סדרות ואינדוקצייה – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י״א (שאלון 571) • 17 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 2

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית יורדת שכל איבריה חיוביים ומנתה היא q.

א. לפניכם שלוש טענות I–III. קבעו איזו מן הטענות נכונה ונמקו את קביעתכם.

I. $-1 < q < 0$

II. $0 < q < 1$

III. $1 < q$

b_n היא סדרה אין־סופית שאיבריה מקיימים $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה b_n היא הנדסית ומנתה היא q.

נתון כי סכום הסדרה b_n גדול פי 1.96 מסכום הסדרה a_n.

ג. מצאו את הערך של q.

c_n היא סדרה שאיבריה מקיימים $c_n = \frac{b_n}{4 \cdot a_n}$ לכל n טבעי.

נתון כי סכום k האיברים הראשונים בסדרה הוא 34.79.

ד. **(1)** הוכיחו כי הסדרה c_n היא קבועה.

(2) מצאו את הערך של k.

החליפו את הסימן של כל אחד מן האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה c_n.

ה. מצאו את סכום k האיברים הראשונים בסדרה c_n לאחר החלפת הסימנים. נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

כל איברי הסדרה חיוביים, ולכן המנה $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ חיובית (מנה של שני מספרים חיוביים).

הסדרה יורדת, כלומר:

$$a_{n+1} < a_n$$

נחלק את שני האגפים ב־a_n (חיובי):

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

לכן:

$$0 < q < 1$$

תשובה: $0 < q < 1$ **(טענה II)**

סעיף ב

נבטא את b_n באמצעות a_n ו־q (נוסחת האיבר הכללי: $a_{n+1} = a_n q$):

$$b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$$
$$= a_n + a_n q + a_n q^2 = a_n(1 + q + q^2)$$

נבדוק את המנה בין שני איברים עוקבים:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}(1 + q + q^2)}{a_n(1 + q + q^2)} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

המנה קבועה (אינה תלויה ב־n), ולכן b_n היא סדרה הנדסית עם מנה q.

תשובה: הוכחה: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ – מנה קבועה.

סעיף ג

שתי הסדרות הן הנדסיות אינסופיות יורדות עם אותה מנה q (בין 0 ל־1). לפי נוסחת הסכום $S = \frac{a_1}{1-q}$:

$$S_b = \frac{b_1}{1-q} = \frac{a_1(1+q+q^2)}{1-q}$$
$$S_b = (1+q+q^2) \cdot S_a$$

נתון $S_b = 1.96\, S_a$, ולכן:

$$1 + q + q^2 = 1.96$$
$$q^2 + q - 0.96 = 0$$
$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 3.84}}{2} = \frac{-1 \pm 2.2}{2}$$
$$q = 0.6 \quad \text{או} \quad q = -1.6$$

לפי סעיף א המנה חיובית וקטנה מ־1, ולכן $q = 0.6$.

תשובה: $q = 0.6$

סעיף ד (1)

$$c_n = \frac{b_n}{4a_n} = \frac{a_n(1+q+q^2)}{4a_n}$$
$$c_n = \frac{1+q+q^2}{4}$$

לפי סעיף ג, $1 + q + q^2 = 1.96$:

$$c_n = \frac{1.96}{4} = 0.49$$

הביטוי אינו תלוי ב־n, ולכן כל איברי הסדרה c_n שווים זה לזה.

תשובה: הוכחה: $c_n = \frac{1+q+q^2}{4} = 0.49$ לכל n.

סעיף ד (2)

כל איבר שווה 0.49, ולכן סכום k האיברים הראשונים הוא $0.49k$:

$$0.49k = 34.79 \;\Rightarrow\; k = \frac{34.79}{0.49} = 71$$

תשובה: $k = 71$

סעיף ה

אחרי שינוי הסימן, האיברים במקומות האי־זוגיים הם 0.49 והאיברים במקומות הזוגיים הם -0.49.

ב־71 האיברים הראשונים יש 36 מקומות אי־זוגיים ו־35 מקומות זוגיים:

$$36 \cdot 0.49 - 35 \cdot 0.49 = 1 \cdot 0.49 = 0.49$$

(כל זוג $0.49 + (-0.49)$ מתאפס, ונשאר האיבר ה־71 בלבד.)

תשובה: 0.49

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 2

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא q.

b_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא $2q$.

c_n היא סדרה אין־סופית שאיבריה מקיימים $c_n = a_n \cdot b_n$ לכל n טבעי.

א. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו באמצעות q את מנתה.

נתון: $c_2 = \frac{1}{8} \cdot (a_1)^2$, $a_1 = b_1$.

ב. מצאו את הערך של q.

ג. **(1)** האם הערך של a_1 הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

(2) האם הסדרה c_n עולה או יורדת? נמקו את תשובתכם.

נסמן ב־S_1 את סכום הסדרה a_n, ב־S_2 את סכום הסדרה b_n וב־S_3 את סכום הסדרה c_n.

נתון: $S_1 + S_2 + S_3 = 434$.

ד. מצאו את הערך של a_1.

פתרון מלא

סעיף א

לפי הנתון $a_{n+1} = a_n \cdot q$ ו־$b_{n+1} = b_n \cdot 2q$. נבדוק את היחס בין שני איברים עוקבים בסדרה c_n:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{a_n \cdot b_n}$$
$$= \frac{a_n q \cdot b_n \cdot 2q}{a_n \cdot b_n} = 2q^2$$

היחס קבוע (אינו תלוי ב־n), ולכן c_n סדרה הנדסית שמנתה $2q^2$.

תשובה: הוכחה: היחס $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ קבוע, והמנה היא $2q^2$.

סעיף ב

$c_1 = a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot a_1 = a_1^2$ (כי $b_1 = a_1$), ולכן:

$$c_2 = c_1 \cdot 2q^2 = 2q^2 a_1^2$$

לפי הנתון $c_2 = \frac{1}{8}a_1^2$, ולכן ($a_1 \neq 0$):

$$2q^2 a_1^2 = \frac{1}{8}a_1^2$$
$$q^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow q = \pm\frac{1}{4}$$

אם $q = -\frac{1}{4}$, הסימנים של איברי a_n מתחלפים והסדרה אינה עולה. לכן $q = \frac{1}{4}$.

תשובה: $q = \frac{1}{4}$

סעיף ג (1)

a_n עולה, ולכן $a_2 > a_1$:

$a_1 \cdot \frac{1}{4} > a_1$

$-\frac{3}{4}a_1 > 0 \Rightarrow a_1 < 0$

(בסדרה הנדסית עם מנה $0 < q < 1$ האיברים קטנים בערכם המוחלט, ולכן היא יכולה לעלות רק אם איבריה שליליים.)

תשובה: האיבר a_1 שלילי.

סעיף ג (2)

המנה של c_n:

$$2q^2 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

האיבר הראשון $c_1 = a_1^2 > 0$, ולכן כל איברי c_n חיוביים. סדרה הנדסית עם איברים חיוביים ומנה $0 < \frac{1}{8} < 1$ היא **יורדת** (כל איבר הוא שמינית מקודמו).

תשובה: הסדרה c_n יורדת: איבריה חיוביים ומנתה $\frac{1}{8}$.

סעיף ד

לשלוש הסדרות מנה בין -1 ל־1 ($\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8}$), ולכן הן מתכנסות ולפי הנוסחאון $S = \frac{a_1}{1-q}$:

$$S_1 = \frac{a_1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}a_1$$

$$S_2 = \frac{b_1}{1-\frac{1}{2}} = 2a_1$$

$$S_3 = \frac{c_1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}a_1^2$$

נציב בנתון $S_1 + S_2 + S_3 = 434$:

$$\frac{8}{7}a_1^2 + \frac{4}{3}a_1 + 2a_1 = 434$$

נכפיל ב־21:

$$24a_1^2 + 70a_1 - 9114 = 0$$

נחלק ב־2:

$$12a_1^2 + 35a_1 - 4557 = 0$$

$$a_1 = \frac{-35 \pm \sqrt{219{,}961}}{24}$$

$$= \frac{-35 \pm 469}{24}$$

$$a_1 = -21$$

או

$$a_1 = \frac{217}{12}$$

לפי סעיף ג (1), a_1 שלילי, ולכן $a_1 = -21$.

בדיקה: $S_1 = -28,\ S_2 = -42,\ S_3 = 504$, ואכן $-28 - 42 + 504 = 434$.

תשובה: $a_1 = -21$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 2

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית יורדת שסכומה מתכנס.

המנה של הסדרה היא q.

נסמן ב־ T את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים בסדרה,

ונסמן ב־ R את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה.

נתון: $\frac{T^2}{R^2}=16$.

א. מצאו את הערך של q.

נתונה סדרה b_n שאיבריה מקיימים $b_n=\frac{1+q}{a_n\cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

נתון: $b_1=1$.

ב. מצאו את הערך של a_1.

ג. הביעו באמצעות n את b_n.

ד. הוכיחו באינדוקצייה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$b_1+b_2+...+b_n=\frac{16^n-1}{15}$$

פתרון מלא

סעיף א

האיברים במקומות האי־זוגיים $a_1, a_3, a_5, \ldots$ הם סדרה הנדסית עם איבר ראשון a_1 ומנה q^2; האיברים במקומות הזוגיים $a_2, a_4, \ldots$ – סדרה הנדסית עם איבר ראשון a_1q ומנה q^2.

הסדרה מתכנסת, לכן $|q|<1$ וגם $q^2<1$:

$$T=\frac{a_1}{1-q^2} \qquad R=\frac{a_1q}{1-q^2}$$

$$\frac{T}{R}=\frac{a_1}{a_1q}=\frac{1}{q}$$

מהנתון:

$$\frac{T^2}{R^2}=\frac{1}{q^2}=16 \;\Rightarrow\; q^2=\frac{1}{16}$$

$q=\frac{1}{4}$ או $q=-\frac{1}{4}$

הסדרה יורדת. במנה שלילית סימני האיברים מתחלפים והסדרה אינה יורדת, ולכן $q=\frac{1}{4}$ – ו־$a_1>0$.

תשובה: $q=\frac{1}{4}$

סעיף ב

$a_n=a_1q^{n-1}$, $a_{n+1}=a_1q^n$, ולכן:

$$b_n=\frac{1+q}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1+q}{a_1^2\,q^{2n-1}}$$

עבור $n=1$:

$$b_1=\frac{1+\frac{1}{4}}{a_1^2\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{a_1^2}{4}}=\frac{5}{a_1^2}$$

נתון $b_1=1$:

$$\frac{5}{a_1^2}=1\ \Rightarrow\ a_1^2=5\ \Rightarrow\ a_1=\pm\sqrt{5}$$

הסדרה יורדת ו־$0<q<1$, לכן $a_1>0$:

$$a_1=\sqrt{5}$$

תשובה: $a_1=\sqrt{5}$

סעיף ג

נציב $a_1^2=5$, $q=\frac{1}{4}$:

$$b_n=\frac{\frac{5}{4}}{5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}}=\frac{1}{4}\cdot 4^{2n-1}$$
$$=4^{2n-2}=\left(4^2\right)^{n-1}=16^{n-1}$$

בדיקה: $b_1=16^0=1$ ✓

תשובה: $b_n=16^{n-1}$

סעיף ד

דרך א – סכום סדרה הנדסית. לפי סעיף ג, $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{16^n}{16^{n-1}}=16$, כלומר b_n סדרה הנדסית עם $b_1=1$ ו־$q=16$. לפי נוסחת הסכום:

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$
$$=\frac{1\cdot(16^n-1)}{16-1}=\frac{16^n-1}{15}$$

דרך ב – אינדוקציה.

בדיקה עבור $n=1$: אגף שמאל $b_1=1$, אגף ימין $\frac{16-1}{15}=1$ ✓

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$:

$$b_1+\cdots+b_k=\frac{16^k-1}{15}$$

צעד: נוכיח עבור $n=k+1$, כלומר $b_1+\cdots+b_{k+1}=\frac{16^{k+1}-1}{15}$. לפי ההנחה:

$$b_1+\cdots+b_k+b_{k+1}=\frac{16^k-1}{15}+16^k$$
$$=\frac{16^k-1+15\cdot 16^k}{15}=\frac{16\cdot 16^k-1}{15}$$
$$=\frac{16^{k+1}-1}{15}$$

מכאן שהטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה: **הנדסית עם** $b_1=1$**,** $q=16$**, ולכן** $b_1+\cdots+b_n=\frac{16^n-1}{15}$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 2

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא q.

$0 < q < 1$.

א. קבעו אם כל איברי הסדרה a_n הם חיוביים או שליליים. נמקו את קביעתכם.

b_n היא סדרה הנדסית אין־סופית וגם מנתה היא q.

c_n היא סדרה אין־סופית המקיימת לכל n טבעי $c_n = 2b_n - a_n$ $(c_n \neq 0)$.

ב. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q.

נתון כי $c_1 = 5\frac{2}{3}$, וכי סכום איברי הסדרה c_n גדול פי 17 מסכום איברי הסדרה b_n.

ג. מצאו את הערך של a_1.

נתון כי סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n גדול ב־ 4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים בסדרה a_n.

ד. מצאו את הערך של q.

פתרון מלא

סעיף א

בסדרה הנדסית $a_{n+1} = a_n \cdot q$, ולכן:

$$a_{n+1} - a_n = a_n q - a_n = a_n(q-1)$$

הסדרה עולה, ולכן $a_{n+1} - a_n > 0$, כלומר:

$$a_n(q-1) > 0$$

נתון $0 < q < 1$, ולכן $q - 1 < 0$. מכפלה של שני גורמים חיובית רק כששניהם באותו סימן, ולכן:

$$a_n < 0$$

כל איברי הסדרה a_n **שליליים**.

תשובה: כל איברי הסדרה שליליים.

סעיף ב

שתי הסדרות הנדסיות עם אותה מנה q:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \qquad b_n = b_1 q^{n-1}$$

לכן:

$$c_n = 2b_n - a_n = 2b_1 q^{n-1} - a_1 q^{n-1}$$
$$c_n = (2b_1 - a_1)\, q^{n-1}$$

נחשב את המנה בין שני איברים עוקבים. נתון $c_n \neq 0$, ולכן מותר לחלק:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(2b_1 - a_1)q^n}{(2b_1 - a_1)q^{n-1}} = q$$

המנה קבועה ואינה תלויה ב־n, ולכן c_n היא סדרה הנדסית, ומנתה היא q.

תשובה: הוכחה: $\frac{c_{n+1}}{c_n} = q$ קבוע, ולכן c_n הנדסית. המנה היא q.

סעיף ג

$0 < q < 1$, ולכן שתי הסדרות b_n ו־c_n הן סדרות הנדסיות אין־סופיות מתכנסות, וסכומיהן:

$$S_c = \frac{c_1}{1-q}, \qquad S_b = \frac{b_1}{1-q}$$

נתון $S_c = 17 \cdot S_b$:

$$\frac{c_1}{1-q} = 17 \cdot \frac{b_1}{1-q}$$
$$c_1 = 17b_1$$
$$5\tfrac{2}{3} = \frac{17}{3} = 17b_1 \;\Rightarrow\; b_1 = \frac{1}{3}$$

לפי הגדרת הסדרה c_n עבור $n = 1$:

$$c_1 = 2b_1 - a_1$$
$$\frac{17}{3} = \frac{2}{3} - a_1$$
$$a_1 = \frac{2}{3} - \frac{17}{3} = -5$$

תשובה: $a_1 = -5$

סעיף ד

האיברים במקומות האי־זוגיים $a_1, a_3, a_5, \ldots$ הם סדרה הנדסית עם איבר ראשון a_1 ומנה q^2. נסמן את סכומם ב־S_1:

$$S_1 = \frac{a_1}{1-q^2}$$

האיברים במקומות הזוגיים $a_2, a_4, a_6, \ldots$ הם סדרה הנדסית עם איבר ראשון $a_1 q$ ומנה q^2. נסמן את סכומם ב־S_2:

$$S_2 = \frac{a_1 q}{1-q^2}$$

שני הטורים מתכנסים, כי $0 < q^2 < 1$. נתון $S_2 = S_1 + 4$:

$$\frac{a_1 q}{1-q^2} = \frac{a_1}{1-q^2} + 4$$
$$\frac{a_1 q - a_1}{1-q^2} = 4$$
$$\frac{-a_1(1-q)}{(1-q)(1+q)} = 4$$
$$\frac{-a_1}{1+q} = 4$$

נציב את $a_1 = -5$ שמצאנו בסעיף ג:

$$\frac{5}{1+q} = 4 \;\Rightarrow\; 1+q = \frac{5}{4}$$
$$q = \frac{1}{4}$$

הערך מקיים $0 < q < 1$.

תשובה: $q = \frac{1}{4}$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

נתון: $2a_2 + 8 = a_4$, $\frac{a_4}{a_2} = 4$.

א. מצאו את הערך של a_3 (מצאו את שתי האפשרויות).

נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אין־סופית חדשה B.

נתון כי איברי הסדרה B מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אין־סופית נוספת C.

איברי הסדרה C הם: $\frac{k}{a_1 \cdot a_2}, \frac{k}{a_3 \cdot a_4}, \frac{k}{a_5 \cdot a_6}, \ldots$. $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ג. **(1)** מצאו את מנת הסדרה C.

(2) מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.

נסמן ב־S_B את סכום הסדרה B, וב־S_C את סכום הסדרה C.

נתון: $S_C = 4 \cdot S_B$.

ד. מצאו את הערך של k.

פתרון מלא

סעיף א

בסדרה הנדסית $a_n = a_1 q^{n-1}$, ולכן:

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 q^3}{a_1 q} = q^2 = 4$$

$$q = -2 \text{ או } q = 2$$

מהנתון השני, ומכיוון ש־$a_4 = 4a_2$:

$$2a_2 + 8 = 4a_2$$

$$a_2 = 4$$

לכן $a_3 = a_2 \cdot q$:

$$q = 2: \quad a_3 = 4 \cdot 2 = 8$$

$$q=-2:\ \ a_3=4\cdot(-2)=-8$$

תשובה: $a_3=8$ **או** $a_3=-8$

סעיף ב

הסדרה A לא עולה ולא יורדת. עבור $q=2$ כל האיברים חיוביים והסדרה עולה, ולכן:

$$q=-2$$

(סימני האיברים מתחלפים, ולכן הסדרה לא עולה ולא יורדת.)

$$a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{4}{-2}=-2$$

נבדוק את המנה בין שני איברים עוקבים בסדרה B:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}}{\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}}=\frac{a_n}{a_{n+2}}$$
$$=\frac{a_n}{a_n\cdot q^2}=\frac{1}{q^2}=\frac{1}{4}$$

המנה קבועה (לא תלויה ב־n), ולכן B היא סדרה הנדסית שהמנה שלה $\frac{1}{4}$.

תשובה: הוכחה: $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{q^2}$ **קבוע; המנה של** B **היא** $\frac{1}{4}$**.**

סעיף ג (1)

האיבר הכללי של C הוא $c_n=\frac{k}{a_{2n-1}\cdot a_{2n}}$. נחשב את המנה:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{2n-1}\cdot a_{2n}}{a_{2n+1}\cdot a_{2n+2}}$$

כל איבר במכנה גדול פי q^2 מהאיבר המתאים במונה:

$$=\frac{a_{2n-1}\cdot a_{2n}}{a_{2n-1}q^2\cdot a_{2n}q^2}=\frac{1}{q^4}$$
$$=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{16}$$

תשובה: $\frac{1}{16}$

סעיף ג (2)

האיבר הראשון של C:

$$c_1=\frac{k}{a_1\cdot a_2}=\frac{k}{(-2)\cdot 4}=-\frac{k}{8}$$

המנה $\frac{1}{16}$ חיובית וקטנה מ־1, ולכן ערכו המוחלט של כל איבר קטן מזה של קודמו, וכל האיברים באותו סימן כמו c_1.

- כאשר c_1 שלילי, כל האיברים שליליים ומתקרבים ל־0, כלומר הסדרה עולה.
- כאשר c_1 חיובי, כל האיברים חיוביים וקטנים, כלומר הסדרה יורדת.

לכן C עולה כאשר:

$$-\frac{k}{8}<0\ \Rightarrow\ k>0$$

תשובה: $k>0$

סעיף ד

שתי הסדרות הנדסיות אין־סופיות מתכנסות (המנות $\frac{1}{4}$ ו־$\frac{1}{16}$ בין $1-$ ל־1), ולכן $S=\frac{a_1}{1-q}$.

הסכום של B:

$$b_1=\frac{1}{a_1\cdot a_2}=\frac{1}{(-2)\cdot 4}=-\frac{1}{8}$$

$$S_B=\frac{-\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}=-\frac{1}{6}$$

הסכום של C:

$$S_C=\frac{-\frac{k}{8}}{1-\frac{1}{16}}=-\frac{k}{8}\cdot\frac{16}{15}=-\frac{2k}{15}$$

נציב בנתון $S_C=4\cdot S_B$:

$$-\frac{2k}{15}=4\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{2}{3}$$

$$k=5$$

תשובה: $k=5$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ובה m איברים (m הוא מספר טבעי גדול מ־4).

נתון: כל איברי הסדרה A הם שליליים.

סכום $m-4$ האיברים האחרונים בסדרה הוא פי 16 מסכום $m-4$ האיברים הראשונים בסדרה.

א. **(1)** מצאו את מנת הסדרה A.

(2) האם הסדרה A עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אין־סופית.

נתונה סדרה אין־סופית B שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{k^n}{a_n}$ לכל n טבעי. k הוא פרמטר שונה מ־0.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את המנה שלה באמצעות k.

נתון כי סכום הסדרה B מתכנס.

ג. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k.

נתון: מנת הסדרה B היא $\frac{1}{4}$.

סכום הסדרה B הוא -9.

ד. מצאו את הערך של k ואת הערך של b_1.

בסדרה B מחקו כל איבר שלישי $(b_3, b_6, b_9 \ldots)$.

ה. מצאו את סכום האיברים הנותרים.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נסמן ב־q את מנת הסדרה A. ב־m איברים, $m-4$ האיברים האחרונים הם $a_5, a_6, \ldots, a_m$.

כל אחד מהם מתקבל מהאיבר שנמצא 4 מקומות לפניו, כפול q^4:

$$a_5 = a_1 q^4, \quad a_6 = a_2 q^4$$
$$\ldots, \quad a_m = a_{m-4} q^4$$

לכן:

$$a_5 + \cdots + a_m$$
$$= q^4 \left(a_1 + \cdots + a_{m-4}\right)$$

לפי הנתון הסכום הזה גדול פי 16 מסכום $m-4$ האיברים הראשונים (שאינו 0, כי כל האיברים שליליים):

$$q^4 = 16 \;\Rightarrow\; q = 2 \text{ או } q = -2$$

אם $q = -2$, הסימנים של האיברים מתחלפים (שלילי, חיובי, שלילי...), וזה סותר את הנתון שכל האיברים שליליים. לכן:

$$q = 2$$

תשובה: $q = 2$

סעיף א (2)

לכל n:

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n - a_n = a_n$$

כל איברי הסדרה שליליים, ולכן $a_{n+1} - a_n = a_n < 0$, כלומר $a_{n+1} < a_n$.

הסדרה A **יורדת** – למשל $-1, -2, -4, \ldots$.

תשובה: הסדרה יורדת.

סעיף ב

האיבר הכללי של A:

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$$

נחשב את המנה בין שני איברים עוקבים של B:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{k^{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{k^n}$$
$$= k \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = k \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{2}$$

המנה $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ קבועה – אינה תלויה ב־n – ולכן B היא סדרה הנדסית, ומנתה:

$$q_B = \frac{k}{2}$$

תשובה: B הנדסית, ומנתה $\frac{k}{2}$

סעיף ג

סכום של סדרה הנדסית אין־סופית מתכנס כאשר המנה מקיימת $-1 < q < 1$, וגם $q \neq 0$:

$$-1 < \frac{k}{2} < 1$$
$$-2 < k < 2$$

לפי הנתון $k \neq 0$, ולכן:

$$-2 < k < 0 \text{ או } 0 < k < 2$$

תשובה: $-2 < k < 0$ או $0 < k < 2$

סעיף ד

המנה של B היא $\frac{k}{2}$:

$$\frac{k}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

הערך נמצא בתחום שמצאנו בסעיף ג.

סכום סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$
$$\frac{b_1}{1 - \frac{1}{4}} = -9$$
$$b_1 = -9 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{27}{4}$$

תשובה: $k = \frac{1}{2}$
$b_1 = -\frac{27}{4} = -6.75$

סעיף ה

האיברים שנמחקו, $b_3, b_6, b_9, \ldots$, הם סדרה הנדסית אין־סופית:

$$b_3 = b_1 q^2 = -\frac{27}{4} \cdot \frac{1}{16} = -\frac{27}{64}$$

כל איבר בה רחוק 3 מקומות מהקודם, ולכן המנה שלה:

$$q^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

סכום האיברים שנמחקו:

$$\frac{-\frac{27}{64}}{1 - \frac{1}{64}} = \frac{-\frac{27}{64}}{\frac{63}{64}} = -\frac{27}{63} = -\frac{3}{7}$$

סכום האיברים הנותרים = סכום כל הסדרה פחות סכום האיברים שנמחקו:

$$-9 - \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{60}{7} = -8\frac{4}{7}$$

תשובה: $-8\frac{4}{7} = -\frac{60}{7}$

בגרות קיץ תשפ״ד (2024) – מועד ב׳ • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).

כל איברי הסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n+1}$ הם חיוביים.

סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים.

נתון כי סכום האיברים שנמצאים אחרי האיבר האמצעי גדול פי 256 מסכום האיברים שנמצאים לפני האיבר האמצעי.

א. מצאו את n.

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אין־סופית.

נתון: B היא סדרה אין־סופית המקיימת לכל k טבעי $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב־2.

נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי־זוגיים גדול ב־$\frac{1}{30}$ מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את a_1.

פתרון מלא

סעיף א

בסדרה $2n+1$ איברים. נסמן את המנה ב־q ($q > 0$, כי האיברים חיוביים).

מציאת q: הסכום בלי שני האיברים הראשונים הוא $a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n+1}$. כל איבר בו שווה לאיבר שנמצא שני מקומות לפניו כפול q^2:

$$a_3 + \cdots + a_{2n+1}$$
$$= q^2\left(a_1 + \cdots + a_{2n-1}\right)$$

הסוגריים הם בדיוק הסכום בלי שני האיברים האחרונים. לפי הנתון היחס הוא 4:

$$q^2 = 4 \;\Rightarrow\; q = 2$$

מציאת n: האיבר האמצעי הוא a_{n+1}. לפניו n איברים (a_1 עד a_n) ואחריו n איברים (a_{n+2} עד a_{2n+1}). כל איבר אחרי האמצע שווה לאיבר המתאים לפני האמצע כפול q^{n+1}:

$$a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1}$$
$$= q^{n+1}(a_1 + \cdots + a_n)$$
$$2^{n+1} = 256 = 2^8$$
$$n + 1 = 8 \;\Rightarrow\; n = 7$$

תשובה: $n = 7$

סעיף ב

לפי נוסחת האיבר הכללי: $a_{k+1} = a_k \cdot q = 2a_k$

$$a_k + a_{k+1} = a_k + 2a_k = 3a_k$$
$$b_k = \frac{1}{(3a_k)^2} = \frac{1}{9a_k^2}$$

נבדוק את המנה בין שני איברים עוקבים:

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{9a_k^2}{9a_{k+1}^2} = \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

המנה קבועה, ולכן b_k היא סדרה הנדסית עם מנה $\frac{1}{4}$.

תשובה: הוכחה: $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{4}$ **– סדרה הנדסית שמנתה** $\frac{1}{4}$**.**

סעיף ג

הסדרה b_k אינסופית יורדת (מנה $\frac{1}{4}$). נפריד בין המקומות האי־זוגיים לזוגיים:

מקומות אי־זוגיים: $b_1, b_3, b_5, \ldots$ – סדרה הנדסית עם מנה $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$:

$$S_{\text{א״י}} = \frac{b_1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16b_1}{15}$$

מקומות זוגיים אחרי ההכפלה: האיברים $2b_2, 2b_4, \ldots$ – גם הם סדרה הנדסית עם מנה $\frac{1}{16}$. האיבר הראשון:

$$2b_2 = 2 \cdot \frac{b_1}{4} = \frac{b_1}{2}$$
$$S_{\text{זוגי}} = \frac{\frac{b_1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{8b_1}{15}$$

לפי הנתון ההפרש הוא $\frac{1}{30}$:

$$\frac{16b_1}{15} - \frac{8b_1}{15} = \frac{8b_1}{15} = \frac{1}{30}$$
$$b_1 = \frac{15}{240} = \frac{1}{16}$$

ולפי סעיף ב:

$$\frac{1}{9a_1^2} = \frac{1}{16} \;\Rightarrow\; a_1^2 = \frac{16}{9}$$
$$a_1 = \frac{4}{3}$$

(האיברים חיוביים, ולכן $a_1 > 0$.)

תשובה: $a_1 = \frac{4}{3}$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 2

2. הסדרה A היא סדרה הנדסית שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ומנתה היא q, $-1 < q < 0$.

נתון: $a_1 = 1$.

הסדרה B מוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q.

ב. לפניכם שלוש טענות I–III. קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

II. הסדרה B היא סדרה עולה.

III. האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A יוצרים סדרה עולה.

נתון: הסדרה B היא סדרה אין־סופית שסכומה הוא $\frac{1}{8}$.

ג. מצאו את ערכו של q.

נתונה סדרה הנדסית נוספת C, המוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

נתון: $c_3 + c_4 + \ldots + c_m = 44{,}307$, m הוא מספר טבעי.

ד. מצאו את הערך של m.

פתרון מלא

סעיף א

$a_1 = 1$, ולכן $a_n = q^{n-1}$. נציב בהגדרה של b_n:

$$b_n = a_n \cdot a_{n+2} = q^{n-1} \cdot q^{n+1} = q^{2n}$$

נבדוק את היחס בין שני איברים עוקבים:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{q^{2n+2}}{q^{2n}} = q^2$$

היחס קבוע (אינו תלוי ב־n), ולכן B סדרה הנדסית שמנתה q^2.

תשובה: הוכחה: $b_n = q^{2n}$, והמנה היא q^2

סעיף ב

טענה I: המנה q שלילית, ולכן סימני האיברים של A מתחלפים: $a_1 = 1 > 0$, $a_2 = q < 0$, $a_3 = q^2 > 0$, ... לכן הסדרה לא עולה ולא יורדת. **הטענה נכונה.**

טענה II: $b_n = q^{2n} > 0$ לכל n, והמנה q^2 מקיימת $0 < q^2 < 1$. סדרה הנדסית עם איברים חיוביים ומנה בין 0 ל־1 היא **יורדת**. **הטענה אינה נכונה.**

טענה III: האיברים במקומות הזוגיים:

$$a_2 = q,\ \ a_4 = q^3,\ \ a_6 = q^5,\ \ldots$$

זו סדרה הנדסית שאיברה הראשון $q < 0$ ומנתה q^2, כאשר $0 < q^2 < 1$. האיברים שליליים, והערך המוחלט שלהם קטן מאיבר לאיבר, ולכן הם מתקרבים ל־0 מלמטה – כלומר הסדרה **עולה**. **הטענה נכונה.**

תשובה: טענה I נכונה; טענה II לא נכונה; טענה III נכונה

סעיף ג

B היא סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת ($0 < q^2 < 1$), שאיברה הראשון $b_1 = q^2$ ומנתה q^2:

$$S = \frac{b_1}{1-q^2} = \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{1}{8}$$
$$8q^2 = 1 - q^2$$
$$9q^2 = 1 \Rightarrow q = \pm\frac{1}{3}$$

לפי הנתון $-1 < q < 0$, ולכן:

$$q = -\frac{1}{3}$$

תשובה: $q = -\frac{1}{3}$

סעיף ד

נמצא ביטוי ל־c_n:

$$c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{q^{n-1}}{q^{2n}} = \left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}$$
$$c_n = (-3)^{n+1}$$

כלומר C סדרה הנדסית שמנתה -3, ו־$c_3 = (-3)^4 = 81$.

הסכום $c_3 + c_4 + \cdots + c_m$ הוא סכום של $m-2$ איברים, החל מ־c_3:

$$\frac{81\left((-3)^{m-2} - 1\right)}{-3-1} = 44{,}307$$
$$(-3)^{m-2} - 1 = \frac{-4 \cdot 44{,}307}{81} = -2188$$
$$(-3)^{m-2} = -2187 = (-3)^7$$
$$m - 2 = 7 \Rightarrow m = 9$$

תשובה: $m = 9$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 2

2. בסדרה חשבונית A נתון: $a_1 = -4-4k$, $a_3 = -16+2k$. k הוא פרמטר.

א. מצאו עבור אילו ערכים של k :

(1) הסדרה A עולה, (2) הסדרה A יורדת, (3) הסדרה A קבועה.

נתון כי $a_{17} = -232$.

ב. מצאו את הערך של k .

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג–ד.

נתונה סדרה חדשה, B , שאיבריה מוגדרים כך: לכל n טבעי, $b_n = a_n + 24n + 17$.

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

ד. חשבו את הסכום: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{29}^2 - b_{30}^2$.

פתרון מלא

סעיף א

בסדרה חשבונית $a_3 = a_1 + 2d$, ולכן:

$$2d = a_3 - a_1$$
$$= (-16+2k) - (-4-4k)$$
$$2d = -12 + 6k \;\Rightarrow\; d = 3k - 6$$

סדרה חשבונית עולה כאשר $d > 0$, יורדת כאשר $d < 0$, וקבועה כאשר $d = 0$:

$$3k - 6 > 0 \;\Rightarrow\; k > 2$$
$$3k - 6 < 0 \;\Rightarrow\; k < 2$$
$$3k - 6 = 0 \;\Rightarrow\; k = 2$$

תשובה: (1) עולה: $k > 2$
(2) יורדת: $k < 2$
(3) קבועה: $k = 2$

סעיף ב

$$a_{17} = a_1 + 16d$$
$$-232 = -4 - 4k + 16(3k - 6)$$
$$-232 = 44k - 100$$
$$44k = -132 \;\Rightarrow\; k = -3$$

תשובה: $k = -3$

סעיף ג

עבור $k=-3$:

$$a_1 = -4 + 12 = 8$$
$$d = 3 \cdot (-3) - 6 = -15$$
$$a_n = 8 - 15(n-1) = 23 - 15n$$

לכן:

$$b_n = 23 - 15n + 24n + 17 = 9n + 40$$

ההפרש בין שני איברים עוקבים:

$$b_{n+1} - b_n = 9(n+1) + 40 - (9n + 40)$$
$$= 9$$

ההפרש קבוע, ולכן B סדרה חשבונית עם $b_1 = 49$ ו־$d = 9$.

תשובה: הוכחה: $b_n = 9n + 40$**, ו־**$b_{n+1} - b_n = 9$ **קבוע**

סעיף ד

נקבץ בזוגות ונשתמש בנוסחת הפרש ריבועים:

$$b_1^2 - b_2^2 = (b_1 - b_2)(b_1 + b_2)$$

בכל זוג $b_{2j-1} - b_{2j} = -9$, ולכן:

$$\text{הסכום} = -9(b_1 + b_2)$$
$$-9(b_3 + b_4) - \ldots$$
$$= -9(b_1 + b_2 + \cdots + b_{30})$$

סכום 30 האיברים הראשונים של B:

$$b_{30} = 9 \cdot 30 + 40 = 310$$
$$S_{30} = \frac{30(b_1 + b_{30})}{2} = 15 \cdot (49 + 310)$$
$$= 5385$$
$$\text{הסכום} = -9 \cdot 5385 = -48465$$

תשובה: -48465

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 2

2. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \ldots a_{3n}$ שבה $3n$ איברים, וההפרש שלה הוא d.

נסמן ב־ S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל־ 0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים $a_1 = 19 \cdot |d|$.

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה: $a_2, a_5, a_8, \ldots, a_{3n-4}$.

סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 36.

ד. מצאו את d.

פתרון מלא

סעיף א

האיברים האמצעיים הם:

$$a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}$$

זו סדרה חשבונית בת n איברים. לפי נוסחת הסכום:

$$S_n^* = \frac{n\,(a_{n+1} + a_{2n})}{2}$$

נבטא באמצעות a_1 ו־d:

$$\begin{aligned} &a_{n+1} + a_{2n} \\ &= (a_1 + nd) + (a_1 + (2n-1)d) \\ &= 2a_1 + (3n-1)d \end{aligned}$$

$$S_n^* = \frac{n\,[2a_1 + (3n-1)d]}{2}$$

סכום כל $3n$ האיברים:

$$S_{3n} = \frac{3n\,[2a_1 + (3n-1)d]}{2}$$

לכן:

$$\frac{1}{3}S_{3n} = \frac{n\,[2a_1 + (3n-1)d]}{2} = S_n^*$$

תשובה: הוכחה: $S_n^* = \frac{1}{3}S_{3n}$

סעיף ב

לפי סעיף א, $S_{3n} = 3S_n^* = 0$:

$$\frac{3n\left[2a_1+(3n-1)d\right]}{2}=0$$
$$2a_1+(3n-1)d=0$$
$$(3n-1)d=-2a_1$$

נתון $a_1>0$, ולכן אגף ימין שלילי. כמו כן $3n-1>0$, ולכן:

$$d<0$$

הפרש הסדרה **שלילי**.
תשובה: ההפרש שלילי.

סעיף ג
מסעיף ב $d<0$, ולכן $|d|=-d$:

$$a_1=19|d|=-19d$$

נציב במשוואה מסעיף ב:

$$2a_1+(3n-1)d=0$$
$$-38d+(3n-1)d=0$$

נחלק ב־$d\neq 0$:

$$-38+3n-1=0\ \Rightarrow\ 3n=39$$

$n=13$, ולכן בסדרה $3\cdot 13=39$ איברים.
תשובה: 39 איברים.

סעיף ד
מאחר ש־$3n-4=35$, הסדרה החדשה היא:

$$a_2,a_5,a_8,\ldots,a_{35}$$

ההפרש בסדרה החדשה הוא $3d$. מספר האיברים בה:

$$\frac{35-2}{3}+1=12$$

האיבר הראשון שלה:

$$a_2=a_1+d=-19d+d=-18d$$

סכום 12 האיברים:

$$S_{12}=\frac{12\left[2\cdot(-18d)+11\cdot 3d\right]}{2}$$
$$=6\left(-36d+33d\right)=-18d$$
$$-18d=36\ \Rightarrow\ d=-2$$

הערך שלילי, כמו שמצאנו בסעיף ב.
תשובה: $d=-2$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 2

2. נתונה סדרה חשבונית A ובה $2n$ איברים (n הוא מספר טבעי).

d הוא הפרש הסדרה ($d \neq 0$).

מגדירים סדרה נוספת B באופן הזה: $b_m = \frac{a_m + a_{m+1}}{2}$.

בסדרה B יש $2n-1$ איברים.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה חשבונית, והביעו באמצעות d את ההפרש שלה.

נסמן ב־S_A את סכום האיברים בסדרה A.

נסמן ב־S_B את סכום האיברים בסדרה B.

ב. הוכיחו: $\frac{S_A}{2n} = \frac{S_B}{2n-1}$.

נתון: $S_A = \frac{66}{65} \cdot S_B$, $S_A = 220 + S_B$.

ג. **(1)** מצאו את n.

(2) מצאו את סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A.

פתרון מלא

סעיף א

האיבר הכללי של A הוא $a_m = a_1 + (m-1)d$. נחשב את ההפרש בין שני איברים עוקבים בסדרה B:

$$b_{m+1} - b_m$$
$$= \frac{a_{m+1} + a_{m+2}}{2} - \frac{a_m + a_{m+1}}{2}$$
$$= \frac{a_{m+2} - a_m}{2} = \frac{2d}{2} = d$$

ההפרש קבוע ואינו תלוי ב־m, ולכן B היא סדרה חשבונית, וההפרש שלה הוא d.

תשובה: הוכחה: לכל m מתקיים $b_{m+1} - b_m = d$, ולכן B חשבונית וההפרש שלה הוא d.

סעיף ב

הסכום של A: בסדרה $2n$ איברים, ולפי נוסחת הסכום:

$$S_A = \frac{2n(a_1 + a_{2n})}{2}$$
$$\frac{S_A}{2n} = \frac{a_1 + a_{2n}}{2}$$

הסכום של B: בסדרה $2n-1$ איברים. האיבר הראשון והאחרון:

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$
$$b_{2n-1} = \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}$$

בסדרה חשבונית סכום שני איברים שמרחקם מהקצוות שווה הוא קבוע:

$$a_2 + a_{2n-1} = a_1 + a_{2n}$$

לכן:

$$b_1 + b_{2n-1} = \frac{2(a_1 + a_{2n})}{2} = a_1 + a_{2n}$$
$$S_B = \frac{(2n-1)(a_1 + a_{2n})}{2}$$
$$\frac{S_B}{2n-1} = \frac{a_1 + a_{2n}}{2}$$

קיבלנו את אותו ביטוי בשני המקרים, ולכן:

$$\frac{S_A}{2n} = \frac{S_B}{2n-1}$$

תשובה: הוכחה: כל אחד מהיחסים שווה ל־ $\frac{a_1+a_{2n}}{2}$.

סעיף ג (1)

מסעיף ב:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{2n}{2n-1}$$

ונתון $\frac{S_A}{S_B} = \frac{66}{65}$. לכן:

$$\frac{2n}{2n-1} = \frac{66}{65}$$
$$130n = 132n - 66$$
$$2n = 66 \;\Rightarrow\; n = 33$$

תשובה: $n = 33$

סעיף ג (2)

נציב $S_A = \frac{66}{65}S_B$ בנתון השני:

$$\frac{66}{65}S_B = 220 + S_B$$
$$\frac{1}{65}S_B = 220 \;\Rightarrow\; S_B = 14{,}300$$
$$S_A = 14{,}300 + 220 = 14{,}520$$

בסדרה A יש $2n = 66$ איברים, ושני האיברים האמצעיים הם a_{33} ו־a_{34}. סכומם שווה לסכום האיבר הראשון והאחרון:

$$a_{33} + a_{34} = a_1 + a_{66}$$

מנוסחת הסכום:

$$S_A = \frac{66(a_1 + a_{66})}{2} = 14{,}520$$

$$a_1 + a_{66} = \frac{14{,}520}{33} = 440$$

תשובה: $a_{33} + a_{34} = 440$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 2

2. נתונות שתי סדרות הנדסיות אין־סופיות מתכנסות, A ו־ B , שכל איבריהן שונים מ־ 0 .

האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A .

האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B .

משתי הסדרות ההנדסיות A ו־ B בונים סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת חדשה, שאיבריה הם:

$$\frac{a_1}{b_1} , \frac{a_2}{b_2} , \frac{a_3}{b_3} , \cdots , \frac{a_n}{b_n} , \cdots .$$

כל שלוש הסדרות, הסדרה A , הסדרה B והסדרה החדשה אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו־ q_B .

הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה.

ב. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1)–(2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.

(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.

המספרים c_1 , c_2 ו־ c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.

נתון כי c_2 שווה ל־ $-c_1$, ומתקיים גם: $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{45}$.

ג. מצאו את c_1 .

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל־ c_1 ,

ומתקיים גם: $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots}$

ד. מצאו את הערך של q_B .

פתרון מלא

סעיף א

האיבר הכללי של הסדרה החדשה:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 q_A^{n-1}}{b_1 q_B^{n-1}}$$

נחשב את המנה בין שני איברים עוקבים:

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} : \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{b_n}{b_{n+1}}$$
$$= q_A \cdot \frac{1}{q_B} = \frac{q_A}{q_B}$$

מנת הסדרה החדשה:

$$q = \frac{q_A}{q_B}$$

תשובה: $q = \frac{q_A}{q_B}$

סעיף ב (1)

הסדרה A: סדרה הנדסית שאינה קבועה, שאינה עולה ואינה יורדת – הסימנים של איבריה מתחלפים, ולכן:

$$q_A < 0$$

הסדרה B: סדרה הנדסית עולה. אם $q_B < 0$ הסימנים מתחלפים והיא לא עולה, ולכן $q_B > 0$. הסדרה מתכנסת, ולכן גם $q_B < 1$:

$$0 < q_B < 1$$

מנת הסדרה החדשה היא מנה של מספר שלילי במספר חיובי:

$$\frac{q_A}{q_B} < 0$$

ההיגד **לא נכון**.

תשובה: לא נכון:
$q_A < 0$ ו־$q_B > 0$, ולכן $\frac{q_A}{q_B} < 0$.

סעיף ב (2)

לפי סעיף ב (1), $0 < q_B < 1$, ולכן כל איבר בסדרה B הוא האיבר הקודם כפול מספר חיובי הקטן מ־1:

$$b_{n+1} = q_B \cdot b_n$$

הסדרה עולה, כלומר $b_{n+1} > b_n$:

$$q_B b_n > b_n \;\Rightarrow\; b_n(q_B - 1) > 0$$

$q_B - 1 < 0$, ולכן $b_n < 0$ לכל n.

ההיגד **נכון**: כל איברי B שליליים (הם עולים ומתקרבים ל־0 מלמטה).

תשובה: נכון.

סעיף ג

בסדרה חשבונית ההפרש קבוע:

$$d = c_2 - c_1 = -c_1 - c_1 = -2c_1$$
$$c_3 = c_2 + d = -c_1 - 2c_1 = -3c_1$$

נציב בנתון:

$$\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = \frac{c_1 \cdot (-c_1)}{-3c_1} = \frac{c_1}{3}$$
$$\frac{c_1}{3} = -\frac{1}{45}$$
$$c_1 = -\frac{1}{15}$$

תשובה: $c_1 = -\frac{1}{15}$

סעיף ד

לפי הנתון $q_A = c_1 = -\frac{1}{15}$. נכתוב כל סכום לפי נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת, $S = \frac{a_1}{1-q}$.

אגף שמאל – סכום הסדרה החדשה (סעיף א):

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}}{1 - \frac{q_A}{q_B}}$$

אגף ימין – מנה של שני סכומים:

$$\frac{\frac{a_1}{1-q_A}}{\frac{b_1}{1-q_B}} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{1-q_B}{1-q_A}$$

נשווה ונחלק ב־$\frac{a_1}{b_1} \neq 0$:

$$\frac{1}{1-\frac{q_A}{q_B}} = \frac{1-q_B}{1-q_A}$$

$$1-q_A = (1-q_B)\left(1-\frac{q_A}{q_B}\right)$$

$$1-q_A = 1-\frac{q_A}{q_B}-q_B+q_A$$

נכפול ב־q_B ונסדר:

$$q_B^2 - 2q_Aq_B + q_A = 0$$

נציב $q_A = -\frac{1}{15}$ ונכפול ב־15:

$$15q_B^2 + 2q_B - 1 = 0$$

$$q_B = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{30} = \frac{-2 \pm 8}{30}$$

$$q_B = \frac{1}{5} \text{ או } q_B = -\frac{1}{3}$$

לפי סעיף ב, $q_B > 0$, ולכן:

$$q_B = \frac{1}{5}$$

תשובה: $q_B = \frac{1}{5}$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית אין סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.

בונים סדרה חדשה B שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

ב. בנוגע לכל אחד מן ההיגדים (1)–(2) שלפניכם קבעו אם הוא נכון או לא נכון, ונמקו את קביעתכם.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת – בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

(2) אם הסדרה A יורדת – בהכרח היא גם מתכנסת.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{3}{5}$.

ג. מצאו את q.

נתון: n הוא מספר טבעי המקיים $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\ldots+\frac{b_n}{a_n}=\frac{2059}{729}$.

ד. מצאו את n.

פתרון מלא

סעיף א

לפי נוסחת האיבר הכללי $a_n = a_1 q^{n-1}$:

$$b_n = a_n \cdot q^{n-1} = a_1 q^{n-1} \cdot q^{n-1}$$

$$b_n = a_1 \left(q^2\right)^{n-1}$$

זו נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה a_1 והמנה שלה q^2.

תשובה: הוכחה: סדרה הנדסית שמנתה q^2.

סעיף ב (1)

טור הנדסי אינסופי מתכנס כאשר $|q| < 1$ ($q \neq 0$).

אם הסדרה A אינה מתכנסת, אז $|q| \geq 1$, ולכן:

$$q^2 \geq 1$$

המנה של B היא q^2, ולכן גם B אינה מתכנסת. הטענה **נכונה**.

תשובה: נכונה.

סעיף ב (2)

הטענה **אינה נכונה**. דוגמה נגדית: $a_1 = -1,\ q = 2$. אז A היא:

$$-1,\ -2,\ -4,\ -8, \ldots$$

זו סדרה יורדת. אבל המנה של B היא $q^2 = 4$, ולכן B אינה מתכנסת.

תשובה: לא נכונה.

דוגמה נגדית: $a_1 = -1,\ q = 2$

סעיף ג

שתי הסדרות מתכנסות, עם אותו איבר ראשון a_1. לפי נוסחת הסכום $S = \frac{a_1}{1-q}$:

$$S_A = \frac{a_1}{1-q}, \qquad S_B = \frac{a_1}{1-q^2}$$

$$\frac{S_B}{S_A}=\frac{1-q}{1-q^2}=\frac{1-q}{(1-q)(1+q)}$$
$$\frac{S_B}{S_A}=\frac{1}{1+q}$$
$$\frac{1}{1+q}=\frac{3}{5}\ \Rightarrow\ 1+q=\frac{5}{3}\ \Rightarrow\ q=\frac{2}{3}$$

תשובה: $q=\frac{2}{3}$

סעיף ד

$$\frac{b_n}{a_n}=q^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

זו סדרה הנדסית עם איבר ראשון 1 ומנה $\frac{2}{3}$. הסכום של n האיברים הראשונים:

$$S_n=\frac{1\cdot\left(1-(\frac{2}{3})^n\right)}{1-\frac{2}{3}}=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$
$$3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=\frac{2059}{729}$$
$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2059}{2187}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{128}{2187}=\frac{2^7}{3^7}$$
$$n=7$$

תשובה: $n=7$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה $10,935 \cdot a_1$.

נתון: $a_{2k-2} = 1,215$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון: $a_1 = 5$.

ג. **(1)** קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

(2) מצאו את k.

מן הסדרה A בונים את הסדרה האין־סופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי־זוגיים

כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם: $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ה. מצאו את סכום הסדרה C.

פתרון מלא

סעיף א

האיבר הכללי: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

$$a_1 \cdot a_{2n} = a_1 \cdot a_1 q^{2n-1} = a_1^2 q^{2n-1}$$
$$a_n \cdot a_{n+1} = a_1 q^{n-1} \cdot a_1 q^n = a_1^2 q^{2n-1}$$

שני הביטויים שווים, ולכן $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

תשובה: הוכחה: שני האגפים שווים ל-$a_1^2 q^{2n-1}$

סעיף ב

ב־$2k$ האיברים הראשונים, שני האיברים האמצעיים הם a_k ו־a_{k+1}. לפי סעיף א (עם $n = k$):

$$a_k \cdot a_{k+1} = a_1 \cdot a_{2k}$$

לפי הנתון המכפלה שווה ל־$10,935 \cdot a_1$, ולכן:

$$a_1 \cdot a_{2k} = 10,935 \cdot a_1 \Rightarrow a_{2k} = 10,935$$

(חילקנו ב־$a_1 \neq 0$.) עכשיו:

$$q^2 = \frac{a_{2k}}{a_{2k-2}} = \frac{10,935}{1,215} = 9$$
$$q = 3$$

או

$$q = -3$$

תשובה: $q = 3$ או $q = -3$

סעיף ג (1)

לפי נוסחת האיבר הכללי, $a_{2k} = a_1 q^{2k-1}$, ולכן:

$$5 \cdot q^{2k-1} = 10{,}935 \Rightarrow q^{2k-1} = 2187$$

המעריך $2k-1$ הוא מספר אי־זוגי. אם $q = -3$, חזקה אי־זוגית שלו שלילית ואינה יכולה להיות 2187. לכן $q = 3$.

מכיוון ש־$a_1 = 5 > 0$ ו־$q = 3 > 1$, ולכן כל איבר גדול מקודמו: הסדרה **עולה**.

תשובה: הסדרה עולה, כי $q = 3$ ו־$a_1 = 5 > 0$

סעיף ג (2)

$$3^{2k-1} = 2187 = 3^7$$
$$2k - 1 = 7 \Rightarrow k = 4$$

תשובה: $k = 4$

סעיף ד

לפי ההגדרה $b_n = \frac{1}{a_n}$. נבדוק את היחס בין איברים עוקבים:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1/a_{n+1}}{1/a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}$$

היחס קבוע, ולכן B סדרה הנדסית שמנתה $\frac{1}{q} = \frac{1}{3}$.

תשובה: הוכחה: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{q}$ קבוע

סעיף ה

בסדרה C האיבר הראשון הוא:

$$c_1 = -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{5}$$

כל איבר שווה לקודמו כפול $\frac{1}{3}$ בערכו המוחלט, והסימן מתחלף. לכן C סדרה הנדסית שמנתה:

$$q_C = -\frac{1}{3}$$

מכיוון ש־$|q_C| < 1$, הסדרה מתכנסת:

$$S = \frac{c_1}{1 - q_C} = \frac{-\frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{3}}$$
$$= -\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{20}$$

תשובה: $S = -\frac{3}{20} = -0.15$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 2

2. סדרה I היא סדרה הנדסית אין־סופית שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ומנתה היא $9 \cdot r^2$.

נתון: $0 < r < \frac{1}{3}$.

בין כל שני איברים בסדרה I הִכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ומנתה היא q.

א. **(1)** הַביעו את q באמצעות r.

(2) הַסבירו מדוע שתי הסדרות I ו־II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ב. חשבו את q.

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 12.

ג. מִצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב־5 $(b_5, b_{10}, b_{15}, \ldots)$.

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

פתרון מלא

סעיף א (1)

בסדרה II בין כל שני איברים של I יש איבר נוסף, ולכן $a_1 = b_1$, $a_2 = b_3$, $a_3 = b_5$, ... כלומר מעבר מאיבר לאיבר בסדרה I הוא שני צעדים בסדרה II:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_3}{b_1} = q^2$$

$$q^2 = 9r^2 \;\Rightarrow\; q = 3r \text{ או } q = -3r$$

סדרה II יורדת. במנה שלילית האיברים מחליפים סימן והסדרה אינה יורדת, ולכן $q > 0$:

$$q = 3r$$

תשובה: $q = 3r$

סעיף א (2)

סדרה הנדסית מתכנסת כאשר המנה מקיימת $-1 < q < 1$, $q \neq 0$.

נתון $0 < r < \frac{1}{3}$, ולכן:

$$0 < 3r < 1 \;\Rightarrow\; 0 < q < 1$$

$$0 < 9r^2 < 1$$

כלומר המנות של שתי הסדרות בין 0 ל־1, ולכן שתיהן מתכנסות.

תשובה: כי $0 < q = 3r < 1$

וגם $0 < 9r^2 < 1$

סעיף ב

$a_1 = b_1$, ומנת סדרה I היא q^2:

$$S_{II} = \frac{b_1}{1-q}, \qquad S_I = \frac{b_1}{1-q^2}$$
$$\frac{S_{II}}{S_I} = \frac{1-q^2}{1-q} = \frac{(1-q)(1+q)}{1-q}$$
$$= 1+q$$

נתון שהיחס הוא $\frac{4}{3}$:

$$1+q = \frac{4}{3} \;\Rightarrow\; q = \frac{1}{3}$$

תשובה: $q = \frac{1}{3}$

סעיף ג

האיברים במקומות הזוגיים $b_2, b_4, \ldots$: סדרה הנדסית עם איבר ראשון $b_1 q$ ומנה q^2:

$$\frac{b_1 q}{1-q^2} = 12$$
$$\frac{\frac{1}{3}b_1}{\frac{8}{9}} = 12 \;\Rightarrow\; \frac{3}{8}b_1 = 12$$
$$b_1 = 32$$

האיברים $b_5, b_{10}, b_{15}, \ldots$: סדרה הנדסית עם איבר ראשון b_5 ומנה q^5:

$$b_5 = 32 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 = \frac{32}{81}$$
$$q^5 = \frac{1}{243}$$
$$S = \frac{\frac{32}{81}}{1-\frac{1}{243}} = \frac{32}{81} \cdot \frac{243}{242}$$
$$= \frac{96}{242} = \frac{48}{121} \approx 0.397$$

תשובה: $\frac{48}{121} \approx 0.397$

סעיף ד

האיברים שאחרי b_5 הם $b_6, b_7, \ldots$: סדרה הנדסית עם איבר ראשון $b_6 = b_5 q$ ומנה q:

$$S = \frac{b_5 q}{1-q}$$
$$\frac{b_5}{S} = \frac{b_5(1-q)}{b_5 q} = \frac{1-q}{q}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

תשובה: היחס הוא 2

סעיף ה

תהי סדרה הנדסית מתכנסת עם מנה q המקיימת $0 < |q| < 1$, ויהי b_n איבר כלשהו בה. האיברים שאחריו, $b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots$, הם סדרה הנדסית מתכנסת עם איבר ראשון $b_n q$ ומנה q:

$$S = \frac{b_n q}{1-q}$$

$$\frac{b_n}{S} = \frac{b_n(1-q)}{b_n q} = \frac{1-q}{q}$$

התוצאה תלויה רק במנה q ולא ב־n, כלומר אינה תלויה במיקום האיבר.

תשובה: הוכחה: היחס שווה ל־$\frac{1-q}{q}$, ואינו תלוי ב־n.

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ ומנתה היא q. כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה $\frac{1}{a_1} , \frac{1}{a_2} , \frac{1}{a_3} , \ldots$ היא סדרה הנדסית? הוכח את תשובתך.

ב. **(1)** מסמנים ב־S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A (n טבעי).

הוכח כי לכל n מתקיים: $\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}$

(2) נתון: $a_1 = 1 , q = 3$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה A גדול פי 6561 מן הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}$.

מצא את n.

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A.

איברי הסדרה B הם $b_1 , b_2 , b_3 , \ldots$.

נסמן ב־T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה B. נתון כי m הוא מספר טבעי אי־זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \ldots + \frac{1}{a_m}$

קבע אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכח את תשובתך.

פתרון מלא

סעיף א

נבדוק את המנה בין שני איברים עוקבים בסדרה החדשה (כל איברי A שונים מאפס, ולכן מותר לחלק):

$$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n \cdot q} = \frac{1}{q}$$

המנה קבועה ואינה תלויה ב־n, ולכן הסדרה $\ldots , \frac{1}{a_3} , \frac{1}{a_2} , \frac{1}{a_1}$ **היא** סדרה הנדסית, ומנתה $\frac{1}{q}$.

תשובה: כן. זו סדרה הנדסית שמנתה $\frac{1}{q}$.

סעיף ב (1)

מקרה $q = 1$: כל האיברים שווים ל־a_1, ולכן:

$$\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{na_1}{a_1^2} = \frac{n}{a_1} = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_1}$$

מקרה $q \neq 1$: נחשב את אגף שמאל:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \qquad a_1 a_n = a_1^2 q^{n-1}$$

$$\frac{S_n}{a_1 a_n} = \frac{q^n - 1}{a_1(q-1)q^{n-1}}$$

אגף ימין הוא סכום של סדרה הנדסית עם איבר ראשון $\frac{1}{a_1}$ ומנה $\frac{1}{q}$ (סעיף א):

$$\frac{1}{a_1}\cdot\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n-1}{\frac{1}{q}-1}$$

נכפיל את המונה והמכנה ב־q^n:

$$=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1-q^n}{q^{n-1}(1-q)}$$
$$=\frac{q^n-1}{a_1(q-1)q^{n-1}}$$

שני האגפים שווים, ולכן השוויון מתקיים לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה: שני האגפים שווים ל־$\frac{q^n-1}{a_1(q-1)q^{n-1}}$.

סעיף ב (2)

לפי סעיף ב (1):

$$\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{S_n}{a_1a_n}$$

נתון ש־S_n גדול פי 6561 מסכום זה:

$$S_n=6561\cdot\frac{S_n}{a_1a_n}$$

הסכום S_n שונה מאפס, כי כל האיברים חיוביים. לכן:

$$a_1a_n=6561$$

נציב את הנתונים $a_1=1$ ו־$q=3$:

$$a_n=a_1q^{n-1}=3^{n-1}$$
$$3^{n-1}=6561=3^8$$
$$n-1=8\ \Rightarrow\ n=9$$

תשובה: $n=9$

סעיף ג

הסדרה B היא:

$$a_1,\ -a_2,\ a_3,\ -a_4,\ldots$$

כלומר $b_k=a_1(-q)^{k-1}$ – סדרה הנדסית עם איבר ראשון a_1 ומנה $-q$, וכל איבריה שונים מאפס.

לכן אפשר להפעיל עליה את השוויון מסעיף ב (1):

$$\frac{T_m}{b_1b_m}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_m}$$

נציב את איברי B. הסימנים מתחלפים, ו־m אי־זוגי, ולכן האיבר האחרון חיובי ($b_m=a_m$):

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\cdots+\frac{1}{a_m}$$

הנוסחה הנתונה **נכונה**.

תשובה: הנוסחה נכונה: B הנדסית עם מנה $-q$, ומפעילים עליה את ב (1).

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 2

2. נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$, והפרשה d.

מסמנים ב־S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A, לכל n טבעי.

מגדירים סדרה נוספת, B, שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \ldots$. איברי הסדרה B מקיימים $b_n = S_{n+1} - S_n$, לכל n טבעי.

א. **(1)** האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמק.

(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A? נמק.

מסמנים ב־T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B, לכל n טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \ldots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d}.$$

נתון: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$T_5 = -20$

ג. חשב את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי־זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי שלם? נמק.

פתרון מלא

סעיף א (1)

S_{n+1} הוא סכום $n+1$ האיברים הראשונים ו־S_n סכום n הראשונים, ולכן ההפרש ביניהם הוא האיבר ה־$(n+1)$:

$$b_n = S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$$

נחשב הפרש בין שני איברים עוקבים בסדרה B:

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+2} - a_{n+1} = d$$

ההפרש קבוע, ולכן B היא סדרה חשבונית שההפרש שלה d.

תשובה: כן. $b_n = a_{n+1}$, ולכן $b_{n+1} - b_n = d$ קבוע.

סעיף א (2)

הסדרה B היא $a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$ – כלומר הסדרה A בלי האיבר הראשון.

הסדרה A עולה, ולכן $d > 0$ ו־$b_1 = a_2 = a_1 + d \neq a_1$. לכן הסדרות אינן זהות.

תשובה: לא. $b_1 = a_2 \neq a_1$, כי $d > 0$.

סעיף ב

n זוגי, ולכן אפשר לחלק את n האיברים לזוגות $(b_1, b_2),\ (b_3, b_4), \ldots$. בכל זוג:

$$b_{2k-1} - b_{2k} = -d$$

לכן כל אחד מהמחוברים באגף ימין הוא:

$$(b_{2k-1} + b_{2k})(b_{2k-1} - b_{2k})$$
$$= -d\,(b_{2k-1} + b_{2k})$$

נסכם את כל הזוגות:

$$\text{מונה} = -d\,(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$
$$= -d \cdot T_n$$

נחלק ב־$-d$ ($d \neq 0$):

$$\frac{-d \cdot T_n}{-d} = T_n$$

כלומר אגף ימין שווה ל־T_n, כנדרש.

תשובה: הוכחה: בכל זוג $b_{2k-1} - b_{2k} = -d$, ולכן המונה שווה ל־$-d \cdot T_n$.

סעיף ג

הביטוי $b_1^2 - b_2^2 + \cdots - b_{40}^2$ הוא המונה מסעיף ב עבור $n = 40$, כי:

$$b_{2k-1}^2 - b_{2k}^2$$
$$= (b_{2k-1} - b_{2k})(b_{2k-1} + b_{2k})$$

לכן לפי סעיף ב הוא שווה ל־$-d \cdot T_{40}$:

$$-d \cdot \frac{40(2b_1 + 39d)}{2} = -95$$
$$-20d(2b_1 + 39d) = -95$$

מהנתון השני:

$$T_5 = \frac{5(2b_1 + 4d)}{2} = -20$$
$$2b_1 + 4d = -8 \;\Rightarrow\; b_1 = -4 - 2d$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$-20d(-8 - 4d + 39d) = -95$$
$$-20d(35d - 8) = -95$$
$$700d^2 - 160d - 95 = 0$$
$$140d^2 - 32d - 19 = 0$$
$$d = \frac{32 \pm \sqrt{1024 + 10640}}{280} = \frac{32 \pm 108}{280}$$

הסדרה עולה, ולכן $d > 0$:

$$d = \frac{140}{280} = 0.5$$
$$b_1 = -4 - 2 \cdot 0.5 = -5$$

תשובה: $b_1 = -5,\ d = 0.5$

סעיף ד

$b_1 = a_2$, ולכן:

$$a_1 = a_2 - d = -5 - 0.5 = -5.5$$

האיברים במקומות האי־זוגיים $a_1, a_3, a_5, \ldots$ הם סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה -5.5 וההפרש שלה $2d = 1$.

סכום m האיברים הראשונים שלה:

$$S = \frac{m\left[2 \cdot (-5.5) + (m-1) \cdot 1\right]}{2}$$
$$= \frac{m(m-12)}{2}$$

הסכום חיובי כאשר $m > 12$:

עבור 13 איברים הסכום הוא:

$$\frac{13 \cdot 1}{2} = 6.5$$

זה לא מספר שלם. עבור 14 איברים הסכום הוא:

$$\frac{14 \cdot 2}{2} = 14$$

זה מספר שלם וחיובי.

לכן צריך לחבר לפחות 14 איברים.

תשובה: 14 איברים (הסכום אז הוא 14)

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.