סדרות ואינדוקצייה – כל השאלות עם תשובות סופיות

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י״א (שאלון 571) • 17 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 2

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית יורדת שכל איבריה חיוביים ומנתה היא q.

א. לפניכם שלוש טענות I–III. קבעו איזו מן הטענות נכונה ונמקו את קביעתכם.

I. $-1 < q < 0$

II. $0 < q < 1$

III. $1 < q$

b_n היא סדרה אין־סופית שאיבריה מקיימים $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה b_n היא הנדסית ומנתה היא q.

נתון כי סכום הסדרה b_n גדול פי 1.96 מסכום הסדרה a_n.

ג. מצאו את הערך של q.

c_n היא סדרה שאיבריה מקיימים $c_n = \dfrac{b_n}{4 \cdot a_n}$ לכל n טבעי.

נתון כי סכום k האיברים הראשונים בסדרה הוא 34.79.

ד. **(1)** הוכיחו כי הסדרה c_n היא קבועה.

(2) מצאו את הערך של k.

החליפו את הסימן של כל אחד מן האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה c_n.

ה. מצאו את סכום k האיברים הראשונים בסדרה c_n לאחר החלפת הסימנים. נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א

$0 < q < 1$ (טענה II)

סעיף ב

הוכחה: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ – מנה קבועה.

סעיף ג

$q = 0.6$

סעיף ד (1)

הוכחה: $c_n = \frac{1+q+q^2}{4} = 0.49$ לכל n.

סעיף ד (2)

$k = 71$

סעיף ה

0.49

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 2

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא q.

b_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא $2q$.

c_n היא סדרה אין־סופית שאיבריה מקיימים $c_n = a_n \cdot b_n$ לכל n טבעי.

א. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו באמצעות q את מנתה.

נתון: $c_2 = \frac{1}{8} \cdot (a_1)^2$, $a_1 = b_1$.

ב. מצאו את הערך של q.

ג. **(1)** האם הערך של a_1 הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

(2) האם הסדרה c_n עולה או יורדת? נמקו את תשובתכם.

נסמן ב־ S_1 את סכום הסדרה a_n, ב־ S_2 את סכום הסדרה b_n וב־ S_3 את סכום הסדרה c_n.

נתון: $S_1 + S_2 + S_3 = 434$.

ד. מצאו את הערך של a_1.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכחה: היחס $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ קבוע, והמנה היא $2q^2$.

סעיף ב

$q = \frac{1}{4}$

סעיף ג (1)

האיבר a_1 שלילי.

סעיף ג (2)

הסדרה c_n יורדת: איבריה חיוביים ומנתה $\frac{1}{8}$.

סעיף ד

$a_1 = -21$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 2

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית יורדת שסכומה מתכנס.

המנה של הסדרה היא q.

נסמן ב־ T את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים בסדרה,

ונסמן ב־ R את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה.

נתון: $\frac{T^2}{R^2}=16$.

א. מצאו את הערך של q.

נתונה סדרה b_n שאיבריה מקיימים $b_n=\frac{1+q}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

נתון: $b_1=1$.

ב. מצאו את הערך של a_1.

ג. הביעו באמצעות n את b_n.

ד. הוכיחו באינדוקצייה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$b_1+b_2+...+b_n=\frac{16^n-1}{15}$$.

תשובות סופיות

סעיף א

$q=\frac{1}{4}$

סעיף ב

$a_1=\sqrt{5}$

סעיף ג

$b_n=16^{n-1}$

סעיף ד

הוכחה: b_n הנדסית עם $b_1=1$, $q=16$, ולכן $b_1+\cdots+b_n=\frac{16^n-1}{15}$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 2

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא q.

$0 < q < 1$.

א. קבעו אם כל איברי הסדרה a_n הם חיוביים או שליליים. נמקו את קביעתכם.

b_n היא סדרה הנדסית אין־סופית וגם מנתה היא q.

c_n היא סדרה אין־סופית המקיימת לכל n טבעי $c_n = 2b_n - a_n$ $(c_n \neq 0)$.

ב. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q.

נתון כי $c_1 = 5\frac{2}{3}$, וכי סכום איברי הסדרה c_n גדול פי 17 מסכום איברי הסדרה b_n.

ג. מצאו את הערך של a_1.

נתון כי סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n גדול ב־ 4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים בסדרה a_n.

ד. מצאו את הערך של q.

תשובות סופיות

סעיף א

כל איברי הסדרה שליליים.

סעיף ב

הוכחה: $\frac{c_{n+1}}{c_n} = q$ קבוע, ולכן c_n הנדסית. המנה היא q.

סעיף ג

$a_1 = -5$

סעיף ד

$q = \frac{1}{4}$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

נתון: $2a_2 + 8 = a_4$, $\frac{a_4}{a_2} = 4$.

א. מצאו את הערך של a_3 (מצאו את שתי האפשרויות).

נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אין־סופית חדשה B.

נתון כי איברי הסדרה B מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אין־סופית נוספת C.

איברי הסדרה C הם: $\frac{k}{a_1 \cdot a_2}, \frac{k}{a_3 \cdot a_4}, \frac{k}{a_5 \cdot a_6}, \ldots$. $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ג. **(1)** מצאו את מנת הסדרה C.

(2) מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.

נסמן ב־S_B את סכום הסדרה B, וב־S_C את סכום הסדרה C.

נתון: $S_C = 4 \cdot S_B$.

ד. מצאו את הערך של k.

תשובות סופיות

סעיף א

$a_3 = 8$ או $a_3 = -8$

סעיף ב

הוכחה: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{q^2}$ קבוע; המנה של B היא $\frac{1}{4}$.

סעיף ג (1)

$\frac{1}{16}$

סעיף ג (2)

$k > 0$

סעיף ד

$k = 5$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ובה m איברים (m הוא מספר טבעי גדול מ־ 4).

נתון: כל איברי הסדרה A הם שליליים.

סכום $m-4$ האיברים האחרונים בסדרה הוא פי 16 מסכום $m-4$ האיברים הראשונים בסדרה.

א. **(1)** מצאו את מנת הסדרה A.

(2) האם הסדרה A עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אין־סופית.

נתונה סדרה אין־סופית B שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{k^n}{a_n}$ לכל n טבעי. k הוא פרמטר שונה מ־ 0.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את המנה שלה באמצעות k.

נתון כי סכום הסדרה B מתכנס.

ג. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k.

נתון: מנת הסדרה B היא $\frac{1}{4}$.

סכום הסדרה B הוא -9.

ד. מצאו את הערך של k ואת הערך של b_1.

בסדרה B מחקו כל איבר שלישי $(b_3, b_6, b_9 \ldots)$.

ה. מצאו את סכום האיברים הנותרים.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$q = 2$

סעיף א (2)

הסדרה יורדת.

סעיף ב

B הנדסית, ומנתה $\frac{k}{2}$

סעיף ג

$-2 < k < 0$ או $0 < k < 2$

סעיף ד

$k = \frac{1}{2}$

$b_1 = -\frac{27}{4} = -6.75$

סעיף ה

$-\frac{60}{7} = -8\frac{4}{7}$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).

כל איברי הסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n+1}$ הם חיוביים.

סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים.

נתון כי סכום האיברים שנמצאים אחרי האיבר האמצעי גדול פי 256 מסכום האיברים שנמצאים לפני האיבר האמצעי.

א. מצאו את n.

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אין־סופית.

נתון: B היא סדרה אין־סופית המקיימת לכל k טבעי $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב־ 2.

נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי־זוגיים גדול ב־ $\frac{1}{30}$ מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את a_1.

תשובות סופיות

סעיף א

$n = 7$

סעיף ב

הוכחה: $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{4}$ – סדרה הנדסית שמנתה $\frac{1}{4}$.

סעיף ג

$a_1 = \frac{4}{3}$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 2

2. הסדרה A היא סדרה הנדסית שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ומנתה היא q, $-1 < q < 0$.

נתון: $a_1 = 1$.

הסדרה B מוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q.

ב. לפניכם שלוש טענות I–III. קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

II. הסדרה B היא סדרה עולה.

III. האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A יוצרים סדרה עולה.

נתון: הסדרה B היא סדרה אין־סופית שסכומה הוא $\frac{1}{8}$.

ג. מצאו את ערכו של q.

נתונה סדרה הנדסית נוספת C, המוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

נתון: $c_3 + c_4 + \ldots + c_m = 44{,}307$, m הוא מספר טבעי.

ד. מצאו את הערך של m.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכחה: $b_n = q^{2n}$, והמנה היא q^2

סעיף ב

טענה I נכונה; טענה II לא נכונה; טענה III נכונה

סעיף ג

$q = -\frac{1}{3}$

סעיף ד

$m = 9$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 2

2. בסדרה חשבונית A נתון: $a_1 = -4-4k$, $a_3 = -16+2k$. k הוא פרמטר.

א. מצאו עבור אילו ערכים של k:

(1) הסדרה A עולה, (2) הסדרה A יורדת, (3) הסדרה A קבועה.

נתון כי $a_{17} = -232$.

ב. מצאו את הערך של k .

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג–ד.

נתונה סדרה חדשה, B , שאיבריה מוגדרים כך: לכל n טבעי, $b_n = a_n + 24n + 17$.

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

ד. חשבו את הסכום: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{29}^2 - b_{30}^2$.

תשובות סופיות

סעיף א

(1) עולה: $k > 2$

(2) יורדת: $k < 2$

(3) קבועה: $k = 2$

סעיף ב

$k = -3$

סעיף ג

הוכחה: $b_n = 9n + 40$, ו־$b_{n+1} - b_n = 9$ קבוע

סעיף ד

-48465

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 2

2. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \ldots a_{3n}$ שבה $3n$ איברים, וההפרש שלה הוא d.

נסמן ב־ S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל־ 0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים $a_1 = 19 \cdot |d|$.

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה: $a_2, a_5, a_8, \ldots, a_{3n-4}$.

סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 36.

ד. מצאו את d.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכחה: $S_n^* = \frac{1}{3} S_{3n}$

סעיף ב

ההפרש שלילי.

סעיף ג

39 איברים.

סעיף ד

$d = -2$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 2

2. נתונה סדרה חשבונית A ובה $2n$ איברים (n הוא מספר טבעי).

d הוא הפרש הסדרה ($d \neq 0$).

מגדירים סדרה נוספת B באופן הזה: $b_m = \frac{a_m + a_{m+1}}{2}$.

בסדרה B יש $2n-1$ איברים.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה חשבונית, והביעו באמצעות d את ההפרש שלה.

נסמן ב־S_A את סכום האיברים בסדרה A.

נסמן ב־S_B את סכום האיברים בסדרה B.

ב. הוכיחו: $\frac{S_A}{2n} = \frac{S_B}{2n-1}$.

נתון: $S_A = \frac{66}{65} \cdot S_B$, $S_A = 220 + S_B$.

ג. **(1)** מצאו את n.

(2) מצאו את סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכחה: לכל m מתקיים $b_{m+1} - b_m = d$, ולכן B חשבונית וההפרש שלה הוא d.

סעיף ב

הוכחה: כל אחד מהיחסים שווה ל־$\frac{a_1+a_{2n}}{2}$.

סעיף ג (1)

$n = 33$

סעיף ג (2)

$a_{33} + a_{34} = 440$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 2

2. נתונות שתי סדרות הנדסיות אין־סופיות מתכנסות, A ו־ B, שכל איבריהן שונים מ־ 0.

האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A.

האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B.

משתי הסדרות ההנדסיות A ו־ B בונים סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת חדשה, שאיבריה הם:

$$\frac{a_1}{b_1}\ ,\ \frac{a_2}{b_2}\ ,\ \frac{a_3}{b_3}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{a_n}{b_n}\ ,\ \cdots$$

כל שלוש הסדרות, הסדרה A, הסדרה B והסדרה החדשה אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו־ q_B.

הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה.

ב. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1)–(2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.

(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.

המספרים c_1, c_2 ו־ c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.

נתון כי c_2 שווה ל־ $-c_1$, ומתקיים גם: $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{45}$.

ג. מצאו את c_1.

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל־ c_1,

ומתקיים גם: $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\ldots=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots}$

ד. מצאו את הערך של q_B.

תשובות סופיות

סעיף א

$q = \frac{q_A}{q_B}$

סעיף ב (1)

לא נכון:

$q_A < 0$ ו־$q_B > 0$, ולכן $\frac{q_A}{q_B} < 0$.

סעיף ב (2)

נכון.

סעיף ג

$c_1 = -\frac{1}{15}$

סעיף ד

$q_B = \frac{1}{5}$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית אין סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.

בונים סדרה חדשה B שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

ב. בנוגע <u>לכל אחד</u> מן ההיגדים (1)–(2) שלפניכם קבעו אם הוא נכון או לא נכון, ונמקו את קביעתכם.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת – בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

(2) אם הסדרה A יורדת – בהכרח היא גם מתכנסת.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{3}{5}$.

ג. מצאו את q.

נתון: n הוא מספר טבעי המקיים $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \ldots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{2059}{729}$.

ד. מצאו את n.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכחה: סדרה הנדסית שמנתה q^2.

סעיף ב (1)

נכונה.

סעיף ב (2)

לא נכונה.

דוגמה נגדית: $a_1 = -1,\ q = 2$

סעיף ג

$q = \frac{2}{3}$

סעיף ד

$n = 7$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה $10,935 \cdot a_1$.

נתון: $a_{2k-2} = 1,215$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון: $a_1 = 5$.

ג. **(1)** קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

(2) מצאו את k.

מן הסדרה A בונים את הסדרה האין־סופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי־זוגיים

כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם: $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ה. מצאו את סכום הסדרה C.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכחה: שני האגפים שווים ל-$a_1^2 q^{2n-1}$

סעיף ב

$q = 3$ או $q = -3$

סעיף ג (1)

הסדרה עולה, כי $q = 3$ ו-$a_1 = 5 > 0$

סעיף ג (2)

$k = 4$

סעיף ד

הוכחה: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{q}$ קבוע

סעיף ה

$S = -\frac{3}{20} = -0.15$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 2

2. סדרה I היא סדרה הנדסית אין־סופית שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ומנתה היא $9 \cdot r^2$.

נתון: $0 < r < \frac{1}{3}$.

בין כל שני איברים בסדרה I הִכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ומנתה היא q.

א. **(1)** הַביעו את q באמצעות r.

(2) הַסבירו מדוע שתי הסדרות I ו־II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ב. חשבו את q.

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 12.

ג. מִצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב־5 $(b_5, b_{10}, b_{15}, \ldots)$.

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$q = 3r$

סעיף א (2)

כי $0 < q = 3r < 1$

וגם $0 < 9r^2 < 1$

סעיף ב

$q = \frac{1}{3}$

סעיף ג

$\frac{48}{121} \approx 0.397$

סעיף ד

היחס הוא 2

סעיף ה

הוכחה: היחס שווה ל־$\frac{1-q}{q}$, ואינו תלוי ב־n.

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 2

2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ ומנתה היא q. כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה $\frac{1}{a_1} , \frac{1}{a_2} , \frac{1}{a_3} , \ldots$ היא סדרה הנדסית? הוכח את תשובתך.

ב. **(1)** מסמנים ב־S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A (n טבעי).

הוכח כי לכל n מתקיים: $\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}$

(2) נתון: $a_1 = 1 , q = 3$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה A גדול פי 6561 מן הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}$.

מצא את n.

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A.

איברי הסדרה B הם $b_1 , b_2 , b_3 , \ldots$.

נסמן ב־T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה B. נתון כי m הוא מספר טבעי אי־זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \ldots + \frac{1}{a_m}$

קבע אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכח את תשובתך.

תשובות סופיות

סעיף א

כן. זו סדרה הנדסית שמנתה $\frac{1}{q}$.

סעיף ב (1)

הוכחה: שני האגפים שווים ל־$\frac{q^n-1}{a_1(q-1)q^{n-1}}$.

סעיף ב (2)

$n = 9$

סעיף ג

הנוסחה נכונה: B הנדסית עם מנה $-q$, ומפעילים עליה את ב (1).

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 2

2. נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$, והפרשה d.

מסמנים ב־S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A, לכל n טבעי.

מגדירים סדרה נוספת, B, שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \ldots$. איברי הסדרה B מקיימים $b_n = S_{n+1} - S_n$, לכל n טבעי.

א. **(1)** האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמק.

(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A? נמק.

מסמנים ב־T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B, לכל n טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \ldots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d}.$$

נתון: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$T_5 = -20$

ג. חשב את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי־זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי שלם? נמק.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

כן. $b_n = a_{n+1}$, ולכן $b_{n+1} - b_n = d$ קבוע.

סעיף א (2)

לא. $b_1 = a_2 \neq a_1$, כי $d > 0$.

סעיף ב

הוכחה: בכל זוג $b_{2k-1} - b_{2k} = -d$, ולכן המונה שווה ל־$-d \cdot T_n$.

סעיף ג

$b_1 = -5,\ d = 0.5$

סעיף ד

14 איברים (הסכום אז הוא 14)

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.