# הסתברות – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י״א (שאלון 571) • 17 שאלות

## בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 3

**3.** כדי להתקבל לעבודה בחברה מסוימת על המועמדים לעבור שלושה שלבי קבלה זה אחר זה: מבחן א׳, מבחן ב׳ וריאיון אישי.

רק מועמד שעובר את מבחן א׳ ניגש למבחן ב׳, ורק מועמד שעובר את מבחן ב׳ ניגש לריאיון.

מועמד שעובר את כל שלושת השלבים מתקבל לעבודה.

ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א׳ היא $p$ $(0 < p < 1)$.

ההסתברות שמועמד שעבר את מבחן א׳ יעבור את מבחן ב׳ גדולה פי $2$ מן ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א׳.

ההסתברות שמועמד יתקבל לעבודה גדולה פי $3$ מן ההסתברות שמועמד יעבור את שני המבחנים ולא יעבור את הריאיון.

**א.** מצאו את ההסתברות שמועמד שעבר את שני המבחנים יעבור את הריאיון.

$94\%$ מן המועמדים לא מתקבלים לעבודה.

**ב.** מצאו את הערך של $p$.

**ג.** ידוע כי מועמד לא התקבל לעבודה. מהי ההסתברות שמועמד זה עבר את מבחן א׳?

מבין כל המועמדים שלא התקבלו לעבודה בוחרים באקראי $5$ מועמדים.

**ד.** מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם עברו את מבחן א׳?

### פתרון מלא

**סעיף א**

נסמן: $p$ – ההסתברות לעבור את מבחן א'. אז ההסתברות לעבור את מבחן ב' בהינתן שעבר את מבחן א' היא $2p$. נסמן ב־$r$ את ההסתברות לעבור את הראיון בהינתן שעבר את שני המבחנים.

לפי עץ ההסתברויות:

ההסתברות להתקבל לעבודה (לעבור את הכול):

$$p \cdot 2p \cdot r = 2p^2 r$$

ההסתברות לעבור את שני המבחנים ולהיכשל בראיון:

$$p \cdot 2p \cdot (1 - r) = 2p^2(1 - r)$$

נתון שההסתברות הראשונה גדולה פי 3 מן השנייה:

$$2p^2 r = 3 \cdot 2p^2(1 - r)$$

$$r = 3 - 3r$$

$$4r = 3 \;\Rightarrow\; r = 0.75$$

**תשובה:** $0.75$

**סעיף ב**

ההסתברות להתקבל היא $0.06$:

$$p \cdot 2p \cdot 0.75 = 1.5p^2$$

$$1.5p^2 = 0.06$$

$$p^2 = 0.04 \;\Rightarrow\; p = 0.2$$

($p$ היא הסתברות, ולכן $p > 0$.)

**תשובה:** $0.2$

**סעיף ג**

נסמן: $A$ – עבר את מבחן א'; $N$ – לא התקבל לעבודה.

$$P(N) = 1 - 0.06 = 0.94$$

מי שלא עבר את מבחן א' לא מתקבל. מבין אלה שעברו את מבחן א' (0.2), חלק מתקבלים (0.06) והשאר לא:

$$P(A \cap N) = 0.2 - 0.06 = 0.14$$

המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(A/N)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)}$$

נציב:

$$P(A/N) = \frac{0.14}{0.94}$$
$$= \frac{7}{47} \approx 0.149$$

**תשובה:** $\frac{7}{47} \approx 0.149$

**סעיף ד**

לכל אחד מ־5 המועמדים שלא התקבלו, ההסתברות שעבר את מבחן א' היא $p = \frac{7}{47}$ (סעיף ג), באופן בלתי תלוי. זו התפלגות ברנולי עם $n = 5$.

„לפחות שניים" – נחשב בעזרת המאורע המשלים (0 או 1):

$$P_5(0) = \left(\frac{40}{47}\right)^5 \approx 0.4465$$
$$P_5(1) = \binom{5}{1} \cdot \frac{7}{47} \cdot \left(\frac{40}{47}\right)^4 \approx 0.3907$$
$$P(\geq 2) = 1 - P_5(0) - P_5(1)$$
$$\approx 1 - 0.4465 - 0.3907 \approx 0.163$$

**תשובה:** $\approx 0.163$

## בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד א׳ • שאלה 3

**3.** בשק א׳ ובשק ב׳ יש כדורים משני סוגים: כדורים רכים וכדורים קשים.

בשק א׳ יש $10$ כדורים, מתוכם $4$ כדורים רכים והשאר קשים.

בשק ב׳ יש $12$ כדורים, מתוכם $x$ כדורים רכים והשאר קשים.

גלית בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לַשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).

נתון כי ההסתברות שגלית הוציאה שני כדורים רכים היא $\frac{41}{200}$.

**א.** מצאו את הערך של $x$.

**ב.** ידוע שגלית הוציאה שני כדורים מאותו הסוג. מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני כדורים מִשק א׳?

גלית מבצעת את התהליך המתואר לפניכם $4$ פעמים:

היא בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לַשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).

**ג.** מהי ההסתברות שגלית הוציאה בדיוק בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים?

**ד.** מהי ההסתברות שגלית הוציאה בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים ובשתיים מן הפעמים רק כדורים רכים?

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

בשני השקים ההוצאה היא עם החזרה, ולכן ההוצאות בלתי תלויות. בחירת השק: $\frac{1}{2}$ לכל שק.

- בשק א' ההסתברות לכדור רך: $\frac{4}{10} = 0.4$.
- בשק ב' ההסתברות לכדור רך: $\frac{x}{12}$.

ההסתברות להוציא שני כדורים רכים:

$$\frac{1}{2} \cdot 0.4^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{12}\right)^2 = \frac{41}{200}$$

$$0.08 + \frac{x^2}{288} = 0.205$$

$$\frac{x^2}{288} = 0.125 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

($x$ הוא מספר כדורים, ולכן $x = 6$ ולא $-6$.)

**תשובה:** $x = 6$

**סעיף ב**

בשק ב' ההסתברות לכדור רך היא $\frac{6}{12} = 0.5$ ולכדור קשה $0.5$.
בשק א' ההסתברות לכדור רך היא $0.4$ ולכדור קשה $0.6$.

נגדיר: $A$ – הכדורים הוצאו משק א', $B$ – שני הכדורים מאותו הסוג.

**משק א':**

שני רכים ושני קשים:

$$\frac{1}{2} \cdot 0.4^2 = 0.08$$

$\frac{1}{2} \cdot 0.6^2 = 0.18$
$P(A \cap B) = 0.08 + 0.18 = 0.26$

**משק ב':**
שני רכים ושני קשים:

$\frac{1}{2} \cdot 0.5^2 = 0.125$
$\frac{1}{2} \cdot 0.5^2 = 0.125$

יחד: $0.25$. לכן:

$P(B) = 0.26 + 0.25 = 0.51$

המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נציב:

$$P(A/B) = \frac{0.26}{0.51}$$
$$= \frac{26}{51}$$

**תשובה:** $\frac{26}{51} \approx 0.51$

**סעיף ג**
ההסתברות שבפעם אחת (תהליך אחד) גלית הוציאה רק כדורים קשים (שני כדורים קשים), לפי סעיף ב:
$p = 0.18 + 0.125 = 0.305$

ארבע הפעמים בלתי תלויות, ולכן לפי נוסחת ברנולי עם $n = 4,\ k = 2$:

$$P_4(2) = \binom{4}{2} \cdot 0.305^2 \cdot 0.695^2$$
$$= \frac{215{,}680{,}323}{800{,}000{,}000} \approx 0.27$$

**תשובה: בקירוב $0.27$; ערך מדויק:** $\binom{4}{2} \cdot 0.305^2 \cdot 0.695^2$

**סעיף ד**
בכל פעם: ההסתברות לשני קשים $0.305$, ולשני רכים $0.205$ (נתון).
צריך שבשתיים מהפעמים יצאו שני קשים ובשתיים האחרות שני רכים. מספר הדרכים לבחור באילו שתיים מתוך ארבע הפעמים יצאו הקשים הוא $\binom{4}{2} = 6$, ולכן:

$$P = 6 \cdot 0.305^2 \cdot 0.205^2$$
$$= \frac{18{,}765{,}003}{800{,}000{,}000} \approx 0.023$$

**תשובה: בקירוב $0.023$; ערך מדויק:** $6 \cdot 0.305^2 \cdot 0.205^2$

## בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 3

**3.** בשכבה י"א של תיכון עירוני גדול חלק מן התלמידים הם מדריכים בתנועת נוער והשאר אינם מדריכים.

בשכבה זו לחלק מן התלמידים יש רישיון נהיגה ולשאר אין רישיון נהיגה.

חצי מן התלמידים שיש להם רישיון נהיגה הם מדריכים בתנועת נוער.

אחוז התלמידים המדריכים מבין התלמידים שיש להם רישיון שווה לאחוז התלמידים שאין להם רישיון מבין התלמידים המדריכים.

בוחרים באקראי תלמיד מבין תלמידי השכבה.

ההסתברות שהתלמיד שנבחר הוא מדריך או שיש לו רישיון היא $0.45$.

**א.** מצאו כמה אחוזים מן התלמידים בשכבה זו הם מדריכים.

**ב.** בוחרים באקראי תלמיד מבין התלמידים שאין להם רישיון.

מהי ההסתברות שתלמיד זה הוא מדריך?

בוחרים באקראי $5$ תלמידים מבין התלמידים שאין להם רישיון.

**ג.** **(1)** מהי ההסתברות שנבחר יותר ממדריך אחד?

**(2)** ידוע שנבחר יותר ממדריך אחד. מהי ההסתברות כי מספר המדריכים שנבחרו הוא זוגי?

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

נסמן: $M$ – התלמיד מדריך, $L$ – לתלמיד יש רישיון. נסמן $P(L)=x$.

„חצי מבעלי הרישיון הם מדריכים": $P(M/L)=\frac{1}{2}$, ולכן:

$$P(M\cap L)=\tfrac{1}{2}x$$

האחוז השני שווה לראשון: $P(\overline{L}/M)=P(M/L)=\frac{1}{2}$. כלומר חצי מן המדריכים בלי רישיון וחצי עם רישיון:

$$P(M\cap\overline{L})=P(M\cap L)=\tfrac{1}{2}x$$
$$P(M)=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}x=x$$

„מדריך או בעל רישיון":

$$P(M\cup L)=P(L)+P(M\cap\overline{L})$$
$$x+\tfrac{1}{2}x=0.45\ \Rightarrow\ 1.5x=0.45$$
$$x=0.3$$

לכן $P(M)=0.3$.

| | $L$ | $\overline{L}$ | סה"כ |
|---|---|---|---|
| $M$ | 0.15 | 0.15 | 0.3 |
| $\overline{M}$ | 0.15 | 0.55 | 0.7 |
| סה"כ | 0.3 | 0.7 | 1 |

**תשובה: 30% מן התלמידים הם מדריכים**

**סעיף ב**

המאורעות כמו בסעיף א: $M$ – התלמיד מדריך, $\overline{L}$ – אין לתלמיד רישיון. בוחרים מבין התלמידים שאין להם רישיון, ולכן המבוקש הוא $P(M/\overline{L})$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(M/\overline{L}) = \frac{P(M \cap \overline{L})}{P(\overline{L})}$$

מהטבלה: $P(M \cap \overline{L}) = 0.15$, $P(\overline{L}) = 0.7$. נציב:

$$P(M/\overline{L}) = \frac{0.15}{0.7} = \frac{3}{14}$$

**תשובה:** $\frac{3}{14} \approx 0.214$

**סעיף ג (1)**

השכבה גדולה, ולכן הבחירות בלתי תלויות: ניסוי ברנולי עם $n = 5$ ו־$p = \frac{3}{14}$ (ההסתברות שתלמיד בלי רישיון הוא מדריך), $1 - p = \frac{11}{14}$.

„יותר ממדריך אחד" = לא 0 ולא 1:

$$P = 1 - P_5(0) - P_5(1)$$

$$P_5(0) = \left(\tfrac{11}{14}\right)^5 \approx 0.2995$$

$$P_5(1) = 5 \cdot \tfrac{3}{14} \cdot \left(\tfrac{11}{14}\right)^4 \approx 0.4083$$

$$P = 1 - 0.2995 - 0.4083$$

$$= \frac{78579}{268912} \approx 0.292$$

**תשובה:** $\frac{78579}{268912} \approx 0.292$

**סעיף ג (2)**

נסמן: $A$ – מספר המדריכים שנבחרו זוגי, $B$ – נבחר יותר ממדריך אחד. מבין $2, 3, 4, 5$ הזוגיים הם 2 ו־4:

$$P(A \cap B) = P_5(2) + P_5(4)$$

$$P_5(2) = \binom{5}{2}\left(\tfrac{3}{14}\right)^2\left(\tfrac{11}{14}\right)^3 \approx 0.2227$$

$$P_5(4) = \binom{5}{4}\left(\tfrac{3}{14}\right)^4 \cdot \tfrac{11}{14} \approx 0.0083$$

המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נציב:

$$P(A/B) = \frac{0.2310}{0.2922}$$

$$= \frac{13805}{17462} \approx 0.791$$

**תשובה:** $\frac{13805}{17462} \approx 0.791$

## בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 3

**3.** בבית אריזה גדול אורזים שני סוגי פירות בלבד: לימונים ותפוזים.

חלק מן הפירות מיועדים לייצוא והשאר אינם מיועדים לייצוא.

ההסתברות לבחור באקראי שני תפוזים מבין כל הפירות בבית האריזה היא $0.4096$.

בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

**א.** מהי ההסתברות שנבחר לימון?

ההסתברות לבחור באקראי תפוז מבין הפירות שמיועדים לייצוא היא $\frac{3}{5}$.

ההסתברות לבחור באקראי לימון מבין הפירות שאינם מיועדים לייצוא היא $\frac{4}{15}$.

בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

**ב.** מהי ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא?

בוחרים באקראי שני פירות מבין כל הפירות בבית האריזה.

**ג.** ידוע שנבחרו שני לימונים. מהי ההסתברות שאחד מהם מיועד לייצוא והאחר אינו מיועד לייצוא?

בוחרים באקראי $4$ פירות מבין כל הפירות בבית האריזה. ידוע שלפחות אחד מהם מיועד לייצוא.

**ד.** מהי ההסתברות שלכל היותר $3$ מבין הפירות שנבחרו מיועדים לייצוא?

### פתרון מלא

**סעיף א**

נסמן ב־$p$ את ההסתברות לבחור תפוז. בית האריזה גדול, ולכן בחירות של פירות שונים הן בלתי תלויות (ההסתברות כמעט אינה משתנה מבחירה לבחירה):

$$p \cdot p = 0.4096$$
$$p = \sqrt{0.4096} = 0.64$$

יש רק שני סוגי פירות, ולכן ההסתברות לבחור לימון:

$$1 - 0.64 = 0.36$$

**תשובה:** $0.36$

**סעיף ב**

נסמן: $A$ – נבחר תפוז, $B$ – נבחר פרי המיועד לייצוא, ו־$P(B) = x$.

נתון:

$$P(A/B) = \frac{3}{5}, \qquad P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{4}{15}$$

ולכן תפוז מבין הפירות שאינם לייצוא:

$$P(A/\bar{B}) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$+P(\bar{B})\cdot P(A/\bar{B})$$
$$0.64=\frac{3}{5}x+\frac{11}{15}(1-x)$$
$$0.64=\frac{11}{15}-\frac{2}{15}x$$
$$\frac{2}{15}x=\frac{11}{15}-0.64=\frac{1.4}{15}$$
$$x=0.7$$

ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא היא $0.7$.

**תשובה:** $0.7$

**סעיף ג**

המאורעות כמו בסעיף ב: $A$ – נבחר תפוז ($\bar{A}$ – לימון), $B$ – נבחר פרי המיועד לייצוא.

נמצא איזה חלק מהלימונים מיועד לייצוא. לימון שאינו לייצוא:

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{B})\cdot P(\bar{A}/\bar{B})$$
$$=0.3\cdot\frac{4}{15}=0.08$$

לימון לייצוא:

$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})-0.08$$
$$=0.36-0.08=0.28$$

ולכן, בהינתן שנבחר לימון ($\bar{A}$), ההסתברות שהוא לייצוא ($B$) היא $P(B/\bar{A})$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(B/\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}$$
$$=\frac{0.28}{0.36}=\frac{7}{9}$$

וההסתברות שאינו לייצוא: $\frac{2}{9}$.

ידוע שנבחרו שני לימונים. כל אחד מהם (באופן בלתי תלוי) מיועד לייצוא בהסתברות $\frac{7}{9}$. אחד לייצוא והאחר לא – בשני סדרים אפשריים:

$$2\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{28}{81}\approx 0.346$$

**תשובה:** $\frac{28}{81}\approx 0.346$

**סעיף ד**

כל פרי מיועד לייצוא בהסתברות $0.7$, באופן בלתי תלוי. נסמן ב־$X$ את מספר הפירות המיועדים לייצוא מבין 4 – התפלגות בינומית, $n=4$, $p=0.7$:

$$P_4(0)=0.3^4=0.0081$$
$$P_4(4)=0.7^4=0.2401$$

לפחות אחד לייצוא:

$$P(X\geq 1)=1-0.0081=0.9919$$

נסמן: $C$ – לכל היותר 3 מהפירות מיועדים לייצוא ($X \leq 3$), $D$ – לפחות פרי אחד מיועד לייצוא ($X \geq 1$).
ידוע ש־$D$ התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(C/D)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$$

$C \cap D$ – לכל היותר 3 וגם לפחות אחד לייצוא:

$$P(C \cap D) = P(1 \leq X \leq 3)$$
$$= 1 - 0.0081 - 0.2401 = 0.7518$$

$P(D) = 0.9919$. נציב:

$$P(C/D) = \frac{0.7518}{0.9919}$$
$$= \frac{1074}{1417} \approx 0.758$$

**תשובה:** $\frac{1074}{1417} \approx 0.758$

## בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 3

**3.** במדינה גדולה התקיימו בחירות. המצביעים בבחירות אלה יכולים להצביע למפלגה א' או למפלגה ב' בלבד.

נסמן ב־ $P$ את ההסתברות שמצביע שנבחר באקראי הצביע למפלגה א' $(0 < P < 1)$.

בוחרים באקראי $3$ מצביעים.

נתון כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם הצביע למפלגה א' גדולה פי $2$ מן ההסתברות ששלושתם הצביעו למפלגה ב'.

**א.** מצאו את הערך של $P$.

בוחרים באקראי $4$ מצביעים.

**ב.** ידוע כי ארבעתם הצביעו לאותה המפלגה. מהי ההסתברות שהם הצביעו למפלגה א'?

חלק מן המצביעים הם מבוגרים והשאר צעירים.

נתון כי $40\%$ מן המצביעים המבוגרים הצביעו למפלגה ב' ו־ $15\%$ מן המצביעים הצעירים הצביעו למפלגה א'.

**ג.** מהי ההסתברות לבחור באקראי מצביע צעיר אחד מבין כל המצביעים?

לאחר הבחירות נערך סקר טלפוני בקרב המצביעים. דני, אחד הסוקרים, התקשר באקראי למצביעים צעירים בלבד. הוא התקשר אליהם בזה אחר זה והפסיק מייד לאחר שריאיין צעיר אחד שהצביע למפלגה אחת וצעיר נוסף שהצביע למפלגה האחרת.

**ד.** מהי ההסתברות שדני התקשר ל־ $5$ צעירים בדיוק?

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

כל מצביע מצביע למפלגה א' בהסתברות $P$ ולמפלגה ב' בהסתברות $1-P$, באופן בלתי תלוי. זהו ניסוי ברנולי עם $n=3$.

ההסתברות שבדיוק אחד הצביע למפלגה א':

$$P_3(1)=\binom{3}{1}P(1-P)^2$$
$$=3P(1-P)^2$$

ההסתברות ששלושתם הצביעו למפלגה ב':

$$(1-P)^3$$

לפי הנתון:

$$3P(1-P)^2=2(1-P)^3$$

נחלק את שני האגפים ב־$(1-P)^2$. מותר לחלק, כי $P\neq 1$:

$$3P=2(1-P)$$
$$5P=2 \;\Rightarrow\; P=\frac{2}{5}$$

**תשובה:** $P=\frac{2}{5}=0.4$

**סעיף ב**

נגדיר מאורעות: $A$ – ארבעתם הצביעו למפלגה א'; $E$ – ארבעתם הצביעו לאותה מפלגה.

$$P(A) = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$$

$$P(E) = \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \left(\frac{3}{5}\right)^4$$

$$= \frac{16+81}{625} = \frac{97}{625}$$

ידוע ש־$E$ התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(A/E)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

המאורע $A$ מוכל ב־$E$, ולכן:

$$P(A \cap E) = P(A) = \frac{16}{625}$$

נציב:

$$P(A/E) = \frac{\frac{16}{625}}{\frac{97}{625}}$$

$$= \frac{16}{97} \approx 0.165$$

**תשובה:** $\frac{16}{97} \approx 0.165$

**סעיף ג**

נסמן ב־$x$ את ההסתברות לבחור מצביע צעיר. אז ההסתברות לבחור מצביע מבוגר היא $1 - x$.

| | **מפלגה א'** | **מפלגה ב'** |
|---|---|---|
| מבוגר $(1-x)$ | $0.6$ | $0.4$ |
| צעיר $(x)$ | $0.15$ | $0.85$ |

לפי נוסחת ההסתברות השלמה, ההסתברות להצביע למפלגה א' היא $P = 0.4$:

$$0.6(1-x) + 0.15x = 0.4$$

$$0.6 - 0.45x = 0.4$$

$$0.45x = 0.2$$

$$x = \frac{0.2}{0.45} = \frac{4}{9}$$

**תשובה:** $\frac{4}{9} \approx 0.444$

**סעיף ד**

דני מתקשר רק לצעירים: כל צעיר הצביע למפלגה א' בהסתברות $0.15$ ולמפלגה ב' בהסתברות $0.85$.

דני מפסיק מייד כשיש לו צעיר מכל מפלגה. הוא התקשר ל־5 צעירים בדיוק אם ורק אם ארבעת הראשונים הצביעו לאותה מפלגה והחמישי הצביע למפלגה האחרת.

ארבעה ראשונים למפלגה א' והחמישי למפלגה ב':

$$0.15^4 \cdot 0.85$$

ארבעה ראשונים למפלגה ב' והחמישי למפלגה א':

$$0.85^4 \cdot 0.15$$

שני המקרים זרים, ולכן:

$$P = 0.15^4 \cdot 0.85 + 0.85^4 \cdot 0.15$$
$$= \frac{12597}{160000} \approx 0.0787$$

**תשובה:** $\frac{12597}{160000} \approx 0.0787$

## בגרות חורף תשפ״ה (2025) • שאלה 3

**3.** בכד א׳ יש $10$ כדורים אדומים ו־ $15$ כדורים צהובים, ובכד ב׳ יש רק כדורים אדומים.

דנה בוחרת באקראי כד ומוציאה ממנו באקראי כדור.

אם הכדור צהוב, היא מוציאה באקראי כדור שני מאותו הכד (הוצאה ללא החזרה).

אם הכדור הראשון אדום, היא מחזירה את הכדור לכד ושוב מוציאה באקראי כדור מאותו הכד.

**א.** ידוע שדנה הוציאה שני כדורים באותו הצבע. מהי ההסתברות ששניהם צהובים?

דנה מחזירה לַכד את הכדורים שהוציאה.

יעל מבצעת את התהליך הזה:

היא בוחרת באקראי כד, מוציאה ממנו באקראי כדור אחד ומחזירה אותו לַכד.

יעל חוזרת על תהליך זה עד שהיא מוציאה כדור אדום, מחזירה אותו לַכד ומפסיקה להוציא כדורים.

**ב.** מצאו את ההסתברות שיעל ביצעה תהליך זה $6$ פעמים בדיוק.

העבירו חלק מן הכדורים מכד ב׳ לכד א׳.

לאחר מכן בחרו באקראי כד והוציאו ממנו באקראי כדור אחד.

נתון כי לאחר ההעברה ההסתברות שהכדור שהוציאו היה אדום היא $\frac{19}{24}$.

**ג.** האם ייתכן שלפני ההעברה היו בכד ב׳ $10$ כדורים? נמקו את תשובתכם.

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

בכד א׳ יש 25 כדורים: 10 אדומים ו־15 צהובים. בכד ב׳ כל הכדורים אדומים. בחירת הכד היא בהסתברות $\frac{1}{2}$ לכל כד.

נסמן: $A$ – שני הכדורים צהובים, $R$ – שני הכדורים אדומים, $B$ – שני הכדורים באותו צבע. ידוע ש־$B$ התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

**שני כדורים צהובים** – אפשרי רק מכד א׳. הכדור הראשון צהוב, ואז מוציאים כדור שני בלי החזרה (נשארו 24 כדורים, מהם 14 צהובים):

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24}=\frac{7}{40}$$

**שני כדורים אדומים** – הכדור הראשון אדום, מחזירים אותו ומוציאים שוב מאותו כד:

- מכד א׳: $\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{25}\cdot\frac{10}{25}=\frac{2}{25}$
- מכד ב׳: $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$

$$P(R)=\frac{2}{25}+\frac{1}{2}=\frac{29}{50}$$

באותו צבע = שניהם צהובים או שניהם אדומים:

$$P(B) = \frac{7}{40} + \frac{29}{50}$$
$$= \frac{35}{200} + \frac{116}{200} = \frac{151}{200}$$

שני כדורים צהובים הם בוודאי באותו צבע: $A$ מוכל ב־$B$, ולכן $P(A \cap B) = P(A)$. נציב:

$$P(A/B) = \frac{\frac{35}{200}}{\frac{151}{200}}$$
$$= \frac{35}{151} \approx 0.232$$

**תשובה:** $\frac{35}{151} \approx 0.232$

**סעיף ב**

בכל ביצוע של התהליך יעל בוחרת כד ומוציאה כדור אחד, ומחזירה אותו – כך שבכל פעם ההסתברויות זהות.
ההסתברות להוציא כדור אדום בביצוע אחד:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{25} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$$

ולכן ההסתברות לכדור צהוב: $1 - 0.7 = 0.3$.

יעל מבצעת את התהליך 6 פעמים בדיוק אם ב־5 הפעמים הראשונות הוציאה כדור צהוב, ובפעם השישית – אדום:

$$0.3^5 \cdot 0.7 = 0.00243 \cdot 0.7 = 0.001701$$

**תשובה:** $0.3^5 \cdot 0.7 = 0.001701$

**סעיף ג**

נניח שבכד ב׳ היו 10 כדורים, והעבירו $t$ מהם (כולם אדומים) לכד א׳. אחרי ההעברה:

- בכד א׳: $10 + t$ אדומים ו־15 צהובים, סך הכול $25 + t$.
- בכד ב׳ נשארו כדורים, וכולם אדומים.

ההסתברות להוציא כדור אדום:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{10 + t}{25 + t} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{19}{24}$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{10 + t}{25 + t} = \frac{19}{24} - \frac{12}{24} = \frac{7}{24}$$
$$\frac{10 + t}{25 + t} = \frac{7}{12}$$
$$12(10 + t) = 7(25 + t)$$
$$120 + 12t = 175 + 7t$$
$$5t = 55 \;\Rightarrow\; t = 11$$

כדי לקבל הסתברות $\frac{19}{24}$ צריך להעביר 11 כדורים, אבל אם בכד ב׳ היו רק 10 כדורים אי אפשר להעביר 11 (וגם צריך שיישארו בו כדורים). לכן **לא ייתכן** שלפני ההעברה היו בכד ב׳ 10 כדורים.
**תשובה: לא. היה צריך להעביר 11 כדורים, אבל בכד ב׳ יש רק 10.**

## בגרות קיץ תשפ״ד (2024) – מועד ב׳ • שאלה 3

**3.** במחקר שנעשה בקרב תלמידים בבית ספר מסוים נבדק הקשר בין חברות בתנועת נוער ובין התנדבות בקהילה.

$80\%$ מן החברים בתנועת נוער מתנדבים בקהילה.

בוחרים באקראי $5$ תלמידים שחברים בתנועת נוער (הוצאה עם החזרה).

**א.** מהי ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתנדב ולפחות תלמיד אחד שאינו מתנדב?

נתון כי $55\%$ מן התלמידים אינם חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים, ו־$\frac{1}{12}$ מן התלמידים שאינם חברים בתנועת נוער מתנדבים.

**ב.** כמה אחוזים מן התלמידים חברים בתנועת נוער?

במחקר השתתפו $100$ תלמידים סך הכול.

**ג.** כמה מן התלמידים חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים?

**ד.** בוחרים באקראי $3$ מן התלמידים שאינם מתנדבים (הוצאה ללא החזרה).

**(1)** מהי ההסתברות שהתלמיד הראשון שנבחר חבר בתנועת נוער ושני התלמידים שנבחרו אחריו אינם חברים בתנועת נוער?

**(2)** מהי ההסתברות שאחד מן התלמידים שנבחרו חבר בתנועת נוער והשניים האחרים אינם חברים בתנועת נוער אם ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר אינו חבר בתנועת נוער?

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

בכל בחירה ההסתברות שחבר המועדון מתנדב היא $0.8$, וההסתברות שאינו מתנדב $0.2$. הבחירות בלתי תלויות (עם החזרה) – התפלגות ברנולי עם $n = 5$.

„לפחות אחד מתנדב ולפחות אחד לא מתנדב" = לא כולם מתנדבים וגם לא כולם לא מתנדבים:

$$P = 1 - P_5(5) - P_5(0)$$
$$= 1 - 0.8^5 - 0.2^5$$
$$= 1 - 0.32768 - 0.00032 = 0.672$$

**תשובה:** $0.672$

**סעיף ב**

נסמן ב־$m$ את ההסתברות שתלמיד הוא חבר במועדון. מבין מי שאינם חברים, $\frac{1}{12}$ מתנדבים, ולכן $\frac{11}{12}$ אינם מתנדבים:

$$P(\text{לא חבר ולא מתנדב}) = (1-m)\cdot\frac{11}{12}$$
$$(1-m)\cdot\frac{11}{12} = 0.55$$
$$1-m = 0.6 \;\Rightarrow\; m = 0.4$$

**תשובה: 40% מהתלמידים.**

**סעיף ג**

מבין 100 התלמידים, $40$ חברים במועדון (סעיף ב). מבין החברים, $20\%$ אינם מתנדבים:

$$40 \cdot 0.2 = 8$$

**תשובה: 8 תלמידים.**

**סעיף ד (1)**

התלמידים שאינם מתנדבים: 8 חברי מועדון (סעיף ג) ו־55 שאינם חברים (55% מ־100). סך הכול 63.
בוחרים 3 בלי החזרה. הראשון חבר מועדון, והשניים הבאים אינם חברים:

$$P = \frac{8}{63} \cdot \frac{55}{62} \cdot \frac{54}{61}$$
$$= \frac{1320}{13237} \approx 0.0997$$

**תשובה:** $\frac{1320}{13237} \approx 0.0997$

**סעיף ד (2)**

נסמן: $A$ – בדיוק אחד מהשלושה חבר מועדון, $B$ – הראשון שנבחר אינו חבר מועדון. ידוע ש־$B$ התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

בוחרים מבין 63 התלמידים שאינם מתנדבים: 8 חברי מועדון ו־55 שאינם חברים (סעיף ד (1)).

$$P(B) = \frac{55}{63}$$

$A \cap B$: הראשון אינו חבר, ובדיוק אחד מהשניים הבאים חבר – השני או השלישי:

$$P(A \cap B) = \frac{55}{63} \cdot \left( \frac{8}{62} \cdot \frac{54}{61} \right.$$
$$\left. + \frac{54}{62} \cdot \frac{8}{61} \right)$$
$$= \frac{55}{63} \cdot \frac{864}{3782}$$

נציב:

$$P(A/B) = \frac{\frac{55}{63} \cdot \frac{864}{3782}}{\frac{55}{63}}$$
$$= \frac{864}{3782} = \frac{432}{1891} \approx 0.228$$

(הערה: אפשר לקצר במרחב מדגם מצומצם – בהינתן $B$ נשארו 62 תלמידים, 8 חברים ו־54 שאינם חברים, ומחשבים ישר את ההסתברות שבדיוק אחד מהשניים הבאים חבר.)

**תשובה:** $\frac{432}{1891} \approx 0.228$

## בגרות קיץ תשפ״ד (2024) – מועד א׳ • שאלה 3

**3.** בחידון יש $5$ שאלות. ההסתברות לענות נכון על כל אחת מן השאלות היא $P$.

ידוע כי ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על $4$ שאלות לכל היותר היא $0.83193$.

**א.** מצאו את $P$.

**ב.** מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על $3$ שאלות בדיוק.

מספר הנקודות הניתן לכל שאלה זהה למספר השאלה. כלומר מתמודד שענה נכון על שאלה 1, מקבל נקודה אחת. מתמודד שענה נכון על שאלה $2$ מקבל שתי נקודות, וכן הלאה.

**ג.** מצאו את ההסתברות שמתמודד יצבור $14$ נקודות לפחות.

**ד.** מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יצבור $6$ נקודות בדיוק.

**ה.** ידוע כי אחינועם ענתה נכון על $3$ שאלות בדיוק. מצאו את ההסתברות שהיא צברה $6$ נקודות בדיוק.

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

מספר התשובות הנכונות מתפלג בינומית עם $n = 5$ והסתברות הצלחה $P$. נסמן ב־$A$ את המאורע „ענתה נכון על 4 שאלות לכל היותר". המאורע המשלים הוא „ענתה נכון על כל 5 השאלות", ולכן:

$$P(A) = 1 - P^5 = 0.83193$$

$$P^5 = 0.16807$$

$$P = \sqrt[5]{0.16807} = 0.7$$

**תשובה:** $P = 0.7$

**סעיף ב**

לפי נוסחת ברנולי עם $n = 5,\ k = 3,\ p = 0.7$:

$$P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2$$

$$= 10 \cdot 0.343 \cdot 0.09 = 0.3087$$

**תשובה:** $0.3087$

**סעיף ג**

הניקוד המרבי הוא $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. ניקוד של 14 לפחות מתקבל רק ב־2 מקרים:

- 15 נקודות – כל 5 התשובות נכונות: $0.7^5$.
- 14 נקודות – כל התשובות נכונות חוץ משאלה 1: $0.3 \cdot 0.7^4$.

$$P = 0.7^5 + 0.3 \cdot 0.7^4$$

$$= 0.16807 + 0.07203 = 0.2401$$

**תשובה:** $0.2401$

**סעיף ד**

נמצא את כל הצירופים של מספרי שאלות שסכומם 6:

- שתי שאלות: $\{1,5\}$ או $\{2,4\}$ – כל אחד בהסתברות $0.7^2 \cdot 0.3^3$.
- שלוש שאלות: $\{1,2,3\}$ – בהסתברות $0.7^3 \cdot 0.3^2$.

(אין שאלה אחת שמזכה ב־6 נקודות, וארבע שאלות מזכות לפחות ב־$1+2+3+4=10$.)

$$P = 2 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^3 + 0.7^3 \cdot 0.3^2$$
$$= 0.02646 + 0.03087 = 0.05733$$

**תשובה:** $0.05733$

**סעיף ה**

נגדיר: $A$ – אחינועם צברה בדיוק 6 נקודות, $B$ – ענתה נכון על 3 שאלות בדיוק. ידוע ש־$B$ התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

3 תשובות נכונות בדיוק מתוך 5 – לפי נוסחת ברנולי:

$$P(B) = \binom{5}{3} \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2 = 0.3087$$

עם 3 תשובות נכונות, 6 נקודות מתקבלות רק מהצירוף $\{1,2,3\}$, ולכן:

$$P(A \cap B) = 0.7^3 \cdot 0.3^2 = 0.03087$$

נציב:

$$P(A/B) = \frac{0.03087}{0.3087} = 0.1$$

(אפשר גם לנמק: בהינתן 3 תשובות נכונות, כל אחד מ־$\binom{5}{3} = 10$ הצירופים שווה הסתברות, ורק אחד מהם נותן 6 נקודות.)

**תשובה:** $0.1$

## בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 3

**3.** ביישוב מסוים הוחלט לערוך סקר בנוגע להקמת פארק ביישוב.

בסקר השתתפו תושבים מבוגרים וצעירים בלבד.

כל אחד מן התושבים שהשתתף בסקר כתב אם הוא תומך בהקמת הפארק או מתנגד להקמתו (לא היו נמנעים).

כל התושבים המבוגרים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.

בחרו באקראי בתושב אחד מבין התושבים שהשתתפו בסקר.

נסמן ב־ $p$ את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר.

נסמן ב־ $k$ את ההסתברות שהתושב שנבחר תמך בהקמת הפארק.

**א.** הביעו באמצעות $p$ ו־ $k$ את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק.

מחצית מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.

$\frac{3}{7}$ מן המשתתפים בסקר שתמכו בהקמת הפארק היו צעירים.

**ב.** מצאו את $p$ ואת $k$.

יוסי, כתב חדשות מקומי, ריאיין באקראי $6$ מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר.

**ג.** מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם תמך בהקמת הפארק ולפחות אחד מהם התנגד להקמת הפארק?

לאחר מכן ריאיין יוסי באקראי, בזה אחר זה, $5$ תושבים שהשתתפו בסקר.

**ד.** מהי ההסתברות שבדיוק $3$ מן המרואיינים האלה היו צעירים, ושהמרואיין האחרון מהם היה צעיר?

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

נסמן: $Y$ – התושב צעיר, $S$ – התושב תמך. $P(Y)=p$, $P(S)=k$.

כל המבוגרים תמכו, ולכן $P(\overline{Y}\cap S)=P(\overline{Y})=1-p$. התומכים הם מבוגרים או צעירים תומכים:

$$P(S)=P(\overline{Y}\cap S)+P(Y\cap S)$$
$$k=1-p+P(Y\cap S)$$
$$P(Y\cap S)=p+k-1$$

**תשובה:** $P(Y\cap S)=p+k-1$

**סעיף ב**

„מחצית מן הצעירים תמכו": $P(S/Y)=\frac{1}{2}$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(S/Y)=\frac{P(Y\cap S)}{P(Y)}=\frac{P(Y\cap S)}{p}=\frac{1}{2}$$
$$P(Y\cap S)=\tfrac{1}{2}p$$

„$\frac{3}{7}$ מן התומכים היו צעירים": $P(Y/S)=\frac{3}{7}$:

$$P(Y/S)=\frac{P(Y\cap S)}{P(S)}=\frac{P(Y\cap S)}{k}=\frac{3}{7}$$
$$P(Y\cap S)=\tfrac{3}{7}k$$

נשווה לביטוי מסעיף א:

$$p+k-1=\frac{1}{2}p \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}p+k=1$$
$$\frac{1}{2}p=\frac{3}{7}k \;\Rightarrow\; \frac{3}{7}k+k=1$$
$$\frac{10}{7}k=1 \;\Rightarrow\; k=0.7$$
$$p=2\cdot\frac{3}{7}\cdot 0.7=0.6$$

**תשובה:** $p=0.6$, $k=0.7$

**סעיף ג**

כל צעיר תומך בהסתברות $\frac{1}{2}$, באופן בלתי תלוי – ניסוי ברנולי, $n=6$, $p=\frac{1}{2}$.

המאורע המשלים: כל השישה תמכו, או כל השישה התנגדו:

$$P=1-P_6(6)-P_6(0)$$
$$=1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^6-\left(\tfrac{1}{2}\right)^6=1-\frac{2}{64}$$
$$=\frac{31}{32}\approx 0.969$$

**תשובה:** $\frac{31}{32}\approx 0.969$

**סעיף ד**

כל מרואיין צעיר בהסתברות $0.6$, באופן בלתי תלוי. צריך שהמרואיין החמישי יהיה צעיר, ובין ארבעת הראשונים בדיוק 2 צעירים:

$$P=P_4(2)\cdot 0.6$$
$$=\binom{4}{2}\cdot 0.6^2\cdot 0.4^2\cdot 0.6$$
$$=6\cdot 0.36\cdot 0.16\cdot 0.6$$
$$=0.20736=\frac{648}{3125}$$

**תשובה:** $\frac{648}{3125}=0.20736$

## בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 3

**3.** עיתון יומי המופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל ביתם בכל יום עד השעה 6:00.

מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן.

כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא.

מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא $\frac{3}{4}$, וההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא $\frac{5}{9}$.

נסמן ב־ $p$ את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה.

בוחרים באקראי אחד מן המנויים.

**א.** הביעו באמצעות $p$ את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי $1.5$ ממספר המנויים שגרים בתל אביב וקיבלו את העיתון בזמן.

**ב.** כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מנויים.

**ג.** מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

באותו היום התקשרו למערכת העיתון $6$ מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

**ד.** מהי ההסתברות שלכל היותר $4$ מהם גרים בחיפה?

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

נגדיר מאורעות:

- $A$ – המנוי גר בחיפה, ו־$\bar{A}$ – המנוי גר בתל אביב.
- $B$ – המנוי קיבל את העיתון בזמן.

נתון:

$$P(A) = p$$
$$P(B/A) = \frac{3}{4}$$
$$P(A/B) = \frac{5}{9}$$

**חיפה וקיבל בזמן:**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{3}{4}p$$

**ההסתברות לקבל בזמן:** לפי הגדרת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$\frac{5}{9} = \frac{0.75p}{P(B)} \;\Rightarrow\; P(B) = 1.35p$$

**תל אביב וקיבל בזמן:**

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 1.35p - 0.75p = 0.6p$$

**תשובה:** $0.6p$

**סעיף ב**

נתון שמספר המנויים בתל אביב שלא קיבלו בזמן גדול פי 1.5 ממספר המנויים בתל אביב שקיבלו בזמן, ולכן גם ההסתברויות מקיימות:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1.5 \cdot 0.6p = 0.9p$$

כל המנויים בתל אביב:

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$
$$1 - p = 0.6p + 0.9p = 1.5p$$
$$2.5p = 1 \;\Rightarrow\; p = 0.4$$

ההסתברות לקבל בזמן:

$$P(B) = 1.35 \cdot 0.4 = 0.54$$

54% מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן.

**תשובה: 54%**

**סעיף ג**

נשלים טבלת הסתברויות עבור $p = 0.4$:

| | **חיפה** $A$ | **תל אביב** $\bar{A}$ | **סה"כ** |
|---|---|---|---|
| בזמן $B$ | 0.3 | 0.24 | 0.54 |
| לא בזמן $\bar{B}$ | 0.1 | 0.36 | 0.46 |
| סה"כ | 0.4 | 0.6 | 1 |

המאורעות כמו בסעיף א: $A$ – המנוי גר בחיפה ($\bar{A}$ – בתל אביב), $\bar{B}$ – המנוי לא קיבל את העיתון בזמן. בוחרים מבין המנויים שלא קיבלו בזמן, ולכן צריך את ההסתברויות המותנות $P(\bar{A}/\bar{B})$ ו־$P(A/\bar{B})$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$
$$= \frac{0.36}{0.46} = \frac{18}{23}$$
$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$
$$= \frac{0.1}{0.46} = \frac{5}{23}$$

הראשון מתל אביב והשני מחיפה (הבחירות בלתי תלויות):

$$\frac{18}{23} \cdot \frac{5}{23} = \frac{90}{529} \approx 0.170$$

**תשובה:** $\frac{90}{529} \approx 0.170$

**סעיף ד**

כל 6 המנויים שהתקשרו לא קיבלו את העיתון בזמן. לפי סעיף ג, כל אחד מהם גר בחיפה בהסתברות $\frac{5}{23}$, באופן בלתי תלוי.

זו התפלגות ברנולי עם $n = 6$ ו־$p = \frac{5}{23}$.
המאורע "לכל היותר 4 מחיפה" משלים את המאורע "5 או 6 מחיפה":

$$P_6(5) = \binom{6}{5} \left(\frac{5}{23}\right)^5 \cdot \frac{18}{23} \approx 0.00228$$

$$P_6(6) = \left(\frac{5}{23}\right)^6 \approx 0.0001$$

$$1 - P_6(5) - P_6(6) \approx 0.9976$$

**תשובה:** $\approx 0.9976$

## בגרות קיץ תשפ״ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 3

**3.** כדי להתקבל ללימודים בפקולטה מסוימת מועמד צריך להיבחן בשני מבחנים.

ההסתברות שמועמד יצליח במבחן הראשון היא $P$ $(P > 0.5)$.

אם המועמד הצליח במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא $P + 0.3$ .

אם המועמד נכשל במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא $P - 0.1$ .

נתון כי ההסתברות שהמועמד יצליח בדיוק במבחן אחד מבין השניים היא $\frac{9}{40}$ .

**א.** מצאו את $P$ .

כדי להתקבל ללימודים בפקולטה המועמד צריך להצליח בשני המבחנים.

**ב.** ידוע כי מועמד הצליח לפחות במבחן אחד. מהי ההסתברות שהוא התקבל לפקולטה?

שלושה מועמדים נבחנו בשני המבחנים.

**ג.** מהי ההסתברות ששני מועמדים מבין השלושה התקבלו לפקולטה ואחד מהם נכשל בשני המבחנים?

$n$ מועמדים נבחנו בשני המבחנים $(n \geq 2)$.

**ד.** הביעו באמצעות $n$ את ההסתברות שלפחות מועמד אחד התקבל לפקולטה וגם לפחות מועמד אחד לא התקבל לפקולטה.

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

נסמן: מ – הצלחה, נ – כישלון. ארבעת המקרים (מבחן ראשון – מבחן שני):

| מקרה | הסתברות |
|---|---|
| מ – מ | $P(P+0.3)$ |
| מ – נ | $P(0.7-P)$ |
| נ – מ | $(1-P)(P-0.1)$ |
| נ – נ | $(1-P)(1.1-P)$ |

הצלחה בדיוק במבחן אחד – המקרים "מ – נ" ו"נ – מ":

$$P(0.7-P)+(1-P)(P-0.1)=\frac{9}{40}$$

נפתח סוגריים:

$$0.7P-P^2+P-0.1-P^2+0.1P$$
$$=0.225$$
$$-2P^2+1.8P-0.325=0$$
$$P^2-0.9P+0.1625=0$$
$$P=\frac{0.9\pm\sqrt{0.81-0.65}}{2}=\frac{0.9\pm0.4}{2}$$

הפתרונות הם $0.65$ ו־$0.25$. נתון ש־$P>0.5$, ולכן:

$$P=0.65$$

**תשובה:** $P=0.65$

**סעיף ב**

עבור $P = 0.65$, ההסתברות להצליח במבחן השני אחרי הצלחה במבחן הראשון:

$$0.65 + 0.3 = 0.95$$

ואחרי כישלון במבחן הראשון:

$$0.65 - 0.1 = 0.55$$

נגדיר מאורעות: $K$ – המועמד התקבל, כלומר הצליח בשני המבחנים; $L$ – הצליח לפחות במבחן אחד. ידוע ש־$L$ התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(K/L)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(K/L) = \frac{P(K \cap L)}{P(L)}$$

המאורע $K$ מוכל ב־$L$ (מי שהצליח בשניהם הצליח לפחות באחד), ולכן $P(K \cap L) = P(K)$:

$$P(K) = 0.65 \cdot 0.95 = 0.6175$$

המשלים של $L$ הוא כישלון בשני המבחנים:

$$P(L) = 1 - 0.35 \cdot 0.45 = 0.8425$$

נציב:

$$P(K/L) = \frac{0.6175}{0.8425}$$
$$= \frac{247}{337} \approx 0.733$$

**תשובה:** $\frac{247}{337} \approx 0.733$

**סעיף ג**

לכל מועמד:

$$P(\text{התקבל}) = 0.6175$$

$$P(\text{נכשל בשניהם}) = 0.35 \cdot 0.45$$

$$= 0.1575$$

צריך ששניים מהשלושה יתקבלו והשלישי ייכשל בשני המבחנים. את המועמד שנכשל אפשר לבחור ב־3 דרכים:

$$P = 3 \cdot 0.6175^2 \cdot 0.1575$$

$$\approx 0.1802$$

**תשובה:** $\approx 0.1802$

**סעיף ד**

כל מועמד מתקבל בהסתברות $0.6175$ ולא מתקבל בהסתברות $1 - 0.6175 = 0.3825$, באופן בלתי תלוי.

המאורע המשלים ל"לפחות אחד התקבל וגם לפחות אחד לא התקבל" הוא: כל $n$ המועמדים התקבלו, או אף אחד מהם לא התקבל.

$$P(\text{כולם התקבלו}) = 0.6175^n$$

$$P(\text{אף אחד לא התקבל}) = 0.3825^n$$

לכן:

$$P = 1 - 0.6175^n - 0.3825^n$$

**תשובה:** $1 - 0.6175^n - 0.3825^n$

## בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 3

**3.** במכללה גדולה, הועלתה הצעה לקצר את הפסקת הצוהריים כדי לסיים מוקדם יותר את יום הלימודים.

בעקבות זאת ערכו משאל ובו השתתפו כל תלמידי שנה א' וכל תלמידי שנה ב'.

על פי תוצאות המשאל התברר כי $80\%$ מן המשתתפים שבעד ההצעה הם תלמידי שנה א'. עוד התברר כי מספר תלמידי שנה א' שבעד ההצעה שווה למספר תלמידי שנה ב' שנגד ההצעה. מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים.

נסמן ב־ $p$ את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה מבין כל התלמידים שהשתתפו במשאל.

**א.** בחרו באקראי אחד מתלמידי שנה ב'. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה?

ידוע כי ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה א' הוא בעד ההצעה, גדולה ב־ $\frac{13}{35}$ מן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה ב' הוא בעד ההצעה.

**ב.** חשבו את הערך של $p$.

**ג.** בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל. חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה:

I. המשתתף שנבחר הוא תלמיד שנה ב'. II. המשתתף שנבחר בעד ההצעה.

**ד.** בחרו באקראי $5$ מן המשתתפים במשאל.

ידוע כי כל החמישה שנבחרו הם תלמידי שנה ב'.

מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם בעד ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

נסמן ב־$N$ את מספר המשתתפים במשאל. מספר המשתתפים שבעד ההצעה הוא $pN$.

- $80\%$ מהתומכים הם תלמידי שנה א': $0.8pN$.
- שאר התומכים הם תלמידי שנה ב': $0.2pN$.
- מספר תלמידי שנה ב' שנגד ההצעה שווה למספר תלמידי שנה א' שבעד: $0.8pN$.

| | בעד | נגד | סה"כ |
|---|---|---|---|
| שנה א' | $0.8pN$ | | |
| שנה ב' | $0.2pN$ | $0.8pN$ | $pN$ |
| סה"כ | $pN$ | | $N$ |

מספר תלמידי שנה ב' הוא $0.2pN + 0.8pN = pN$.

נסמן: $B$ – המשתתף הוא תלמיד שנה ב', $F$ – המשתתף בעד ההצעה ($\bar{F}$ – נגד). בוחרים מבין תלמידי שנה ב', ולכן המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(\bar{F}/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(\bar{F}/B) = \frac{P(\bar{F} \cap B)}{P(B)}$$

מהטבלה: $P(\bar{F} \cap B) = \frac{0.8pN}{N} = 0.8p$, $P(B) = \frac{pN}{N} = p$. נציב:

$$P(\bar{F}/B) = \frac{0.8p}{p} = 0.8$$

**תשובה:** $0.8$

**סעיף ב**

נסמן כמו בסעיף א: $B$ – תלמיד שנה ב' ($\bar{B}$ – תלמיד שנה א'), $F$ – המשתתף בעד ההצעה.

לפי סעיף א, $P(F/B) = 1 - 0.8 = 0.2$. לכן ההסתברות שתלמיד שנה א' בעד ההצעה:

$$P(F/\bar{B}) = 0.2 + \frac{13}{35}$$
$$= \frac{7}{35} + \frac{13}{35} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

מצד שני, לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(F/\bar{B}) = \frac{P(F \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

מהטבלה: תלמידי שנה א' שבעד – $0.8pN$, ותלמידי שנה א' – $N - pN$, כלומר $P(F \cap \bar{B}) = 0.8p$ ו־$P(\bar{B}) = 1 - p$. נציב:

$$\frac{0.8p}{1-p} = \frac{4}{7}$$
$$5.6p = 4 - 4p$$
$$9.6p = 4 \;\Rightarrow\; p = \frac{4}{9.6} = \frac{5}{12}$$

**תשובה:** $p = \frac{5}{12}$

**סעיף ג**

נסמן: $B$ – המשתתף הוא תלמיד שנה ב', $F$ – המשתתף בעד ההצעה. לפי הטבלה בסעיף א:

$$P(B) = \frac{pN}{N} = p, \qquad P(F) = p$$
$$P(B \cap F) = \frac{0.2pN}{N} = 0.2p$$

ההסתברות שמתקיים לפחות אחד מהתנאים:

$$P(B \cup F) = P(B) + P(F)$$
$$-P(B \cap F)$$
$$= p + p - 0.2p = 1.8p$$
$$= 1.8 \cdot \frac{5}{12} = 0.75$$

**תשובה:** $0.75$

**סעיף ד**

כל החמישה הם תלמידי שנה ב', ולכן כל אחד מהם בעד ההצעה בהסתברות המותנית $P(F/B) = 0.2$ (סעיף א; $F$ – בעד ההצעה, $B$ – תלמיד שנה ב'). המכללה גדולה, ולכן אפשר להתייחס לבחירות כבלתי תלויות. מספר התומכים מבין החמישה מתפלג בינומית: $n = 5$, $p = 0.2$.

לפחות שניים בעד וגם לפחות שניים נגד – מספר התומכים הוא 2 או 3:

$$P_5(2) = \binom{5}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 = 0.2048$$
$$P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^2 = 0.0512$$

$P_5(2) + P_5(3) = 0.2048 + 0.0512$
$= 0.256$

**תשובה:** $0.256$

## בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 3

**3.** בחנות פירות יש ארגזים ובתוכם פירות.

בארגז א' יש $a$ פירות: 3 תפוחים והשאר אגסים.

בארגז ב' יש $b$ פירות: 5 תפוחים והשאר אגסים.

מוציאים באקראי פרי אחד מארגז א'. אם יצא תפוח – מעבירים אותו לארגז ב', ואם יצא אגס – מחזירים אותו לארגז א'.

לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.

**א.** הביעו באמצעות $a$ ו־$b$ את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.

נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא $\frac{9}{65}$.

ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ואחר כך אגס אחד היא $\frac{21}{130}$.

**ב.** מצאו את $a$ ואת $b$.

**ג.** חשבו את ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח.

מעבירים את כל הפירות משני הארגזים לארגז אחר שהיה ריק, ומוציאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.

**ד.** מצאו את ההסתברות שב־4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח <u>או</u> שבכל 6 הפעמים יצא אגס.

**ה.** ידוע שב־4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח. מצאו את ההסתברות שהתפוחים יצאו ברציפות, בזה אחר זה.

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

בתיבה א' יש $a$ פירות, מהם 3 תפוחים. אם הוצא תפוח, הוא עובר לתיבה ב', ושם יש $b+1$ פירות, מהם $5+1=6$ תפוחים:

$$P=\frac{3}{a}\cdot\frac{6}{b+1}=\frac{18}{a(b+1)}$$

**תשובה:** $\frac{18}{a(b+1)}$

**סעיף ב**

לפי סעיף א:

$$\frac{18}{a(b+1)}=\frac{9}{65}\ \Rightarrow\ a(b+1)=130$$

תפוח ואחריו אגס: אחרי שהתפוח הועבר, בתיבה ב' יש $b+1$ פירות, מהם $b-5$ אגסים:

$$\frac{3}{a}\cdot\frac{b-5}{b+1}=\frac{3(b-5)}{a(b+1)}=\frac{21}{130}$$

נציב $a(b+1)=130$:

$$3(b-5)=21\ \Rightarrow\ b=12$$

$$a=\frac{130}{13}=10$$

**תשובה:** $a=10,\ b=12$

**סעיף ג**

נסמן: $A$ – מתיבה א' הוצא תפוח, $B$ – מתיבה ב' הוצא אגס. המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(B/A)$:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

אם מתיבה א' הוצא תפוח, הוא הועבר לתיבה ב', ובה יש עכשיו $13$ פירות: $6$ תפוחים ו־$7$ אגסים ($a = 10$, $b =$ $12$ מסעיף ב):

$$P(B/A) = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{13}}{\frac{3}{10}} = \frac{7}{13}$$

**תשובה:** $\frac{7}{13}$

**סעיף ד**

בתיבה החדשה כל 22 הפירות: 8 תפוחים ($3 + 5$) ו־14 אגסים. מוציאים עם החזרה, ולכן בכל פעם ההסתברות לתפוח היא:

$$p = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$$

זו התפלגות ברנולי עם $n = 6$. שני המאורעות זרים (לא ייתכן גם 4 תפוחים וגם 0 תפוחים), ולכן מחברים:

$$P_6(4) = \binom{6}{4}\left(\frac{4}{11}\right)^4\left(\frac{7}{11}\right)^2 \approx 0.1062$$

$$P_6(0) = \left(\frac{7}{11}\right)^6 \approx 0.0664$$

$$P \approx 0.1062 + 0.0664 \approx 0.173$$

**תשובה:** $\approx 0.173$

**סעיף ה**

נסמן: $A$ – ארבעת התפוחים יצאו ברצף (בארבע הוצאות רצופות), $B$ – יצאו בדיוק 4 תפוחים בשש ההוצאות. ידוע ש־$B$ התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נסמן ב־$p$ את ההסתברות לתפוח בכל הוצאה. כל סידור מסוים של 4 תפוחים ו־2 אגסים הוא בהסתברות $p^4(1-p)^2$.

$B$: יש $\binom{6}{4} = 15$ סידורים של 4 תפוחים בין 6 ההוצאות:

$$P(B) = 15p^4(1-p)^2$$

$A \cap B$: 4 התפוחים ברצף – בהוצאות 1–4, 2–5 או 3–6, כלומר 3 סידורים:

$$P(A \cap B) = 3p^4(1-p)^2$$

נציב:

$$P(A/B) = \frac{3p^4(1-p)^2}{15p^4(1-p)^2}$$

$$= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

(הערה: אפשר גם לנמק בקיצור – בהינתן $B$ כל 15 הסידורים שווי הסתברות, ו־3 מהם ברצף.)

**תשובה:** $\frac{1}{5} = 0.2$

## בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 3

**3.** בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב תושבי העיר.

בסקר השתתפו אנשים רבים – מבוגרים וצעירים.

בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי $3$ ממספר הצעירים ששולטים בה,

ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי $2\frac{2}{3}$ ממספר המבוגרים ששולטים בה.

נסמן ב־ $\mathrm{p}$ את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבֵּין כלל המשתתפים בסקר.

**א.** מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים שהשתתפו בסקר.

**ב.** בוחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר. מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.

**ג.** **(1)** הביעו באמצעות $\mathrm{p}$ את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

**(2)** הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור $\mathrm{p}$ הוא $0<\mathrm{p}<\frac{1}{12}$ .

ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

**ד.** מצאו את הערך של $\mathrm{p}$ .

**ה.** האם המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה? נמקו את תשובתכם.

### פתרון מלא

---

**סעיף א**

נבטא את ההסתברויות של ארבע הקבוצות מתוך כלל המשתתפים:

| קבוצה | הסתברות |
|---|---|
| צעיר ששולט | $p$ |
| מבוגר ששולט | $3p$ |
| מבוגר שלא שולט | $2\frac{2}{3}\cdot 3p = 8p$ |
| צעיר שלא שולט | $1-12p$ |

נסמן: $A$ – המשתתף מבוגר, $S$ – המשתתף שולט באנגלית. ידוע שנבחר משתתף מבוגר, ולכן המבוקש הוא $P(S/A)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(S/A)=\frac{P(S\cap A)}{P(A)}$$

מבוגר ששולט: $P(S\cap A)=3p$. המבוגרים יחד: $P(A)=3p+8p=11p$. נציב:

$$P(S/A)=\frac{3p}{11p}=\frac{3}{11}$$

**תשובה:** $\frac{3}{11}\approx 0.273$

**סעיף ב**

יש הרבה משתתפים, ולכן הבחירות בלתי תלויות. לפי נוסחת ברנולי עם $n=3$, $k=2$, $p=\frac{3}{11}$:

$$P_3(2)=\binom{3}{2}\left(\frac{3}{11}\right)^2\cdot\frac{8}{11}$$

$$= \frac{216}{1331} \approx 0.162$$

**תשובה:** $\frac{216}{1331} \approx 0.162$

**סעיף ג (1)**

סכום ההסתברויות של ארבע הקבוצות הוא 1 (ראו הטבלה בסעיף א):

$$p + 3p + 8p + P(\text{צעיר שלא שולט}) = 1$$

$$P(\text{צעיר שלא שולט}) = 1 - 12p$$

**תשובה:** $1 - 12p$

**סעיף ג (2)**

ההסתברויות של כל הקבוצות חיוביות: יש צעירים ששולטים באנגלית, ולכן $p > 0$, ויש צעירים שאינם שולטים, ולכן:

$$1 - 12p > 0 \Rightarrow p < \frac{1}{12}$$

לכן $0 < p < \frac{1}{12}$.

**תשובה:** $0 < p < \frac{1}{12}$

**סעיף ד**

נסמן: $A$ – המשתתף מבוגר, $\bar{A}$ – המשתתף צעיר, $L$ – המשתתף לא שולט באנגלית. נתון:

$$P(A/L) = P(\bar{A}/L)$$

לפי נוסחת ההסתברות המותנית $P(A/L) = \frac{P(A \cap L)}{P(L)}$, כאשר $P(L) = 8p + (1 - 12p)$:

$$\frac{8p}{8p + 1 - 12p} = \frac{1 - 12p}{8p + 1 - 12p}$$

המכנים זהים, ולכן גם המונים שווים:

$$8p = 1 - 12p$$

$$p = \frac{1}{20} = 0.05$$

(הערך מקיים $0 < p < \frac{1}{12}$.)

**תשובה:** $p = 0.05$

**סעיף ה**

נסמן כמו בסעיף א: $A$ – המשתתף מבוגר, $S$ – המשתתף שולט באנגלית. המאורעות בלתי תלויים אם ורק אם $P(S/A) = P(S)$.

שולטים באנגלית: צעירים ששולטים ומבוגרים ששולטים ($p = 0.05$ מסעיף ד):

$$P(S) = p + 3p = 4p = 0.2$$

מסעיף א, לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{3p}{11p} = \frac{3}{11} \approx 0.273$$

$P(S/A) \neq P(S)$, ולכן המאורעות **תלויים**.

**תשובה: תלויים, כי** $\frac{3}{11} \neq 0.2$

## בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 3

**3.** נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תֵּיקו והפסד.

ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.

נסמן ב־ $p$ את ההסתברות שנטע תפסיד במשחק $(p > 0)$.

בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.

נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא $4.5p$.

**א.** מִצאו את הערך של $p$.

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

**ב.** מִצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב־ 3 משחקים לפחות.

**ג.** מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

**ד.** **(1)** מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

**(2)** ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות. מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

---

### פתרון מלא

**סעיף א**

בכל משחק: $P(\text{הפסד}) = p$, $P(\text{ניצחון}) = 3p$, $P(\text{תיקו}) = 1 - 4p$.

„ניצחון אחד לפחות" בשני משחקים הוא המשלים של „אף ניצחון":

$$1 - (1 - 3p)^2 = 4.5p$$
$$1 - 1 + 6p - 9p^2 = 4.5p$$
$$9p^2 - 1.5p = 0 \;\Rightarrow\; p(9p - 1.5) = 0$$

נתון $p > 0$, ולכן:

$$p = \frac{1.5}{9} = \frac{1}{6}$$

מכאן: ניצחון $\frac{1}{2}$, תיקו $\frac{1}{3}$, הפסד $\frac{1}{6}$.

**תשובה:** $p = \frac{1}{6}$

**סעיף ב**

ניסוי ברנולי: $n = 5$, הסתברות לניצחון $\frac{1}{2}$. „3 ניצחונות לפחות" = 3, 4 או 5:

$$P = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$$
$$= \left[\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right]\left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$
$$= \frac{10 + 5 + 1}{32} = \frac{1}{2}$$

**תשובה:** $0.5$

**סעיף ג**

„ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים" – לא משנה מה קרה במשחק הרביעי והחמישי:

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$$

**תשובה:** $0.125$

**סעיף ד (1)**

בכל משחק ההסתברות לא להפסיד היא $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$:

$$P = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \approx 0.402$$

**תשובה:** $\frac{3125}{7776} \approx 0.402$

**סעיף ד (2)**

נסמן: $A$ – ניצחה בשלושת הראשונים ותיקו במשחק האחרון, $B$ – הפסידה במשחק אחד לפחות.

ב־$A \cap B$ שלושת המשחקים הראשונים הם ניצחונות, המשחק החמישי תיקו, ולכן ההפסד חייב להיות במשחק הרביעי:

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{144}$$

לפי ד (1):

$$P(B) = 1 - \frac{3125}{7776} = \frac{4651}{7776}$$

ידוע ש־$B$ התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נציב:

$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{144}}{\frac{4651}{7776}} = \frac{7776}{144 \cdot 4651}$$

$$= \frac{54}{4651} \approx 0.0116$$

**תשובה:** $\frac{54}{4651} \approx 0.0116$

## בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 3

**3.** כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה.

כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו $n$ שאלות שונות. לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו. ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה. בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות. מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר, ובכל פתק כתובה שאלה אחרת. לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות, הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה.

הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא.

נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון רק על $20$ שאלות מתוך $n$ השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא $\frac{34}{69}$.

**א.** **(1)** מצא את $n$.

**(2)** מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה?

**ב.** אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא?

רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון על $40$ שאלות מתוך $n$ השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

**ג.** האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי גדולה פי $2$ מן ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי? נמק את תשובתך.

### פתרון מלא

---

**סעיף א (1)**

נתנאל יודע 20 מתוך $n$ השאלות. ההוצאה היא ללא החזרה.

המאורע המשלים ל"לפחות שאלה אחת נכונה מבין שתי הראשונות" הוא "שתי הראשונות שאלות שהוא לא יודע":

$$\frac{n-20}{n}\cdot\frac{n-21}{n-1}=1-\frac{34}{69}=\frac{35}{69}$$

$$69(n-20)(n-21)=35n(n-1)$$

$$69n^2-2829n+28980=35n^2-35n$$

$$34n^2-2794n+28980=0$$

$$17n^2-1397n+14490=0$$

$$n=70 \quad \text{או} \quad n\approx 12.18$$

מספר השאלות חייב להיות מספר טבעי, ולכן $n=70$.

**תשובה:** $n=70$

**סעיף א (2)**

נתנאל יתקבל אם יענה נכון על 2 או 3 שאלות.

**3 נכונות:**

$$\frac{20}{70}\cdot\frac{19}{69}\cdot\frac{18}{68}$$

**בדיוק 2 נכונות:** השאלה הלא נכונה יכולה להיות באחד משלושה מקומות, ובכל סדר ההסתברות זהה:

$$3\cdot\frac{20}{70}\cdot\frac{19}{69}\cdot\frac{50}{68}$$

סך הכול:

$$P=\frac{20\cdot19\cdot18+3\cdot20\cdot19\cdot50}{70\cdot69\cdot68}$$
$$=\frac{6840+57000}{328440}=\frac{76}{391}\approx0.194$$

**תשובה:** $\frac{76}{391}\approx0.194$

**סעיף ב**

נסמן: $A$ – נתנאל לא ענה נכון על השאלה הראשונה, $B$ – נתנאל התקבל. המבוקש הוא $P(A/B)$:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$P(B)=\frac{76}{391}$ (סעיף א (2)). אם נתנאל התקבל והשאלה הראשונה לא נכונה, אז שתי האחרות נכונות:

$$P(A\cap B)=\frac{50}{70}\cdot\frac{20}{69}\cdot\frac{19}{68}=\frac{475}{8211}$$

נציב בנוסחה:

$$P(A/B)=\frac{\frac{475}{8211}}{\frac{76}{391}}=\frac{25}{84}\approx0.298$$

**תשובה:** $\frac{25}{84}\approx0.298$

**סעיף ג**

רמי יודע 40 מתוך 70 שאלות. ההסתברות ששלוש השאלות שהוציא נכונות:

$$\frac{40}{70}\cdot\frac{39}{69}\cdot\frac{38}{68}=\frac{494}{2737}$$

אצל נתנאל:

$$\frac{20}{70}\cdot\frac{19}{69}\cdot\frac{18}{68}=\frac{57}{2737}$$

היחס:

$$\frac{494}{57}=\frac{26}{3}\approx8.67$$

לכן **לא**: ההסתברות של רמי גדולה פי $8\frac{2}{3}$ בערך, ולא פי 2. כבר בפתק הראשון ההסתברות של רמי גדולה פי 2, ובפתקים הבאים היחס גדל עוד, כי $\frac{39}{19}>2$ וגם $\frac{38}{18}>2$.

**תשובה: לא. ההסתברות של רמי גדולה פי $\frac{26}{3}\approx8.67$.**

## בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 3

**3.** בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה. ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה. אם הסוכרייה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה, ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.

**א.** ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

**(1)** חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

**(2)** חשב את ההסתברות שליאור אכל את הסוכרייה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

**ב.** ליאור מוציא מן הקופסה $n$ סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.
הבע בעזרת $n$ את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

**ג.** ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה.
ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה.
חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

### פתרון מלא

---

**סעיף א (1)**

נסמן: ת – סוכריית תות (ליאור אוכל אותה), מ – סוכריית מנטה (מוחזרת לקופסה). אחרי שליאור אוכל סוכריית תות נשארות בקופסה פחות סוכריות, וההסתברויות משתנות.

ליאור אוכל בדיוק סוכרייה אחת בשלושה מקרים:

תות, ואחריה מנטה פעמיים:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}=0.15$$

מנטה, תות, מנטה:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=0.12$$

מנטה פעמיים, ואחריה תות:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=0.096$$

המקרים זרים, ולכן:

$$P=0.15+0.12+0.096=0.366$$

**תשובה:** $0.366$

**סעיף א (2)**

נגדיר: $A$ – ליאור אכל את הסוכרייה השנייה; $E$ – ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

המאורע $A\cap E$ הוא המקרה מנטה, תות, מנטה:

$$P(A\cap E)=0.12$$

המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(A/E)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}$$

נציב:

$$P(A/E) = \frac{0.12}{0.366}$$
$$= \frac{20}{61} \approx 0.328$$

**תשובה:** $\frac{20}{61} \approx 0.328$

**סעיף ב**

המאורע המשלים ל"ליאור אכל לפחות סוכרייה אחת" הוא: בכל $n$ ההוצאות יצאה סוכריית מנטה.

כל עוד יוצאת מנטה היא מוחזרת, ולכן ההרכב בקופסה לא משתנה, וההסתברות למנטה בכל הוצאה היא $\frac{2}{5}$:

ההסתברות שכל ההוצאות הן מנטה:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

ולכן ההסתברות המבוקשת:

$$P = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

**תשובה:** $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

**סעיף ג**

בכל קופסה ליאור מוציא שלוש סוכריות. כדי שיאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה, צריך שמקופסה אחת יאכל 3 ומהשנייה 0.

אכילת 3 מקופסה אחת – שלוש פעמים תות:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

אכילת 0 מקופסה – שלוש פעמים מנטה:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

הקופסה שממנה אכל יכולה להיות הראשונה או השנייה:

$$P = 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{8}{125} = \frac{8}{625}$$
$$= 0.0128$$

**תשובה:** $\frac{8}{625} = 0.0128$

---

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.