חדו"א – פונקציות טריגונומטריות – כל השאלות עם תשובות סופיות

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(\sin x)^2\cdot\cos(2x)$, המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$.

א. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\sqrt{a\cdot f'(x)}$.

a הוא פרמטר שלילי.

ד. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־x.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד בתחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכחה: $f(-x)=f(x)$.

סעיף ב

מקסימום: $\left(\pm\frac{\pi}{6},\frac{1}{8}\right)$

מינימום: $(0,0)$ ובקצוות $\left(\pm\frac{\pi}{4},0\right)$

סעיף ג

צורת „M": מקסימום ב־$\left(\pm\frac{\pi}{6},\frac{1}{8}\right)$, מינימום ב־$(0,0)$ ובקצוות $\left(\pm\frac{\pi}{4},0\right)$.

סעיף ד (1)

$-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$

או

$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}$

סעיף ד (2)

$\left(-\frac{\pi}{6},0\right),\ (0,0),\ \left(\frac{\pi}{6},0\right)$

סעיף ה

בקטע השמאלי: „גבעה" – עולה מ־0 למקסימום ויורדת ל־0.

בקטע הימני: עולה מ־0 עד $\sqrt{-a}$.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(1+\cos x)\cdot(-1+b\cos x)$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

b הוא פרמטר.

נתון: $0<b<1$.

א. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־x.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{3}$.

ג. מצאו את הערך של b.

הציבו $b=\frac{1}{2}$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ה.

ד. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=f(x)+|f(x)|$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

נקודה A היא נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקצייה $h(x)$.

ה. האם שיעור ה־y של נקודה A הוא חיובי, שלילי, שווה אפס או שאי אפשר לקבוע? נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א

הפונקצייה זוגית, כי $f(-x)=f(x)$.

סעיף ב

נקודות החיתוך: $(-\pi,0)$ ו־$(\pi,0)$

סעיף ג

$b=\frac{1}{2}$

סעיף ד (1)

מקסימום: $(0,-1)$ ו־$(\pm\pi,0)$ בקצוות; מינימום: $\left(\pm\frac{\pi}{3},\ -\frac{9}{8}\right)$

סעיף ד (2)

סקיצה: גרף זוגי מתחת לציר ה־x, מינימום $\left(\pm\frac{\pi}{3},-\frac{9}{8}\right)$, מקסימום $(0,-1)$, קצוות $(\pm\pi,0)$.

סעיף ה

שיעור ה־y שווה לאפס, כי $f(x)\le 0$ ולכן $h(x)=0$.

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(\sin x)^2+\cos x-1$, המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־x.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{f(x)+b}$, b הוא פרמטר.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק שתי אסימפטוטות אנכיות.

ד. כתבו שני ערכים אפשריים של b, שאחד מהם חיובי והאחר שלילי.

הציבו בפונקצייה $g(x)$ את הערך השלילי של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ה–ו.

ה. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

תשובות סופיות

סעיף א
הוכחה: $f(-x)=(-\sin x)^2+\cos x-1=f(x)$, והתחום סימטרי.

סעיף ב (1)
$(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

סעיף ב (2)
מינימום $(0,0)$; מקסימום $\left(\pm\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$; מינימום (קצה) $(\pm\pi,-2)$

סעיף ג
גרף סימטרי לציר y: עולה מ־$(-\pi,-2)$ עד המקסימום $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, יורד למינימום $(0,0)$, ובאופן סימטרי עד $(\pi,-2)$.

סעיף ד
ערך שלילי: $b=-\frac{1}{4}$; ערך חיובי: כל $0<b\le 2$, למשל $b=1$

סעיף ה (1)
$-\pi \le x \le \pi$, $x \ne \pm\frac{\pi}{3}$

סעיף ה (2)
מקסימום $(0,-4)$; מקסימום (קצה) $\left(\pm\pi,-\frac{4}{9}\right)$

סעיף ו

גרף שלילי עם אסימפטוטות $x = \pm\frac{\pi}{3}$; משני צדיהן $g \to -\infty$. מקסימום $(0, -4)$; בקצוות $\left(\pm\pi, -\frac{4}{9}\right)$.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos x}$, בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה־x של הפונקצייה $f(x)$.

ב. קבעו אם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית. נמקו את קביעתכם.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=2\cos x+\frac{2\sin x}{\sin(2x)}$, בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

ה. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) הראו כי $g(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos x}$, בעבור כל x בתחום הגדרתה.

ו. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקצייה $g(x)$ ב־3 נקודות בדיוק?
אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א (1)
$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

סעיף א (2)
$x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$

סעיף ב
זוגית: $f(-x)=f(x)$.

סעיף ג
מקסימום: $(0,3)$
מינימום: $\left(\pm\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$

סעיף ד
צורת W, סימטרית לציר ה־y.
אסימפטוטות: $x=\pm\frac{\pi}{2}$.
מקסימום $(0,3)$, מינימום $\left(\pm\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.

סעיף ה (1)
$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $x\neq 0$

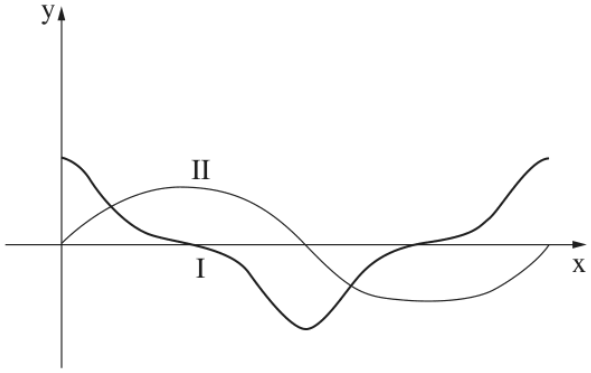
סעיף ה (2)
הוכחה בעזרת הזהות $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

סעיף ו

לא קיים ערך כזה.

רק הישר $y = 3$ חותך את גרף f בשלוש נקודות, ובגרף g חסרה הנקודה $(0, 3)$.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 7



7. בסרטוט שלפניכם נתונים שני גרפים, I–II, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$,

ואחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$ מוגדרות לכל x בתחום הנתון.

א. קבעו איזה מן הגרפים I–II מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

נתון כי $f(x) = \frac{\sin x}{1 + (\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקצייה $g(x) = |f(x) - 0.4|$ המוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x.

ד. **(1)** סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

תשובות סופיות

סעיף א

גרף II

סעיף ב (1)

$(0, 0),\ (\pi, 0),\ (2\pi, 0)$

סעיף ב (2)

מינ' קצה $(0, 0)$; מקס' $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$; מינ' $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{1}{2})$; מקס' קצה $(2\pi, 0)$

סעיף ג

$(\frac{\pi}{6}, 0),\ (\frac{5\pi}{6}, 0)$

סעיף ד (1)

סקיצה: $g \ge 0$, נוגעת בציר ה־x ב־ $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, מקסימומים ב־$(\frac{\pi}{2}, 0.1)$ ו־$(\frac{3\pi}{2}, 0.9)$.

סעיף ד (2)

מקס' $(0, 0.4)$, מינ' $(\frac{\pi}{6}, 0)$, מקס' $(\frac{\pi}{2}, 0.1)$, מינ' $(\frac{5\pi}{6}, 0)$, מקס' $(\frac{3\pi}{2}, 0.9)$, מינ' $(2\pi, 0.4)$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\cos x+\frac{2}{(\cos x)^2}+a$, בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי גרף הפונקצייה $f(x)$ משיק לישר $y=2$ בשתי נקודות.

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$ וענו על הסעיפים ד–ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונות הפונקצייה $g(x)=f(x)-k$ והפונקצייה $h(x)=\frac{1}{g(x)}$, שתיהן בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

k הוא פרמטר, $k\neq2$, $k\neq4$.

ו. מצאו את הערך של k שבעבורו גרף הפונקצייה $g(x)$ וגרף הפונקצייה $h(x)$ נפגשים בכל אחת מנקודות הקיצון שלהן.

תשובות סופיות

סעיף א

$-\frac{3\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$

סעיף ב

זוגית: $f(-x)=f(x)$

סעיף ג

$a=1$

סעיף ד

שלוש נקודות מינימום: $(-\pi,2),\ (0,4),\ (\pi,2)$

סעיף ה

שלושה ענפים בצורת U מעל ציר ה־x, עם נקודות מינימום ואסימפטוטות אנכיות ב־$x=\pm\frac{\pi}{2}$ וב־$x=\pm\frac{3\pi}{2}$

סקיצה: שלושה ענפים בצורת U, מינימום ב־(-2,π), (0,4), (2,π), אסימפטוטות אנכיות ב־±π/2 ו־±3π/2

סעיף ו

$k=3$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(b+\cos x)\sin x$, המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$, b הוא פרמטר.

א. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי לגרף הפונקצייה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה־ x .

ב. לפניכם שלוש אפשרויות I–III לערכים של b .

קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקצייה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם.

I. $b=0$ II. $0<b<1$ III. $1\le b$

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$, כאשר $\cos x=\frac{1}{4}$, הוא $\left(-\frac{5}{8}\right)$.

ג. מצאו את הערך של b .

הציבו $b=1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. **(1)** סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$ המקיימת $g(x)=\left(f(x)\right)^2\cdot f'(x)$. הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le \pi$.

ו. חשבו את השטח ברביע הראשון, המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

תשובות סופיות

סעיף א

אי־זוגית

$$f(-x)=-f(x)$$

סעיף ב

טענה III

סעיף ג

$$b=1$$

סעיף ד

מקסימום: $(-\pi,0)$

מקסימום: $\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

מינימום: $\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

מינימום: $(\pi,0)$

סעיף ה (1)

סקיצה:

סקיצה של f: מינימום ב־(-π/3, -3√3/4), מקסימום ב־(π/3, 3√3/4)

סעיף ה (2)

סקיצה:

סקיצה של הנגזרת: מקסימום (0,2), אפסים ב־±π/3 ו־±π, מינימום -9/8

סעיף ו

$\frac{27\sqrt{3}}{64} \approx 0.731$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\cos x-\sqrt{\cos x}$, בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) הראו כי הפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה זוגית.

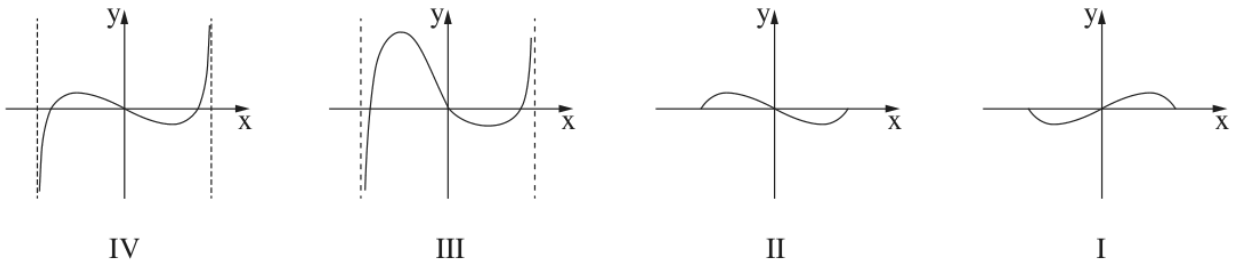
(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. קבעו איזה מן הגרפים $I-IV$ שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



I II III IV

נתונה הפונקצייה $g(x)=k-f(x)$, k הוא פרמטר חיובי. הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

נסמן ב־S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־x בתחום בין 0 ל־$\frac{\pi}{2}$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ ועל ידי הישרים $x=\frac{\pi}{2}$ ו־$x=-\frac{\pi}{2}$ הוא $10\cdot S$.

ה. הביעו את k באמצעות S .

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

סעיף א (2)

$f(-x)=f(x)$, ולכן f זוגית.

סעיף א (3)

$(-\frac{\pi}{2},0)$, $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$

סעיף א (4)

מקסימום: $(0,0)$ ו־$(\pm\frac{\pi}{2},0)$ בקצוות; מינימום: $(\pm1.32,-0.25)$, כלומר $x\approx\pm0.42\pi$

סעיף ב

סקיצה: גרף זוגי מתחת לציר ה־x עם מינימום $(\pm1.32,-0.25)$ ומקסימום $(0,0)$

סעיף ג

שלילית: $-\frac{\pi}{2}<x<0$ וגם $0<x<\frac{\pi}{2}$. אין תחום חיוביות.

סעיף ד

גרף IV

סעיף ה

$k = \frac{6S}{\pi}$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{\sin(x)-a}{\sin(x)+a}$. a הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x המקיים $\sin(x)\neq -a$.

נתון כי הגרף של הפונקצייה $f(x)$ משיק לציר x בכל נקודות הקיצון שלה.

א. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ב–ה עבור התחום $-2\pi \le x \le 2\pi$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=-1$ בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי הפונקצייה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה.

ה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

$$\int_0^{\pi}(f(x)+1)\,dx>\frac{\pi}{2}$$.

תשובות סופיות

סעיף א

$a=1$

סעיף ב (1)

$-2\pi \le x \le 2\pi$, $x\neq -\frac{\pi}{2}$, $x\neq \frac{3\pi}{2}$

סעיף ב (2)

$(0,-1)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$

סעיף ב (3)

מקסימום $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$; מקסימום (קצה) $(2\pi,-1)$; מינימום (קצה) $(-2\pi,-1)$

סעיף ג

הגרף כולו מתחת לציר x, נוגע בו ב־$\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$ ו־$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$; אסימפטוטות אנכיות $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$; בקצוות $(\pm 2\pi,-1)$.

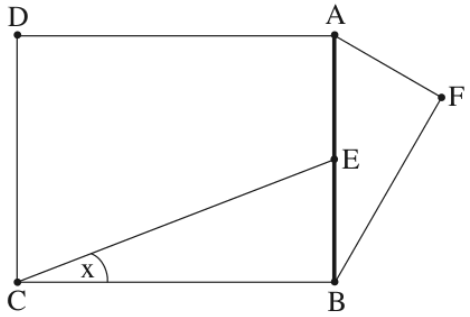
סעיף ד

5 פתרונות

סעיף ה

נכונה: הגרף של $f+1$ קעור, ולכן מעל המשולש שקודקודיו $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, $(\pi,0)$, ששטחו $\frac{\pi}{2}$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 8



8. הנקודה E היא אמצע הקטע AB.

על הקטע AB בונים מלבן ABCD

ומשולש ישר זווית AFB, $\sphericalangle AFB = 90^o$, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\sphericalangle ECB = x$, $\sphericalangle FAB = 2x$.

נסמן את אורך הקטע AB ב־ h.

א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x? הסבירו את תשובתכם.

ב. הביעו באמצעות x ו־ h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF.

ג. מצאו את הערך של x שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.

ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB.

תשובות סופיות

סעיף א

$0^\circ < x < 45^\circ$

סעיף ב

$CE - AF = \frac{h}{2\sin x} - h\cos 2x$

סעיף ג

$x = 30^\circ$

סעיף ד

$S_{ABCD} : S_{AFB} = 4$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\sin(x)\cdot\cos^3(x)$ המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

א. **(1)** האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית <u>או</u> אי־זוגית? נמקו.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו (בקו מקווקו) סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקצייה $f(x)$.

ענו על סעיף ג בעבור התחום שבו מוגדרות שתי הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$.

ג. מצאו את המרחק המינימלי בין הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)
אי־זוגית, כי $f(-x)=-f(x)$.

סעיף א (2)
$(-\frac{\pi}{2},0),\ (0,0),\ (\frac{\pi}{2},0)$

סעיף א (3)
מקס' קצה $(-\frac{\pi}{2},0)$; מינ' $(-\frac{\pi}{6},-\frac{3\sqrt{3}}{16})$; מקס' $(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{16})$; מינ' קצה $(\frac{\pi}{2},0)$

סעיף א (4)
סקיצה: מינימום ב־$(-\frac{\pi}{6},-\frac{3\sqrt{3}}{16})$, מקסימום ב־$(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{16})$, והגרף עובר דרך הראשית ודרך $(\pm\frac{\pi}{2},0)$.

סעיף ב (1)
$0<x<\frac{\pi}{2}$

סעיף ב (2)
מינימום בנקודה $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{4}{\sqrt{3\sqrt{3}}}\right)$, כלומר בערך $(\frac{\pi}{6},\ 1.755)$.

סעיף ב (3)
סקיצה: הגרף של g בקו מקווקו, בין האסימפטוטות $x=0$ ו־$x=\frac{\pi}{2}$, עם מינימום ב־$(\frac{\pi}{6},1.755)$.

סעיף ג
המרחק המינימלי הוא בערך 1.43, ומתקבל ב־$x=\frac{\pi}{6}$.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 8

8. נתון מעוין $ABCD$. נקודה E היא אמצע הצלע BC.

נסמן: $\sphericalangle ECD = x$.

נתון: שטח המשולש ECD הוא 18.

א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE.

תשובות סופיות

סעיף א

$$\sqrt{\frac{72}{\sin x}}$$

סעיף ב

$$DE_{\min} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \approx 7.35$$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2\sin(x)}{\cos^2(x)-1}$ בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x.

(3) האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? הוכיחו את תשובתכם.

ב. ענו על התת־סעיפים (1)–(2) שלפניכם בעבור התחום $0 \le x \le 2\pi$.

(1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ (בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$).

ד. הוכיחו כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה־ x, בתחום $1.7 \le x \le 2$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

כל x בתחום פרט ל:

$$x = -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi$$

סעיף א (2)

$$x = -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi$$

סעיף א (3)

אי־זוגית

$$f(-x) = -f(x)$$

סעיף ב (1)

אין נקודות חיתוך עם הצירים.

סעיף ב (2)

מקסימום $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$

מינימום $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$

סעיף ג

סקיצה:

סקיצה של f=-2/sin x בתחום מ־-2π עד 2π עם אסימפטוטות ב־0, ±2π, π

סעיף ד

הוכחה: המונה של f'' הוא $-2(1+\cos^2 x)$, ואינו מתאפס.

סעיף ה

$$\approx 0.18$$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\sin^2(x)-\cos^2(x)-1$, המוגדרת לכל x .

א. האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית? נמקו.

ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2\le f(x)\le 0$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(2x)$, המוגדרת לכל x .

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי $\int_0^{\frac{\pi}{8}}(g'(x)-f'(x))dx=S$.

הביעו באמצעות S את $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0}(g'(x)-f'(x))dx$. הסבירו את התשובה.

תשובות סופיות

סעיף א

כן, הפונקצייה זוגית

סעיף ב

הוכחה בעזרת הפישוט מסעיף א

סעיף ג

עם ציר ה־x: $(\pm\frac{\pi}{2},0)$

עם ציר ה־y: $(0,-2)$

סעיף ד

סקיצה:

סקיצה של f=-2cos²x בתחום [-π,π]

סעיף ה

מקסימום: $(\pm\frac{\pi}{4},0)$

מינימום: $(0,-2)$ ו־$(\pm\frac{\pi}{2},-2)$

סעיף ו

$-S$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2(\cos x)^2+\sin 2x}{2\cos x}$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

א. **(1)** מִצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) הסבירו מדוע לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה־ x.

(3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. **(1)** הַראו כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ מתקיים: $f'(x)=\cos x-\sin x$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקִבעו את סוגן.

ג. **(1)** סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) k הוא מספר. מִצאו את כל ערכי k שבעבורם יש למשוואה $f(x)=k$ פתרון יחיד (בתחום $0\le x\le 2\pi$).

ד. חַשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי שני הישרים $x=\frac{3}{4}\pi$ ו־ $x=\frac{5}{4}\pi$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$0\le x\le 2\pi$

חוץ מ־ $x=\frac{\pi}{2}$ ו־ $x=\frac{3\pi}{2}$

סעיף א (2)

אחרי צמצום:

$f(x)=\cos x+\sin x$

הגבולות ב־ $\frac{\pi}{2}$ וב־ $\frac{3\pi}{2}$ סופיים.

סעיף א (3)

$(0,1)$, $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$

סעיף ב (1)

הוכחה: $f(x)=\cos x+\sin x$

ולכן $f'(x)=\cos x-\sin x$.

סעיף ב (2)

מקסימום: $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, $(2\pi,1)$

מינימום: $\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$, $(0,1)$

סעיף ג (1)

סקיצה:

סקיצה של f(x)

סעיף ג (2)

$k=\sqrt{2}$

$k=-1$

$k=-\sqrt{2}$

סעיף ד

$S = \sqrt{2} \approx 1.414$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 7

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \tan(x) + \frac{1}{x}$.

ענה על הסעיפים א–ב בעבור התחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־x.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד ששיעוריה $(2.798\,,\,0)$ בקירוב.

ב. מצא את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי־זוגית, או לא זוגית ולא אי־זוגית? הוכח את תשובתך.

ד. **(1)** הראה כי בתחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$ שיעור ה־x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווה לשיעור ה־x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־x, וקבע את סוגה של נקודת קיצון זו.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$0 < x < \frac{3\pi}{2},\ x \neq \frac{\pi}{2}$

סעיף א (2)

$x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2}$

סעיף ב

חיובית: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ וגם $2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$

שלילית: $\frac{\pi}{2} < x < 2.798$

סעיף ג

אי־זוגית, כי $g(-x) = -g(x)$.

סעיף ד (1)

שיעור ה־x של הקיצון הוא $x \approx 2.798$, כמו נקודת האפס של f.

זו נקודת מינימום $(2.798,\ -0.337)$.

סעיף ד (2)

סקיצה:

סקיצה של g(x)=cos x / x בתחום מינוס 3π/2 עד 3π/2: אסימפטוטה x=0, מינימום (2.798,-0.337), מקסימום (-2.798,0.337)

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.