$$-2\cos^2 x=0\Rightarrow\cos x=0$$

$$x = \pm\frac{\pi}{2}$$

ציר ה־y: $f(0) = -2\cos^2 0 = -2$.

תשובה: עם ציר ה־x: $(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$

עם ציר ה־y: $(0, -2)$

סעיף ד

לפי סעיפים ב–ג: הערך הגדול ביותר 0 מתקבל ב־$x = \pm\frac{\pi}{2}$, והקטן ביותר -2 מתקבל ב־$x = 0, \pm\pi$ (שם $\cos^2 x = 1$). הגרף סימטרי לציר ה־y.

סקיצה של f=-2cos²x בתחום [-π,π]

תשובה: סקיצה:

סקיצה של f=-2cos²x בתחום [-π,π]

סעיף ה

$$g(x) = f(2x) = -2\cos^2(2x)$$

בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ מתקיים $-\pi \le 2x \le \pi$.

- **מקסימום** (ערך 0) כאשר $\cos 2x = 0$:

$$2x = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4}$$

- **מינימום** (ערך -2) כאשר $\cos^2 2x = 1$:

$$2x = 0, \pm\pi \Rightarrow x = 0,\ \pm\frac{\pi}{2}$$

(לפי סעיף ב אלה הערך הגדול ביותר והקטן ביותר האפשריים, ולכן אלה נקודות קיצון; $x = \pm\frac{\pi}{2}$ הן נקודות קצה.)

תשובה: מקסימום: $(\pm\frac{\pi}{4}, 0)$

מינימום: $(0, -2)$ **ו־**$(\pm\frac{\pi}{2}, -2)$

סעיף ו

נסמן $H(x) = g(x) - f(x)$. אז $H'(x) = g'(x) - f'(x)$, ולפי המשפט היסודי:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{8}} H'(x)\,dx = H\left(\tfrac{\pi}{8}\right) - H(0)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} H'(x)\,dx = H(0) - H\left(-\tfrac{\pi}{8}\right)$$

הפונקציות f ו־g זוגיות, ולכן גם H זוגית: $H(-\frac{\pi}{8}) = H(\frac{\pi}{8})$. לכן:

$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} H'(x)\,dx = H(0) - H\left(\tfrac{\pi}{8}\right) = -S$$

תשובה: $-S$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2(\cos x)^2+\sin 2x}{2\cos x}$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

א. **(1)** מִצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) הסבירו מדוע לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה־ x.

(3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. **(1)** הַראו כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ מתקיים: $f'(x)=\cos x-\sin x$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקִבעו את סוגן.

ג. **(1)** סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) k הוא מספר. מִצאו את כל ערכי k שבעבורם יש למשוואה $f(x)=k$ פתרון יחיד (בתחום $0\le x\le 2\pi$).

ד. חַשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי שני הישרים $x=\frac{3}{4}\pi$ ו־ $x=\frac{5}{4}\pi$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה $2\cos x$ חייב להיות שונה מאפס:

$$\cos x\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq\frac{\pi}{2},\ x\neq\frac{3\pi}{2}$$

תשובה: $0\le x\le 2\pi$

חוץ מ־ $x=\frac{\pi}{2}$ **ו־** $x=\frac{3\pi}{2}$

סעיף א (2)

נשתמש ב־ $\sin 2x=2\sin x\cos x$ ונוציא גורם משותף במונה:

$$f(x)=\frac{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}{2\cos x}$$
$$=\frac{2\cos x\,(\cos x+\sin x)}{2\cos x}$$

בתחום ההגדרה $\cos x\neq 0$, ולכן אפשר לצמצם:

$$f(x)=\cos x+\sin x$$

גם המונה מתאפס בנקודות $x=\frac{\pi}{2}$ ו־ $x=\frac{3\pi}{2}$, ושם הגבול סופי:

$$\lim_{x\to\pi/2} f(x)=1,\qquad \lim_{x\to 3\pi/2} f(x)=-1$$

הפונקציה לא שואפת לאינסוף, ולכן אין אסימפטוטות אנכיות. בנקודות האלה יש לגרף „חורים".

תשובה: אחרי צמצום:

$f(x)=\cos x+\sin x$

הגבולות ב־ $\frac{\pi}{2}$ **וב־** $\frac{3\pi}{2}$ **סופיים.**

סעיף א (3)

ציר y**:** $f(0)=\cos 0+\sin 0=1$, הנקודה $(0,1)$.

ציר x:

$$\sin x + \cos x = 0 \;\Rightarrow\; \tan x = -1$$
$$x = \frac{3\pi}{4}, \quad x = \frac{7\pi}{4}$$

שתי הנקודות בתחום ההגדרה.
תשובה: $(0,1)$, $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$

סעיף ב (1)

לפי א (2), בתחום ההגדרה $f(x)=\cos x+\sin x$, ולכן:

$$f'(x) = -\sin x + \cos x = \cos x - \sin x$$

תשובה: הוכחה: $f(x)=\cos x+\sin x$
ולכן $f'(x)=\cos x-\sin x$**.**

סעיף ב (2)

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \tan x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{5\pi}{4}$$
$$f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \qquad f\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

נבדוק גם את קצות התחום:

$$f(0) = f(2\pi) = 1$$
$$f'(0) = f'(2\pi) = 1 > 0$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x=0$	+	מינימום בקצה
$0<x<\frac{\pi}{4}$	+	↗
$x=\frac{\pi}{4}$	0	מקסימום
$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$	−	↘
$x=\frac{\pi}{2}$	לא מוגדרת	
$\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{4}$	−	↘
$x=\frac{5\pi}{4}$	0	מינימום
$\frac{5\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}$	+	↗
$x=\frac{3\pi}{2}$	לא מוגדרת	
$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$	+	↗
$x=2\pi$	+	מקסימום בקצה

הנקודות $x=\frac{\pi}{2}$ ו־$x=\frac{3\pi}{2}$ אינן בתחום ההגדרה, ולכן מחריגים אותן מתחומי העלייה והירידה (בכל צד שלהן כיוון השינוי נשאר זהה).
תשובה: מקסימום: $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, $(2\pi,1)$
מינימום: $\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$, $(0,1)$

סעיף ג (1)

הגרף של $\sin x+\cos x$ עם שני „חורים": $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ ו־$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$.

סקיצה של f(x)

תשובה: סקיצה:

סקיצה של f(x)

סעיף ג (2)

נעבור על ערכי k לפי הסקיצה:

- $k=\sqrt{2}$ – רק בנקודת המקסימום $x=\frac{\pi}{4}$: פתרון יחיד.
- $1<k<\sqrt{2}$ – פתרון אחד מכל צד של $\frac{\pi}{4}$: שני פתרונות.
- $k=1$ – שני פתרונות: $x=0$ ו־$x=2\pi$. הנקודה $x=\frac{\pi}{2}$ היא חור.
- $-1<k<1$ – פתרון אחד בירידה ואחד בעלייה: שני פתרונות.
- $k=-1$ – פתרון יחיד: $x=\pi$, בחלק היורד. בחלק העולה הערך -1 מתקבל רק ב־$x=\frac{3\pi}{2}$, שהיא חור.
- $-\sqrt{2}<k<-1$ – שני פתרונות, משני צדי $\frac{5\pi}{4}$.
- $k=-\sqrt{2}$ – רק בנקודת המינימום $x=\frac{5\pi}{4}$: פתרון יחיד.

תשובה: $k=\sqrt{2}$

$k=-1$

$k=-\sqrt{2}$

סעיף ד

לפי טבלת העלייה והירידה (סעיף ב (2)), f יורדת בתחום $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ (פרט לנקודה $\frac{\pi}{2}$, שאינה בתחום ההגדרה), ולכן בתחום $\frac{3\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$ מתקיים $f'(x)\le 0$: הגרף של f' מתחת לציר x (ונוגע בו רק ב־$x=\frac{5\pi}{4}$).

פונקציה קדומה של f' היא $f(x)=\sin x+\cos x$, ולכן:

$$\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} f'(x)\,dx=\Big[\sin x+\cos x\Big]_{3\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$=-\sqrt{2}-0=-\sqrt{2}$$

$$S=\sqrt{2}\approx 1.414$$

תשובה: $S=\sqrt{2}\approx 1.414$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 7

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\tan(x)+\frac{1}{x}$.

ענה על הסעיפים א–ב בעבור התחום $0\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־x.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד ששיעוריה $(2.798\,,0)$ בקירוב.

ב. מצא את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה $g(x)=\frac{\cos(x)}{x}$, המוגדרת לכל $x\neq 0$.

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי־זוגית, או לא זוגית ולא אי־זוגית? הוכח את תשובתך.

ד. **(1)** הראה כי בתחום $0\le x\le\frac{3\pi}{2}$ שיעור ה־x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווה לשיעור ה־x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־x, וקבע את סוגה של נקודת קיצון זו.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הביטוי $\frac{1}{x}$ מוגדר עבור $x\neq 0$.

הביטוי $\tan x$ אינו מוגדר כאשר $\cos x=0$. בתחום הנתון זה קורה ב־$x=\frac{\pi}{2}$ וב־$x=\frac{3\pi}{2}$.

תחום ההגדרה:

$$0<x<\frac{3\pi}{2},\quad x\neq\frac{\pi}{2}$$

תשובה: $0<x<\frac{3\pi}{2}$, $x\neq\frac{\pi}{2}$

סעיף א (2)

בכל אחת מנקודות אי־ההגדרה הפונקציה שואפת לאינסוף:

- כאשר x מתקרב ל־0 מימין, הביטוי $\frac{1}{x}$ שואף לאינסוף, ו־$\tan x$ שואף ל־0.
- כאשר x מתקרב ל־$\frac{\pi}{2}$ או ל־$\frac{3\pi}{2}$, הביטוי $\tan x$ שואף לאינסוף או למינוס אינסוף, ו־$\frac{1}{x}$ סופי.

האסימפטוטות האנכיות:

$$x=0,\quad x=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{3\pi}{2}$$

תשובה: $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$

סעיף ב

הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה, ולכן היא יכולה להחליף סימן רק בנקודת אפס או בנקודת אי־הגדרה. נקודות אלה מחלקות את התחום לשלושה קטעים, ונבדוק נקודה בכל קטע:

- בקטע $0<x<\frac{\pi}{2}$ שני המחוברים חיוביים, ולכן $f(x)>0$.
- בקטע $\frac{\pi}{2}<x<2.798$ נבדוק למשל את $x=\frac{2\pi}{3}$:

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + \frac{3}{2\pi} \approx -1.25$$

- בקטע $2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$ נבדוק למשל את $x = \pi$:

$$f(\pi) = 0 + \frac{1}{\pi} > 0$$

חיוביות: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ וגם $2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$.
שליליות: $\frac{\pi}{2} < x < 2.798$.
תשובה: חיובית: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ **וגם** $2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$
שלילית: $\frac{\pi}{2} < x < 2.798$

סעיף ג

תחום ההגדרה $x \neq 0$ סימטרי סביב 0. נחשב את $g(-x)$:

$$g(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x}$$
$$= -\frac{\cos x}{x} = -g(x)$$

השתמשנו בזהות $\cos(-x) = \cos x$. לכן $g(x)$ **אי־זוגית**.
תשובה: אי־זוגית, כי $g(-x) = -g(x)$**.**

סעיף ד (1)

נגזור לפי כלל המנה:

$$g'(x) = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$

נקודות חשודות לקיצון:

$$x\sin x + \cos x = 0$$

אם $\cos x = 0$ אז $\sin x = \pm 1$, והמשוואה נותנת $0 = x$, שאינו בתחום. לכן $\cos x \neq 0$, ומותר לחלק ב־$x\cos x$:

$$\tan x + \frac{1}{x} = 0$$
$$f(x) = 0$$

כלומר שיעור ה־x של נקודת הקיצון שווה לשיעור ה־x של נקודת החיתוך של f עם ציר ה־x:

$$x \approx 2.798$$

סוג הנקודה: נכתוב את הנגזרת בעזרת f:

$$g'(x) = -\frac{x\cos x \cdot f(x)}{x^2}$$
$$= -\frac{\cos x}{x} \cdot f(x)$$

ליד $x = 2.798$ מתקיים $\cos x < 0$ וגם $x > 0$, ולכן הסימן של g' שווה לסימן של f. לפי סעיף ב, f שלילית משמאל ל־2.798 וחיובית מימין לה:

x	$x < 2.798$	2.798	$x > 2.798$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	יורדת	מינימום	עולה

$$g(2.798) = \frac{\cos 2.798}{2.798} \approx -0.337$$

זו נקודת **מינימום**, ששיעוריה $(2.798,\ -0.337)$.

תשובה: שיעור ה־x של הקיצון הוא $x \approx 2.798$, כמו נקודת האפס של f.
זו נקודת מינימום $(2.798,\ -0.337)$.

סעיף ד (2)

בצד החיובי, בתחום $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$:

- כאשר x מתקרב ל־0 מימין הפונקציה שואפת לאינסוף, ולכן הישר $x = 0$ אסימפטוטה אנכית.
- הפונקציה יורדת עד המינימום $(2.798,\ -0.337)$, ואחר כך עולה.
- נקודות החיתוך עם ציר ה־x הן הנקודות שבהן $\cos x = 0$: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ו־$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$. השנייה היא נקודת קצה.

בצד השלילי, בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x < 0$, הפונקציה אי־זוגית (סעיף ג), ולכן הגרף סימטרי לגרף בצד ימין ביחס לראשית הצירים:

- נקודת מקסימום $(-2.798,\ 0.337)$.
- נקודות חיתוך: $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ונקודת הקצה $\left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right)$.
- כאשר x מתקרב ל־0 משמאל הפונקציה שואפת למינוס אינסוף.

סקיצה של g(x)=cos x / x בתחום מינוס 3π/2 עד 3π/2: אסימפטוטה x=0, מינימום (2.798,-0.337), מקסימום (-2.798,0.337)

תשובה: סקיצה:
סקיצה של g(x)=cos x / x בתחום מינוס 3π/2 עד 3π/2: אסימפטוטה x=0, מינימום (2.798,-0.337), מקסימום (-2.798,0.337)

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.