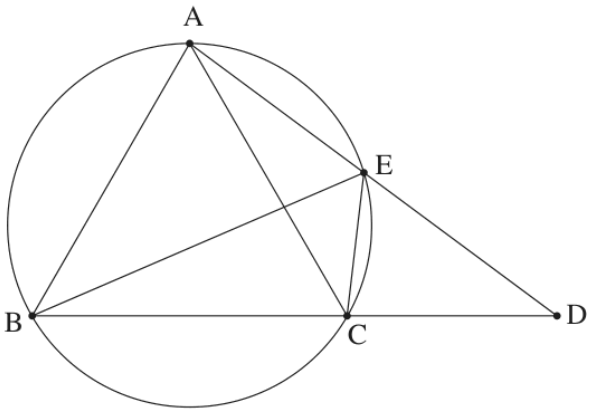
גאומטרייה – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י״א (שאלון 571) • 17 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 4



4. ABC הוא משולש שווה צלעות החסום במעגל.

הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC, כמתואר בסרטוט.

הקטע AD חותך את המעגל בנקודה E.

א. הוכיחו: $\sphericalangle AEB = \sphericalangle BEC = \sphericalangle CED = 60^o$.

ב. הוכיחו: $\triangle AEB \sim \triangle CED$.

ג. הוכיחו: $\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$.

נתון כי שטח המשולש AEB גדול פי 2.25 משטח המשולש CED.

ד. מצאו פי כמה גדול שטח המשולש ABD משטח המשולש CED.

פתרון מלא

סעיף א

במשולש שווה צלעות כל זווית היא $60°$. הנקודות A, B, C, E נמצאות על המעגל, ולכן $ABCE$ הוא מרובע חסום.

טענה	נימוק
$\angle ACB = 60°$ $\angle BAC = 60°$ $\angle ABC = 60°$	במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות ל־$60°$
$\angle AEB = \angle ACB$ $\angle AEB = 60°$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (AB) שוות זו לזו
$\angle BEC = \angle BAC$ $\angle BEC = 60°$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (BC) שוות זו לזו
$\angle AEC = 120°$	במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות הוא $180°$ ($180° - \angle ABC$)
$\angle CED = 60°$	זוויות צמודות משלימות ל־$180°$ (A, E, D על ישר אחד)

לכן שלוש הזוויות $\angle AEB,\ \angle BEC,\ \angle CED$ שוות ל־$60°$.

תשובה: הוכחה: כל אחת משלוש הזוויות שווה ל־$60°$ (זוויות היקפיות, מרובע חסום, זוויות צמודות).

סעיף ב

טענה	נימוק
$\angle AEB = \angle CED$	הוכח בסעיף א (שתיהן $60°$)
$\angle BAE + \angle BCE = 180°$	במרובע חסום $ABCE$ סכום זוויות נגדיות הוא $180°$
$\angle ECD + \angle BCE = 180°$	זוויות צמודות (B, C, D על ישר אחד)
$\angle ECD = \angle BAE$	משתי הטענות הקודמות
$\triangle AEB \sim \triangle CED$	ז.ז.

התאמת הקודקודים: A מתאים ל־C, E ל־E, B ל־D.

תשובה: הוכחה: $\triangle AEB \sim \triangle CED$ לפי ז.ז.

סעיף ג

טענה	נימוק
$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD}$	מדמיון המשולשים (סעיף ב) – יחס צלעות מתאימות
$AB = BC$	משולש שווה צלעות
$\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$	הצבה של $AB = BC$

תשובה: הוכחה: יחס צלעות מתאימות במשולשים הדומים (סעיף ב), ו־$AB = BC$.

סעיף ד

יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = 2.25$$
$$\frac{AB}{CD} = 1.5$$

נסמן:

$$CD = 2x \;\Rightarrow\; AB = BC = AC = 3x$$

המשולשים DCE ו־DAB דומים: הזווית $\angle D$ משותפת, ו־$\angle DCE = \angle DAB$ (הוכח בסעיף ב: $\angle ECD = \angle BAE$). לכן $\triangle DCE \sim \triangle DAB$ (ז.ז.), ויחס הדמיון הוא $\frac{AD}{CD}$.

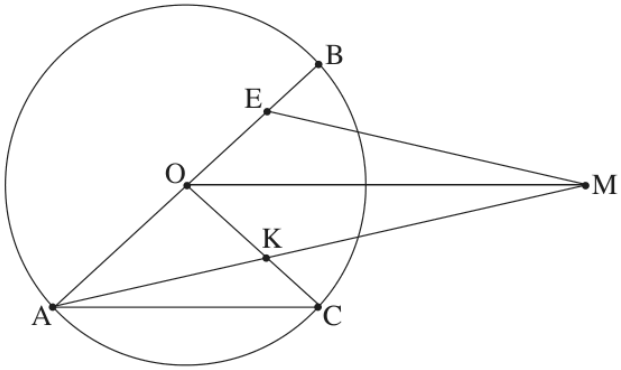
נחשב את AD במשולש ACD לפי משפט הקוסינוסים. $\angle ACD = 120^\circ$ (צמודה ל־$\angle ACB = 60^\circ$):

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$
$$\quad -2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos 120^\circ$$
$$= 9x^2 + 4x^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2x \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= 13x^2 + 6x^2 = 19x^2$$

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CED}} = \left(\frac{AD}{CD}\right)^2 = \frac{19x^2}{4x^2}$$
$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CED}} = 4.75$$

תשובה: שטח המשולש ABD גדול פי 4.75 משטח המשולש CED.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 4



4. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.

AB הוא קוטר במעגל.

הנקודה C נמצאת על המעגל.

הנקודה M נמצאת מחוץ למעגל

כך שהקטע AM חותך את הקטע CO בנקודה K.

הנקודה E נמצאת על הקטע BO כך שהמרובע EMKO

הוא דלתון ($MK = ME\ ,\ OK = OE$).

א. הוכיחו כי $BC \parallel EK$.

ב. הוכיחו כי $OM \parallel AC$.

נתון: $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$.

ג. מצאו את הערך של $\frac{OM}{AC}$.

נסמן ב־ S את שטח הדלתון EMKO.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AOC.

פתרון מלא

סעיף א

טענה	נימוק
$OE = OK$	נתון (צלעות הדלתון)
$OB = OC$	רדיוסים במעגל
$\frac{OE}{OB} = \frac{OK}{OC}$	חילוק שני השוויונות
$EK \parallel BC$	משפט תאלס ההפוך (במשולש OBC הקטע EK מחלק את שתי השוקיים $OB,\ OC$ באותו יחס)

תשובה: הוכחה: $\frac{OE}{OB} = \frac{OK}{OC}$, ולכן $EK \parallel BC$ (משפט תאלס ההפוך).

סעיף ב

טענה	נימוק
$\angle ACB = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
$OM \perp EK$	בדלתון האלכסון הראשי (OM) מאונך לאלכסון המשני (EK)
$OM \perp BC$	$EK \parallel BC$ (סעיף א), וישר המאונך לאחד משני ישרים מקבילים מאונך גם לשני
$OM \parallel AC$	שני ישרים המאונכים לאותו ישר (BC) מקבילים זה לזה

תשובה: הוכחה: $AC \perp BC$ כי זווית היקפית על קוטר ישרה, ו־$OM \perp BC$ כי אלכסוני הדלתון מאונכים ו־$EK \parallel BC$. לכן $OM \parallel AC$.

סעיף ג

שלב 1: $EK \parallel BC$, ולכן $\triangle OEK \sim \triangle OBC$ (ז.ז.: זווית O משותפת וזוויות מתאימות שוות), ויחס הדמיון:

$$\frac{OK}{OC}=\frac{EK}{BC}=\frac{3}{5}$$

נסמן $OC=5t$, אז $OK=3t$ ו־$KC=OC-OK=2t$.

שלב 2: $OM \parallel AC$ (סעיף ב), ולכן $\triangle KOM \sim \triangle KCA$ (ז.ז.: זוויות קודקודיות $\angle OKM = \angle CKA$, וזוויות מתחלפות בין מקבילים $\angle KOM = \angle KCA$):

$$\frac{OM}{AC}=\frac{OK}{CK}=\frac{3t}{2t}=\frac{3}{2}$$

תשובה: היחס: $\frac{OM}{AC}=\frac{3}{2}$

סעיף ד

האלכסון OM מחלק את הדלתון לשני משולשים חופפים לפי צ.צ.צ.: $OE=OK$, $ME=MK$, והצלע OM משותפת. לכן:

$$S_{\triangle OKM}=\frac{S}{2}$$

המשולש AKC: $\triangle KCA \sim \triangle KOM$ ביחס $\frac{KC}{KO}=\frac{2}{3}$. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$S_{\triangle AKC}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{S}{2}$$
$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{S}{2}=\frac{2S}{9}$$

המשולש AOK: למשולשים AOK ו־AKC יש אותו גובה מהקודקוד A לישר OC, ולכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים $\frac{OK}{KC}=\frac{3}{2}$:

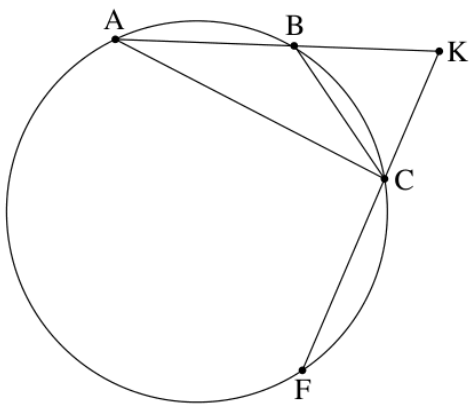
$$S_{\triangle AOK}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2S}{9}=\frac{S}{3}$$

לסיכום:

$$S_{\triangle AOC}=S_{\triangle AOK}+S_{\triangle AKC}$$
$$=\frac{S}{3}+\frac{2S}{9}=\frac{5S}{9}$$

תשובה: השטח הוא $\frac{5}{9}S$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 4



4. בסרטוט שלפניכם משולש קהה זווית ABC החסום במעגל.

הנקודה K נמצאת על המשך הצלע AB כך ש־$AB = BK$.

המשך הקטע KC חותך את המעגל בנקודה נוספת, בנקודה F.

נתון: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$.

א. הוכיחו כי AF הוא קוטר במעגל.

המיתרים BF ו־AC נחתכים בנקודה D.

ב. הוכיחו כי המשולש ADK הוא שווה שוקיים.

ג. **(1)** הוכיחו כי המרובע $BDCK$ הוא בר חסימה במעגל.

(2) הוכיחו כי $\sphericalangle DKC = \sphericalangle FAC$.

ד. הוכיחו כי $AC \cdot AD = KC \cdot AF$.

פתרון מלא

סעיף א

נראה ש־$\angle ACF = 90°$; זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר.

טענה	נימוק
$BA = BC$	במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות; נתון $\angle BAC = \angle BCA$
$BC = BK$	נתון $AB = BK$, ולכן $BC = BK$
$\angle BCK = \angle BKC$	במשולש שווה שוקיים BCK זוויות הבסיס שוות
$\angle ACK =$ $= \angle BCA + \angle BCK =$ $\angle BAC + \angle BKC$	חיבור זוויות ושוויונות הזוויות שלמעלה
$2\angle ACK = 180°$ $\angle ACK = 90°$	סכום הזוויות במשולש AKC הוא $180°$
$\angle ACF = 90°$	זוויות צמודות משלימות ל־$180°$, כי הנקודות K, C, F על ישר אחד
AF קוטר	זווית היקפית בת $90°$ נשענת על קוטר

תשובה: הוכחה: $BA = BC$ ו־$BA = BK$, לכן $\angle ACK = 90°$, ומכאן $\angle ACF = 90°$ – זווית היקפית ישרה נשענת על הקוטר AF.

סעיף ב

טענה	נימוק
$\angle ABF = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה; AF קוטר לפי סעיף א
$\angle KBD = 90°$	זוויות צמודות משלימות ל־$180°$, כי הנקודות A, B, K על ישר אחד
$AB = KB$	נתון
$BD = BD$	צלע משותפת
$\triangle ABD \cong \triangle KBD$	חפיפה לפי צ.ז.צ
$AD = KD$	צלעות מתאימות במשולשים חופפים שוות

לכן המשולש ADK שווה שוקיים – DB הוא גם גובה וגם תיכון בו.

תשובה: הוכחה: $DB \perp AK$ **ו־**B **אמצע** AK**, לכן** $\triangle ABD \cong \triangle KBD$ **(צ.ז.צ) ו־**$AD = KD$**.**

סעיף ג (1)

טענה	נימוק
$\angle DBK = 90^\circ$	הוכח בסעיף ב
$\angle DCK = 90^\circ$	$\angle ACK = 90^\circ$ (סעיף א), ו־D על AC
$\angle DBK + \angle DCK = 180^\circ$	חיבור
$BDCK$ בר חסימה במעגל	מרובע שבו סכום זוג זוויות נגדיות הוא 180° הוא בר חסימה במעגל

תשובה: הוכחה: $\angle DBK + \angle DCK = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ **– זוויות נגדיות משלימות, לכן המרובע בר חסימה.**

סעיף ג (2)

טענה	נימוק
$\angle DKC = \angle DBC$	במעגל החוסם את $BDCK$: זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת DC שוות זו לזו
$\angle FBC = \angle FAC$	במעגל הנתון: זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת FC שוות זו לזו
$\angle DKC = \angle FAC$	$\angle DBC$ ו־$\angle FBC$ הן אותה זווית, כי D על BF; כלל המעבר

תשובה: הוכחה: $\angle DKC = \angle DBC = \angle FAC$ **(זוויות היקפיות בשני המעגלים).**

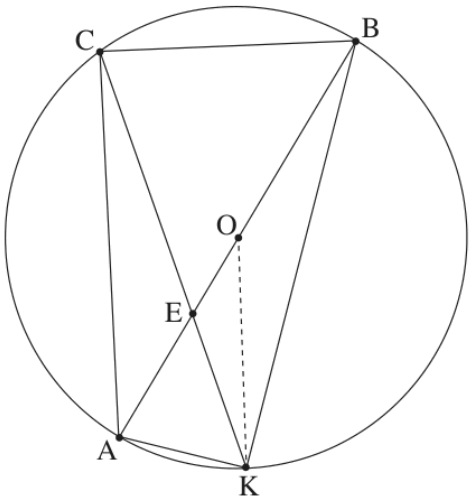
סעיף ד

נוכיח דמיון בין המשולשים KCD ו־ACF:

טענה	נימוק
$\angle KCD = \angle ACF = 90^\circ$	הוכח בסעיפים א ו־ג (1)
$\angle DKC = \angle FAC$	הוכח בסעיף ג (2)
$\triangle KCD \sim \triangle ACF$	ז.ז.
$\frac{KC}{AC} = \frac{KD}{AF}$	יחס הצלעות המתאימות במשולשים דומים שווה
$KC \cdot AF = AC \cdot KD$	כפל במכנים
$KD = AD$	הוכח בסעיף ב
$AC \cdot AD = KC \cdot AF$	הצבה

תשובה: הוכחה: $\triangle KCD \sim \triangle ACF$ **(ז.ז.), לכן** $\frac{KC}{AC} = \frac{KD}{AF}$**, ועם** $KD = AD$ **מתקבל** $AC \cdot AD = KC \cdot AF$**.**

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 4



4. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.

המיתר CK חותך את הרדיוס AO בנקודה E (ראו סרטוט).

נתון: $\sphericalangle EKO = \sphericalangle ABK$.

א. הוכיחו כי $\Delta ACE \sim \Delta OKE$.

המשך הקטע KO חותך את המיתר CB בנקודה P.

נתון כי $PO = 4$, וכי רדיוס המעגל הוא 4.8.

ב. **(1)** הוכיחו כי PO הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

(2) מצאו את אורך הקטע EO.

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ACE ובין שטח המשולש AOK.

פתרון מלא

סעיף א

טענה	נימוק
$\angle ACK = \angle ABK$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (AK) שוות זו לזו
$\angle ABK = \angle EKO$	נתון
$\angle ACE = \angle OKE$	כלל המעבר
$\angle AEC = \angle OEK$	זוויות קודקודיות שוות
$\triangle ACE \sim \triangle OKE$	ז.ז.

תשובה: הוכחה: $\triangle ACE \sim \triangle OKE$ לפי ז.ז.

סעיף ב (1)

טענה	נימוק
$\angle CAE = \angle KOE$	זוויות מתאימות במשולשים דומים (סעיף א)
$\angle KOE = \angle POB$	זוויות קודקודיות שוות
$\angle CAB = \angle POB$	כלל המעבר
$PO \parallel AC$	אם זוויות מתאימות שוות – הישרים מקבילים
$AO = OB$	רדיוסים במעגל
$CP = PB$	ישר היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע שנייה חוצה את הצלע השלישית
PO קטע אמצעים במשולש ABC	קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש

תשובה: הוכחה: הישר PO מקביל ל־AC ויוצא מאמצע הצלע AB, ולכן הוא קטע אמצעים.

סעיף ב (2)

PO קטע אמצעים במשולש ABC, ולכן הוא שווה למחצית הצלע AC:

$$AC = 2 \cdot PO = 2 \cdot 4 = 8$$

OK רדיוס, ולכן $OK = 4.8$.

מהדמיון $\triangle ACE \sim \triangle OKE$ (סעיף א):

$$\frac{AE}{OE} = \frac{AC}{OK} = \frac{8}{4.8} = \frac{5}{3}$$

נסמן $EO = x$. אז $AE = \frac{5}{3}x$, וגם AO הוא רדיוס:

$$AE + EO = AO$$
$$\frac{5}{3}x + x = 4.8$$
$$\frac{8}{3}x = 4.8 \;\Rightarrow\; x = 1.8$$

ולכן $EO = 1.8$, ו־$AE = 3$.

תשובה: $EO = 1.8$

סעיף ג

שלב 1: יחס הדמיון בין $\triangle ACE$ ל־$\triangle OKE$ הוא $\frac{5}{3}$, ויחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\frac{S_{ACE}}{S_{OKE}} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

שלב 2: המשולשים AEK ו־OEK שוכנים על אותו ישר AO ויש להם גובה משותף מהקודקוד K, ולכן יחס שטחיהם שווה ליחס הבסיסים:

$$\frac{S_{AEK}}{S_{OEK}} = \frac{AE}{EO} = \frac{3}{1.8} = \frac{5}{3}$$

נסמן $S_{OKE} = S$. אז:

$$S_{AOK} = S_{AEK} + S_{OEK}$$
$$= \frac{5}{3}S + S = \frac{8}{3}S$$
$$S_{ACE} = \frac{25}{9}S$$

שלב 3:

$$\frac{S_{ACE}}{S_{AOK}} = \frac{\frac{25}{9}S}{\frac{8}{3}S} = \frac{25}{9} \cdot \frac{3}{8}$$
$$= \frac{25}{24}$$

תשובה: $\frac{S_{ACE}}{S_{AOK}} = \frac{25}{24}$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 4

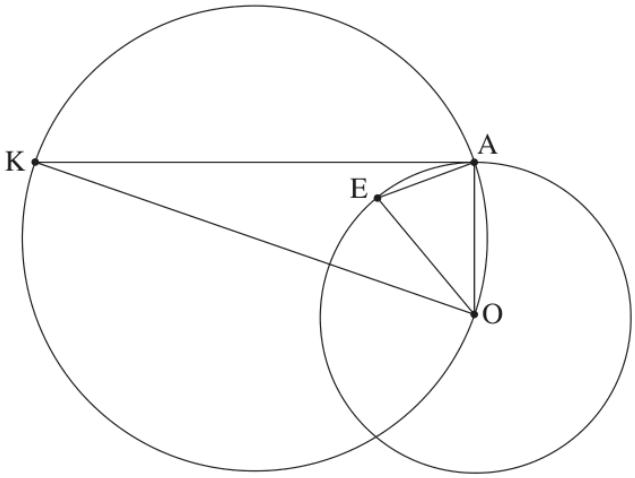
4. בסרטוט שלפניכם מעגל גדול שרדיוסו R ומעגל קטן שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r.

הנקודה O נמצאת על המעגל הגדול.

הנקודה A היא אחת מנקודות החיתוך של שני המעגלים, כמתואר בסרטוט.

דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל הקטן. המשיק חותך את המעגל הגדול בנקודה K.

הנקודה E נמצאת על המעגל הקטן בתוך המשולש KAO.



א. הוכיחו כי $\sphericalangle AOE = 2\sphericalangle KAE$.

המשך הקטע AE חותך את הקטע OK בנקודה M.

נתון כי הנקודה M היא אמצע הקטע OK.

ב. הוכיחו כי הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול.

ג. הוכיחו כי $\Delta MOA \sim \Delta OEA$.

נתון: $R = 1.5r$.

נסמן ב־ S את שטח המשולש MEO.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש OKA.

פתרון מלא

סעיף א

טענה	נימוק
$\angle OAK = 90^\circ$	רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
$\angle OAE = 90^\circ - \angle KAE$	חיסור זוויות: $\angle OAK = \angle OAE + \angle KAE$
$OA = OE = r$	רדיוסים במעגל הקטן
$\angle OEA = \angle OAE$	במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות
$\angle AOE = 180^\circ - 2\angle OAE$	סכום הזוויות במשולש AOE הוא 180°
$\angle AOE = 180^\circ - 2(90^\circ - \angle KAE)$	הצבה
$\angle AOE = 2\angle KAE$	פישוט

(אפשר גם בקיצור: $\angle KAE$ היא זווית בין משיק למיתר AE, והיא שווה למחצית הזווית המרכזית $\angle AOE$ הנשענת על אותו מיתר.)

תשובה: הוכחה: $OA \perp AK$ והמשולש AOE שווה שוקיים, ולכן $\angle AOE = 2\angle KAE$.

סעיף ב

טענה	נימוק
$\angle OAK = 90^\circ$	רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
OK קוטר במעגל הגדול	זווית היקפית ישרה ($\angle OAK$) נשענת על קוטר
M אמצע OK	נתון
M מרכז המעגל הגדול	מרכז המעגל הוא אמצע הקוטר

תשובה: הוכחה: $\angle OAK = 90^\circ$ זווית היקפית, ולכן OK קוטר, ואמצעו M הוא מרכז המעגל הגדול.

סעיף ג

טענה	נימוק
$MO = MA$	רדיוסים במעגל הגדול (סעיף ב)
$\angle MOA = \angle MAO$	במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות
$OA = OE$	רדיוסים במעגל הקטן
$\angle OEA = \angle OAE$	במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות
$\angle MAO = \angle OAE$	אותה זווית, כי M על המשך AE
$\angle MOA = \angle OEA$	מעבר
$\triangle MOA \sim \triangle OEA$	ז.ז.

תשובה: הוכחה: זוויות הבסיס במשולשים שווי השוקיים MOA ו־OEA שוות לזווית המשותפת $\angle OAE$, ולכן $\triangle MOA \sim \triangle OEA$ לפי ז.ז.

סעיף ד

נתון $R = 1.5r$, ולכן:

$$MO = MA = 1.5r$$
$$OA = OE = r$$

מהדמיון בסעיף ג, לפי ההתאמה:

$$M \leftrightarrow O,\ \ O \leftrightarrow E,\ \ A \leftrightarrow A$$
$$\frac{MA}{OA} = \frac{OA}{EA}$$
$$\frac{1.5r}{r} = \frac{r}{EA} \ \Rightarrow\ EA = \frac{r}{1.5} = \frac{2r}{3}$$

הנקודה E נמצאת על הקטע MA, ולכן:

$$ME = MA - EA = 1.5r - \frac{2r}{3} = \frac{5r}{6}$$

למשולשים MEO ו־MAO יש אותו גובה מהקודקוד O לישר MA, ולכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים:

$$\frac{S_{MEO}}{S_{MAO}} = \frac{ME}{MA} = \frac{\frac{5r}{6}}{\frac{3r}{2}} = \frac{5}{9}$$
$$S_{MAO} = \frac{9}{5}S$$

M אמצע OK, ולכן במשולש OKA הקטע AM הוא תיכון. התיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח:

$$S_{OKA} = 2S_{MAO} = 2 \cdot \frac{9}{5}S = \frac{18}{5}S$$
$$S_{OKA} = 3.6S$$

תשובה: $S_{OKA} = \frac{18}{5}S = 3.6S$

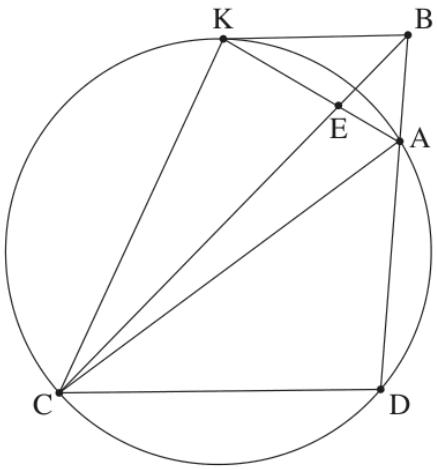
בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 4

4. במרובע BKCD הצלע KB מקבילה לצלע CD.

הצלע CD היא מיתר במעגל והצלע KB משיקה לַמעגל בנקודה K.

הצלע BD חותכת את המעגל בנקודה A.

האלכסון BC חותך את המיתר AK בנקודה E (ראו סרטוט).



א. הוכיחו כי $\triangle ABK \sim \triangle AKC$.

ב. הוכיחו כי $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$.

נתון: $BE = \frac{1}{4}CE$.

ג. מצאו את היחס $\frac{AK}{AB}$.

נתון: שטח המרובע ABKC הוא 18.

נסמן ב־S את שטח המשולש AEB.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש KEC.

פתרון מלא

סעיף א

נוכיח שתי זוויות שוות. הנקודות K, A, D, C נמצאות על המעגל, ולכן $KADC$ הוא מרובע חסום במעגל.

טענה	נימוק
$\angle BKA = \angle KCA$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני
$\angle KBD + \angle BDC = 180^\circ$	$KB \parallel CD$; סכום זוויות חד־צדדיות בין ישרים מקבילים הוא 180°
$\angle AKC + \angle ADC = 180^\circ$	במרובע החסום במעגל $KADC$ סכום זוויות נגדיות הוא 180°
$\angle ADC = \angle BDC$	אותה זווית, כי A על הצלע BD
$\angle KBA = \angle AKC$	משלוש הטענות הקודמות, כי $\angle KBA$ היא $\angle KBD$
$\triangle ABK \sim \triangle AKC$	ז.ז.

התאמת הקודקודים:

$$A \leftrightarrow A, \quad B \leftrightarrow K, \quad K \leftrightarrow C$$

תשובה: הוכחה: $\triangle ABK \sim \triangle AKC$ לפי ז.ז.

סעיף ב

נראה ש־AK חוצה את הזווית BAC, ואז נשתמש במשפט חוצה הזווית במשולש ABC.

טענה	נימוק
$\angle BAK = \angle KAC$	זוויות מתאימות במשולשים דומים – לפי סעיף א, $\triangle ABK \sim \triangle AKC$
AE חוצה את $\angle BAC$ במשולש ABC	E על המיתר AK, וגם על הצלע BC
$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$	משפט חוצה זווית: חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמולה ביחס הצלעות הכולאות אותה

תשובה: הוכחה: AK חוצה את $\angle BAC$ (מהדמיון), ולפי משפט חוצה זווית $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$.

סעיף ג

לפי סעיף ב והנתון:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CE}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ AC=4AB$$

מהדמיון בסעיף א, $\triangle ABK\sim\triangle AKC$:

$$\frac{AB}{AK}=\frac{AK}{AC}$$
$$AK^2=AB\cdot AC$$
$$=AB\cdot 4AB=4AB^2$$
$$AK=2AB\ \Rightarrow\ \frac{AK}{AB}=2$$

תשובה: $\frac{AK}{AB}=2$

סעיף ד

שטחי המשולשים ABK ו־AKC: יחס הדמיון בין $\triangle ABK$ ל־$\triangle AKC$ הוא $\frac{AB}{AK}=\frac{1}{2}$ (סעיף ג), ויחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\frac{S_{ABK}}{S_{AKC}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

האלכסון AK מחלק את המרובע $ABKC$ לשני המשולשים האלה. נסמן $S_{ABK}=T$, ואז $S_{AKC}=4T$:

$$T+4T=18\ \Rightarrow\ T=3.6$$
$$S_{AKC}=4\cdot 3.6=14.4$$

שטח המשולש AEC: למשולשים AEB ו־AEC יש אותו גובה מהקודקוד A לישר BC, ולכן יחס השטחים שלהם שווה ליחס הבסיסים:

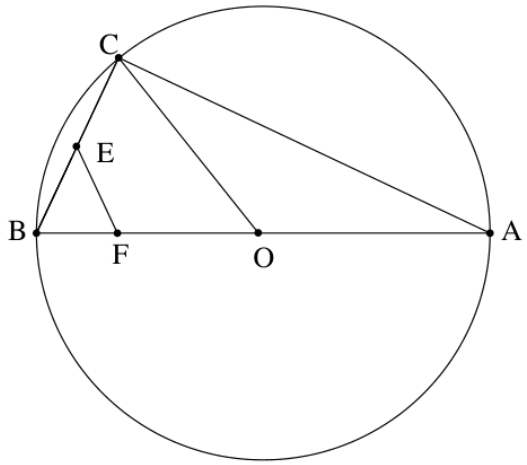
$$\frac{S_{AEC}}{S_{AEB}}=\frac{CE}{BE}=4\ \Rightarrow\ S_{AEC}=4S$$

שטח המשולש KEC: הנקודה E נמצאת על AK, ולכן המשולש AKC מורכב מ־AEC ומ־KEC:

$$S_{KEC}=S_{AKC}-S_{AEC}=14.4-4S$$

תשובה: $S_{KEC}=14.4-4S$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 4



4. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש־AB הוא קוטר במעגל.

הנקודה E נמצאת על הצלע BC,

והנקודה F נמצאת על הקטע BO, כמתואר בסרטוט.

נתון כי המרובע $CEFO$ הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו: $EF = EB$.

המעגל החוסם את המרובע $CEFO$ חותך את הצלע AC בנקודה D

כך ש־ED מקביל ל־AB.

ב. **(1)** הוכיחו כי המרובע $EDOB$ הוא מקבילית.

(2) הוכיחו: $OD \perp AC$.

הישר ℓ משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC.

ג. הוכיחו כי הישר ℓ משיק למעגל החוסם את המרובע $CEFO$.

פתרון מלא

סעיף א

הנקודות C, E, F, O על מעגל אחד, ולכן $CEFO$ מרובע חסום.

טענה	נימוק
$OC = OB$	רדיוסים במעגל O
$\angle OCB = \angle OBC$	במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות
$\angle EFO + \angle ECO = 180^\circ$	במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות הוא 180°
$\angle EFO + \angle EFB = 180^\circ$	זוויות צמודות
$\angle EFB = \angle ECO$	משתי הטענות הקודמות
$\angle EFB = \angle EBF$	$\angle ECO = \angle OCB = \angle OBC = \angle EBF$
$EF = EB$	במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות

תשובה: המשולש EFB שווה שוקיים, כי $\angle EFB = \angle EBF$.

סעיף ב (1)

הנקודה D על המעגל שעובר דרך C, E, F, O, ולכן $EFOD$ מרובע חסום.

טענה	נימוק
$ED \parallel OB$	נתון ($ED \parallel AB$)
$\angle EDO + \angle EFO = 180^\circ$	במרובע חסום סכום זוויות נגדיות הוא 180°
$\angle EFO + \angle EFB = 180^\circ$	זוויות צמודות
$\angle EDO = \angle EFB = \angle EBO$	משתי הטענות הקודמות ומסעיף א
$\angle DEB + \angle EBO = 180^\circ$	זוויות חד־צדדיות בין ישרים מקבילים ($ED \parallel OB$)
$\angle DEB + \angle EDO = 180^\circ$	הצבה של $\angle EDO = \angle EBO$
$EB \parallel DO$	סכום זוויות חד־צדדיות 180°, ולכן הישרים מקבילים
$EDOB$ מקבילית	מרובע ששני זוגות הצלעות הנגדיות בו מקבילות

תשובה: הוכחה: בשני זוגות הצלעות הנגדיות יש הקבלה.

סעיף ב (2)

טענה	נימוק
$\angle ACB = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר (AB) היא זווית ישרה
$DO \parallel BC$	צלעות נגדיות במקבילית $EDOB$ (סעיף ב (1))
$OD \perp AC$	ישר המאונך לאחד משני ישרים מקבילים מאונך גם לשני

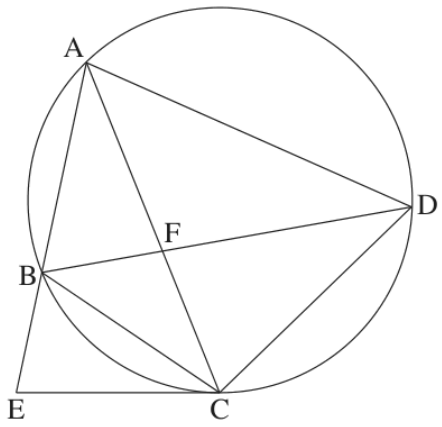
תשובה: הוכחה: OD מקביל ל־BC, ו־BC מאונך ל־AC.

סעיף ג

טענה	נימוק
$\angle ODC = 90^\circ$	סעיף ב (2)
OC קוטר במעגל $CEFO$	זווית היקפית בת 90° ($\angle ODC$, ו־D על המעגל) נשענת על קוטר
$\ell \perp OC$	משיק למעגל O מאונך לרדיוס OC בנקודת ההשקה
ℓ משיק למעגל $CEFO$	ישר המאונך לקוטר (לרדיוס) בקצהו C הוא משיק למעגל

תשובה: הוכחה: OC קוטר במעגל $CEFO$, והישר ℓ מאונך לו בקצה C.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 4



4. המרובע $ABCD$ חסום במעגל. אלכסוני המרובע נחתכים בנקודה F.

המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך המיתר AB בנקודה E (ראו סרטוט).

נתון: $AB = CB$.

א. הוכיחו: $\sphericalangle EBC = 2 \cdot \sphericalangle BDC$.

נתון: AC חוצה את זווית ECD,

$\frac{CD}{CF} = \frac{7}{4}$.

ב. **(1)** הוכיחו: $AC = AD$.

(2) מצאו את היחס $\frac{AD}{CD}$.

(3) מצאו את היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש CBF.

נסמן את שטח המשולש ABF ב־ S.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AEC.

פתרון מלא

סעיף א

טענה	נימוק
$\angle BAC = \angle BCA$	במשולש ABC: $AB = CB$ (נתון), ומול צלעות שוות מונחות זוויות שוות
$\angle EBC = \angle BAC + \angle BCA$	זווית חיצונית למשולש ABC שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה
$\angle EBC = 2\angle BAC$	מהשוויונות הקודמים
$\angle BAC = \angle BDC$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (BC) שוות זו לזו
$\angle EBC = 2\angle BDC$	הצבה

תשובה: הוכחה: זווית חיצונית למשולש ושוויון זוויות היקפיות נותנים $\angle EBC = 2\angle BDC$

סעיף ב (1)

טענה	נימוק
$\angle ECA = \angle ADC$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני
$\angle ECA = \angle ACD$	AC חוצה את $\angle ECD$ (נתון)
$\angle ADC = \angle ACD$	מהשוויונות הקודמים
$AC = AD$	במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות

תשובה: הוכחה: $\angle ADC = \angle ACD$**, ולכן** $AC = AD$

סעיף ב (2)

חוצה את הזווית DB ADC**:** $AB = CB$, ומיתרים שווים נשענות עליהם זוויות היקפיות שוות, ולכן $\angle ADB = \angle BDC$.

לכן במשולש ACD הקטע DF הוא חוצה הזווית D, ולפי משפט חוצה הזווית:

$$\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DC}$$

נסמן $CD=7t$, $CF=4t$, ו־$AD=AC=x$ לפי סעיף ב1. אז $AF=AC-CF=x-4t$:

$$\frac{x-4t}{4t}=\frac{x}{7t}$$
$$7x-28t=4x$$
$$x=\frac{28t}{3}$$
$$\frac{AD}{CD}=\frac{28t/3}{7t}=\frac{4}{3}$$

תשובה: $\frac{AD}{CD}=\frac{4}{3}$

סעיף ב (3)

למשולשים ABF ו־CBF יש גובה משותף מהקודקוד B לישר AC, ולכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים:

$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}}=\frac{AF}{FC}$$

לפי משפט חוצה הזווית, כמו בסעיף ב2:

$$\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DC}=\frac{4}{3}$$

תשובה: $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}}=\frac{4}{3}$

סעיף ג

שטח המשולש ABC: לפי סעיף ב3, $S_{\triangle CBF}=\frac{3}{4}S$, ולכן:

$S_{\triangle ABC}=S+\frac{3}{4}S=\frac{7}{4}S$

יחס הצלעות $\frac{BC}{AC}$: נמשיך עם הסימונים מסעיף ב2: $AC=\frac{28t}{3}$, $CF=4t$, $AF=\frac{16t}{3}$, $CD=7t$. נסמן $AB=CB=y$.

$\triangle CBF\sim\triangle DBC$ (ז.ז.): $\angle CBD$ משותפת, ו־$\angle BDC=\angle BAC=\angle BCA=\angle BCF$. לכן:

$$\frac{BF}{BC}=\frac{BC}{BD}=\frac{CF}{CD}=\frac{4}{7}$$
$BF=\frac{4}{7}y$

$BD=\frac{7}{4}y$

$FD=BD-BF=\frac{7}{4}y-\frac{4}{7}y=\frac{33}{28}y$

לפי משפט המיתרים הנחתכים:

$$AF\cdot FC=BF\cdot FD$$
$$\frac{16t}{3}\cdot 4t=\frac{4}{7}y\cdot\frac{33}{28}y$$
$$\frac{64t^2}{3}=\frac{33y^2}{49}$$
$$y^2=\frac{3136t^2}{99}$$

ולכן:

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{3136t^2/99}{784t^2/9} = \frac{4}{11}$$

הדמיון $\triangle EBC \sim \triangle ECA$ (ז.ז.): $\angle E$ משותפת, ו־$\angle ECB = \angle EAC$ (זווית בין משיק למיתר CB שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני). יחס הדמיון $\frac{BC}{CA}$, ולכן:

$$\frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle ECA}} = \frac{BC^2}{CA^2} = \frac{4}{11}$$

$S_{\triangle AEC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle EBC}$, ולכן:

$S_{\triangle AEC} - \frac{4}{11}S_{\triangle AEC} = \frac{7}{4}S$
$\frac{7}{11}S_{\triangle AEC} = \frac{7}{4}S$
$S_{\triangle AEC} = \frac{11}{4}S = 2.75S$

תשובה: $S_{\triangle AEC} = \frac{11}{4}S = 2.75S$

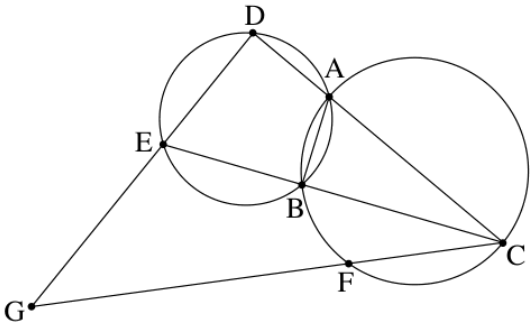
בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 4

4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו־ B. C היא נקודה על המעגל הימני.

המשכי הקטעים CA ו־ CB חותכים את המעגל השמאלי בנקודות D ו־ E בהתאמה.

הנקודה F נמצאת על הקשת BC, כמתואר בסרטוט.

המשכי הקטעים CF ו־ DE נפגשים בנקודה G.



א. הוכיחו: $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$.

ב. הוכיחו: המרובע $GDAF$ הוא בר חסימה במעגל.

המיתרים AF ו־ BC נפגשים בנקודה H.

נתון: $\sphericalangle GEC = \sphericalangle CHA$.

ג. הוכיחו: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

נתון: CE מאונך ל־ AB.

$DE = 18$, $CD = 36$.

ד. חשבו את אורכי הקטעים EG ו־ CG.

פתרון מלא

סעיף א

הנקודות A, B, E, D נמצאות על המעגל השמאלי, ולכן $ABED$ מרובע חסום. הנקודות E, B, C על ישר אחד.

טענה	נימוק
$\angle CBA$ זווית חיצונית למרובע $ABED$	הזווית צמודה לזווית $\angle ABE$ של המרובע
$\angle CBA = \angle EDA$	במרובע חסום, זווית חיצונית שווה לזווית הפנימית שמול הזווית הסמוכה לה

תשובה: הוכחה: $\angle CBA$ זווית חיצונית למרובע החסום $ABED$, ולכן היא שווה לזווית הפנימית שמולה, $\angle EDA$.

סעיף ב

טענה	נימוק
$\angle CFA = \angle CBA$	במעגל הימני: זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת AC שוות זו לזו
$\angle CBA = \angle EDA$	הוכח בסעיף א
$\angle CFA = \angle GDA$	כלל המעבר; $\angle EDA$ ו־$\angle GDA$ הן אותה זווית, כי D, E, G על ישר אחד
$\angle GFA = 180^\circ - \angle CFA$	זוויות צמודות; G, F, C על ישר אחד
$\angle GFA + \angle GDA = 180^\circ$	הצבה
$GDAF$ בר חסימה במעגל	מרובע שבו סכום זוג זוויות נגדיות הוא 180° הוא בר חסימה

תשובה: הוכחה: מתקיים $\angle GDA = \angle CFA$, ולכן $\angle GDA + \angle GFA = 180^\circ$. זוויות נגדיות משלימות, לכן המרובע בר חסימה.

סעיף ג

נראה ש־CE חוצה את הזווית $\angle DCG$, ואז נשתמש במשפט חוצה הזווית במשולש CDG.

תחילה, לפי סעיפים א ו־ב (ובגלל ש־D, A, C על ישר אחד ו־A, H, F על ישר אחד):

$$\angle EDC = \angle EDA = \angle CBA$$
$$= \angle CFA = \angle HFC$$

טענה	נימוק
$\angle GEC = \angle EDC + \angle DCE$	זווית חיצונית למשולש DEC שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה
$\angle CHA = \angle HFC + \angle HCF$	זווית חיצונית למשולש HFC; הנקודות A, H, F על ישר אחד
$\angle EDC = \angle HFC$	הוכח לפני הטבלה
$\angle DCE = \angle HCF$	נתון $\angle GEC = \angle CHA$; מחסרים זוויות שוות
$\angle DCE = \angle ECG$	$\angle HCF$ היא הזווית $\angle ECG$, כי H, E על הישר CB ו־F, G על הישר CF
CE חוצה את $\angle DCG$	מהשוויון שלמעלה
$\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$	משפט חוצה הזווית: חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמולה ביחס הצלעות הכולאות את הזווית

תשובה: הוכחה: מזוויות חיצוניות מקבלים $\angle DCE = \angle ECG$, כלומר CE חוצה זווית במשולש CDG, ולפי משפט חוצה הזווית $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

סעיף ד

זווית ישרה ב־D. $CE \perp AB$, ולכן $\angle ABE = 90^\circ$. במעגל השמאלי זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר, ולכן AE קוטר. גם $\angle ADE$ נשענת על הקוטר AE, לכן $\angle ADE = 90^\circ$, כלומר המשולש CDG ישר זווית ב־D.

חוצה הזווית. נסמן $EG = x$. לפי סעיף ג:

$$\frac{CG}{36} = \frac{x}{18} \;\Rightarrow\; CG = 2x$$

פיתגורס במשולש CDG, כאשר $DG = 18 + x$:

$$(2x)^2 = 36^2 + (18 + x)^2$$
$$4x^2 = 1296 + 324 + 36x + x^2$$
$$3x^2 - 36x - 1620 = 0$$
$$x^2 - 12x - 540 = 0$$
$$x = \frac{12 \pm 48}{2} \;\Rightarrow\; x = 30$$

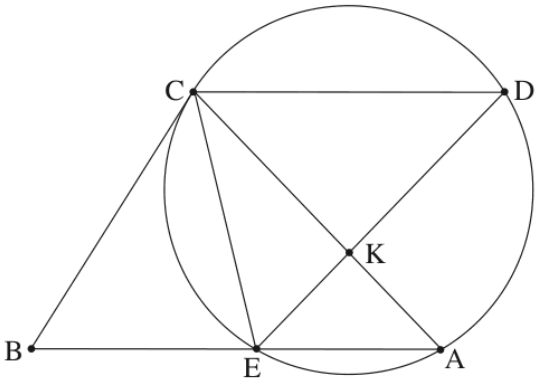
הפתרון $x = -18$ נפסל, אורך חיובי.

$$EG = 30, \qquad CG = 2 \cdot 30 = 60$$

בדיקה: $36^2 + 48^2 = 1296 + 2304 = 3600 = 60^2$ ✓

תשובה: $EG = 30$, $CG = 60$.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 4



4. מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C, וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו־A, כמתואר בסרטוט.
הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA.
המיתרים ED ו־AC נחתכים בנקודה K.

א. הוכיחו: $\triangle CEB \sim \triangle DCE$.

נתון: $AK = 3$, $ED = 7$.

נסמן את שטח המשולש CEK ב־S.

ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.

נתון: $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.

הנקודה O היא מרכז המעגל.

ד. הוכיחו: $\sphericalangle COE = \sphericalangle CKE$.

נתון: $\sphericalangle CAE = 45^o$.

ה. הסבירו מדוע הנקודות E, C, O ו־K נמצאות על מעגל אחד.

פתרון מלא

סעיף א

טענה	נימוק
$\angle BCE = \angle CAE$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני
$\angle CDE = \angle CAE$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (CE) שוות זו לזו
$\angle BCE = \angle CDE$	כלל המעבר
$\angle CEB = \angle DCE$	זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים ($CD \parallel EA$)
$\triangle CEB \sim \triangle DCE$	ז.ז.

תשובה: הוכחה: $\triangle CEB \sim \triangle DCE$ לפי ז.ז.

סעיף ב

שלב 1 – המשולש AEK שווה שוקיים:

טענה	נימוק
$\angle DEA = \angle CDE$	זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים ($CD \parallel EA$)
$\angle CDE = \angle CAE$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת
$\angle KEA = \angle KAE$	כלל המעבר
$EK = AK = 3$	מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות

שלב 2:

$$KD = ED - EK = 7 - 3 = 4$$

שלב 3: למשולשים CEK ו־CKD יש גובה משותף מהקודקוד C אל הישר ED, ולכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים:

$$\frac{S_{CKD}}{S_{CEK}} = \frac{KD}{EK} = \frac{4}{3}$$
$$S_{CKD} = \frac{4}{3}S$$

תשובה: $S_{CKD} = \frac{4}{3}S$

סעיף ג

שטח המשולש DCE:

$$S_{DCE} = S_{CEK} + S_{CKD}$$
$$= S + \frac{4}{3}S = \frac{7}{3}S$$

יחס הדמיון: מסעיף א $\triangle CEB \sim \triangle DCE$, והצלע CB מתאימה לצלע DE:

$$\frac{CB}{DE} = \frac{35/\sqrt{32}}{7} = \frac{5}{\sqrt{32}}$$

יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\frac{S_{CEB}}{S_{DCE}} = \left(\frac{5}{\sqrt{32}}\right)^2 = \frac{25}{32}$$
$$S_{CEB} = \frac{25}{32} \cdot \frac{7}{3}S = \frac{175}{96}S$$

תשובה: $S_{CEB} = \frac{175}{96}S$

סעיף ד

טענה	נימוק
$\angle KEA = \angle KAE$	הוכח בסעיף ב (שלב 1)
$\angle CKE = \angle KAE + \angle KEA$	זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה (במשולש AKE)
$\angle CKE = 2\angle CAE$	הצבה
$\angle COE = 2\angle CAE$	זווית מרכזית שווה לפעמיים הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת (CE)
$\angle COE = \angle CKE$	כלל המעבר

תשובה: הוכחה: שתי הזוויות שוות ל־$2\angle CAE$.

סעיף ה

נתון $\angle CAE = 45^\circ$. לפי סעיף ד:

$$\angle COE = \angle CKE = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$

נסתכל על המעגל שקוטרו CE. זווית בת 90° שנשענת על הקטע CE היא זווית היקפית הנשענת על קוטר, ולכן קודקודה נמצא על המעגל שקוטרו CE.

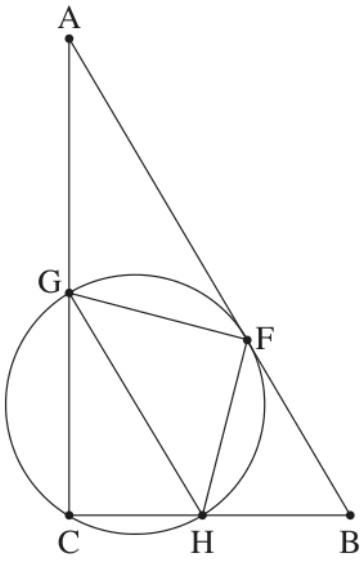
הזוויות COE ו־CKE שתיהן ישרות, ולכן גם O וגם K נמצאות על המעגל שקוטרו CE. כמובן גם C ו־E נמצאות עליו.

לכן הנקודות O, C, E ו־K נמצאות על מעגל אחד.

תשובה: $\angle COE = \angle CKE = 90^\circ$

לכן O ו־K על המעגל שקוטרו CE.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 4



4. המשולש ABC הוא משולש ישר זווית, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

הנקודות F, G, H, נמצאות על הצלעות AB, AC, CB בהתאמה,

כך שהמרובע $GCHF$ חסום במעגל (ראו סרטוט).

נתון: AB משיק למעגל בנקודה F,

$AB \parallel GH$.

א. הוכיחו: $FG = FH$.

ב. **(1)** מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle ACF$.

(2) הוכיחו: $\Delta GFC \sim \Delta FBC$.

קוטר המעגל היוצא מנקודה F חותך את הצלע AC

בנקודה E.

ג. הוכיחו: $\sphericalangle FEB = \sphericalangle FCB$.

פתרון מלא

סעיף א

טענה	נימוק
$\angle AFG = \angle FHG$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני
$\angle AFG = \angle FGH$	זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים ($AB \parallel GH$)
$\angle FHG = \angle FGH$	כלל המעבר
$FG = FH$	במשולש FGH מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות

תשובה: הוכחה: הזווית $\angle FHG$ שווה ל־$\angle AFG$, וזו שווה ל־$\angle FGH$. לכן במשולש FGH מתקיים $FG = FH$.

סעיף ב (1)

המיתרים FG ו־FH שווים (סעיף א), ולכן הקשתות שהם יוצרים שוות, והזוויות ההיקפיות הנשענות עליהן שוות:

$$\angle ACF = \angle GCF = \angle FCH$$

יחד הן יוצרות את הזווית הישרה $\angle ACB$:

$$\angle ACF + \angle FCB = 90^\circ$$
$$\angle ACF = 45^\circ$$

תשובה: $\angle ACF = 45^\circ$

סעיף ב (2)

טענה	נימוק
$\angle GCF = \angle FCB = 45^\circ$	סעיף ב (1)
$\angle BFC = \angle FGC$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני (FC המיתר)

$\triangle GFC \sim \triangle FBC$ ז.ז.

ההתאמה בין הקודקודים:

$$G \leftrightarrow F,\ \ F \leftrightarrow B,\ \ C \leftrightarrow C$$

תשובה: הזוויות $\angle GCF$ ו־$\angle FCB$ שוות ל־45°, והזוויות $\angle FGC$ ו־$\angle BFC$ שוות. לכן המשולשים דומים לפי ז.ז.

סעיף ג

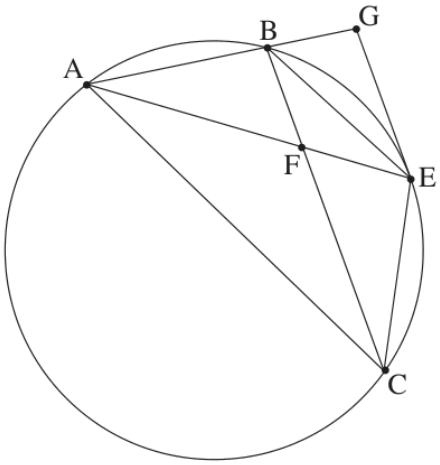
טענה	**נימוק**
$\angle EFB = 90^\circ$	רדיוס (קוטר) מאונך למשיק בנקודת ההשקה
$\angle ECB = 90^\circ$	נתון
$\angle EFB + \angle ECB = 180^\circ$	חיבור

המרובע $EFBC$ בר־חסימה במעגל מרובע שסכום שתי זוויות נגדיות בו הוא 180° הוא בר־חסימה

$\angle FEB = \angle FCB$ זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (FB) שוות זו לזו

תשובה: הזוויות $\angle EFB$ ו־$\angle ECB$ ישרות, ולכן המרובע $EFBC$ בר־חסימה, והזוויות $\angle FEB$ ו־$\angle FCB$ נשענות על אותה קשת.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 4



4. הנקודות A, B ו־C נמצאות על מעגל.

נקודה E היא אמצע הקשת BC, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

בנקודה E מעבירים משיק למעגל.

המשיק חותך את המשך המיתר AB בנקודה G.

המיתרים AE ו־BC נחתכים בנקודה F.

א. הוכיחו: $\Delta ACE \sim \Delta AEG$.

נתון: $AG = 6$, $AE = 3\sqrt{6}$.

ב. חשבו את אורך המיתר AC.

ג. הוכיחו: $BC \parallel GE$.

נתון: שטח המשולש ABF גדול פי 2 משטח המשולש BFE.

ד. חשבו את אורך המיתר AB.

ה. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

טענה	נימוק
$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC}$	נתון: E אמצע הקשת BC
$\angle CAE = \angle EAG$	זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות שוות זו לזו; $\angle EAG$ היא $\angle BAE$
$\angle AEG = \angle ACE$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני
$\triangle ACE \sim \triangle AEG$	ז.ז.

התאמת הקודקודים:

$$A \leftrightarrow A, \quad C \leftrightarrow E, \quad E \leftrightarrow G$$

תשובה: הוכחה: $\triangle ACE \sim \triangle AEG$ לפי ז.ז.

סעיף ב

מהדמיון בסעיף א:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AG}$$

$$AC = \frac{AE^2}{AG} = \frac{(3\sqrt{6})^2}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

תשובה: $AC = 9$

סעיף ג

טענה	נימוק
$\angle GEB = \angle BCE$	זווית בין משיק למיתר EB שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני
$\angle BCE = \angle EBC$	זוויות היקפיות הנשענות על הקשתות השוות BE ו־EC
$\angle GEB = \angle EBC$	משתי הטענות הקודמות
$BC \parallel GE$	זוויות מתחלפות שוות, החותך BE

תשובה: הוכחה: $\angle GEB = \angle EBC$ **– זוויות מתחלפות שוות, ולכן** $BC \parallel GE$.

סעיף ד

היחס $AF : FE$**:** למשולשים ABF ו־BFE יש אותו גובה מהקודקוד B לישר AE, ולכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים:

$$\frac{AF}{FE} = \frac{S_{ABF}}{S_{BFE}} = 2$$

לכן $FE = \frac{1}{2}AF$, ומכאן:

$$AE = AF + FE = \frac{3}{2}AF$$
$$AF = \frac{2}{3}AE$$

משפט תאלס: לפי סעיף ג, $BC \parallel GE$, ולכן גם $BF \parallel GE$. במשולש AGE:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AF}{AE} = \frac{2}{3}$$
$$AB = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

תשובה: $AB = 4$

סעיף ה

למשולשים ABF ו־AFC יש אותו גובה מהקודקוד A לישר BC, ולכן:

$$\frac{S_{ABF}}{S_{AFC}} = \frac{BF}{FC}$$

לפי סעיף א, $\angle BAE = \angle EAC$, כלומר AF חוצה את הזווית BAC במשולש ABC. לפי משפט חוצה הזווית:

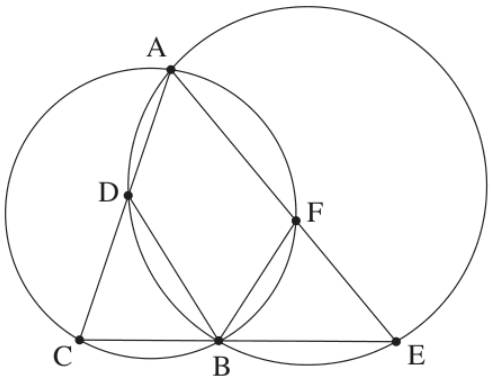
$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{9}$$

לפי סעיפים ב ו־ד: $AB = 4$ ו־$AC = 9$.

$$\frac{S_{ABF}}{S_{AFC}} = \frac{4}{9}$$

תשובה: $\frac{S_{ABF}}{S_{AFC}} = \frac{4}{9}$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 4



4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו־ B (ראו סרטוט).

המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D.

המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.

הקטע CE עובר דרך הנקודה B.

א. הוכיחו כי $\Delta ACE \sim \Delta BCD$.

נתון: $DC = FE$.

ב. הוכיחו כי $\Delta BFE \cong \Delta BCD$.

ג. **(1)** הוכיחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.

(2) הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE.

ד. הוכיחו כי $\sphericalangle DEC = \sphericalangle FCE$.

פתרון מלא

סעיף א

הנקודות A, D, B, E על המעגל הימני, ולכן $ADBE$ מרובע חסום.

טענה	נימוק
$\angle ACE = \angle BCD$	זווית משותפת (D על CA, B על CE)
$\angle ADB + \angle AEB = 180^\circ$	במרובע חסום סכום זוויות נגדיות הוא 180°
$\angle ADB + \angle BDC = 180^\circ$	זוויות צמודות
$\angle BDC = \angle AEB = \angle AEC$	משתי הטענות הקודמות
$\triangle ACE \sim \triangle BCD$	ז.ז.

התאמת הקודקודים: A ל־B, C ל־C, E ל־D.

תשובה: הוכחה: $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ לפי ז.ז.

סעיף ב

הנקודות A, F, B, C על המעגל השמאלי, ולכן $AFBC$ מרובע חסום.

טענה	נימוק
$FE = DC$	נתון
$\angle AFB + \angle ACB = 180^\circ$	במרובע חסום סכום זוויות נגדיות הוא 180°
$\angle AFB + \angle BFE = 180^\circ$	זוויות צמודות
$\angle BFE = \angle ACB = \angle DCB$	משתי הטענות הקודמות (D על CA)
$\angle FEB = \angle CDB$	$\angle FEB = \angle AEC$, ולפי סעיף א $\angle AEC = \angle CDB$
$\triangle BFE \cong \triangle BCD$	ז.צ.ז. (צלע ושתי הזוויות שלידה)

התאמת הקודקודים: F ל־C, E ל־D, B ל־B.

תשובה: הוכחה: $\triangle BFE \cong \triangle BCD$ לפי ז.צ.ז.

סעיף ג (1)

טענה	נימוק

$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{BD}$ מדמיון המשולשים ACE ו־BCD (סעיף א) – יחס צלעות מתאימות

$AC \cdot BD = AE \cdot BC$ כפל בהצלבה

$BD = BE$ צלעות מתאימות במשולשים חופפים (סעיף ב)

$AC \cdot BE = AE \cdot BC$ הצבה של $BD = BE$

תשובה: הוכחה: מהדמיון (סעיף א) $AC \cdot BD = AE \cdot BC$**, ומהחפיפה (סעיף ב)** $BD = BE$**.**

סעיף ג (2)

לפי סעיף ג (1):

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BE}$$

הנקודה B נמצאת על הצלע CE של המשולש ACE ומחלקת אותה ביחס של שתי הצלעות הכולאות את הזווית A. לפי המשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית, AB חוצה את הזווית $\angle CAE$.

(דרך נוספת: מהחפיפה $BF = BC$. במעגל השמאלי מיתרים שווים נשענים על זוויות היקפיות שוות, ולכן $\angle BAF = \angle BAC$.)

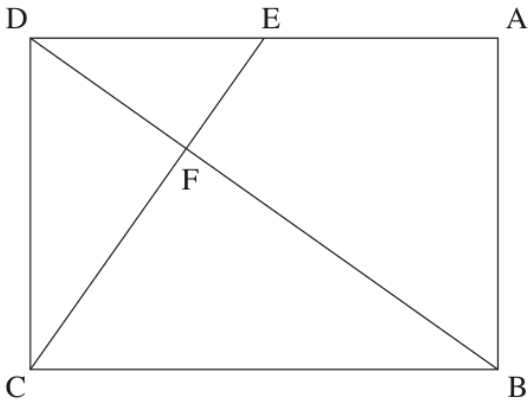
תשובה: הוכחה: לפי המשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית.

סעיף ד

טענה	נימוק
$BD = BE$	צלעות מתאימות במשולשים החופפים (סעיף ב)
$BF = BC$	צלעות מתאימות במשולשים החופפים
$\angle FBE = \angle CBD$	זוויות מתאימות במשולשים החופפים
$\angle DBE = \angle FBC$	זוויות צמודות לזוויות שוות (על ישר אחד C, B, E)
$\angle BED = \frac{180^\circ - \angle DBE}{2}$	זוויות הבסיס שוות במשולש שווה שוקיים BDE
$\angle BCF = \frac{180^\circ - \angle FBC}{2}$	זוויות הבסיס שוות במשולש שווה שוקיים BFC
$\angle BED = \angle BCF$	מהטענות הקודמות
$\angle DEC = \angle FCE$	אותן זוויות (B על CE)

תשובה: הוכחה: זוויות בסיס במשולשים שווי שוקיים עם זוויות ראש שוות.

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 4



4. במלבן $ABCD$, הנקודה E נמצאת על הצלע AD.

הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F.

המרובע $EABF$ הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.

נתון: $DE = EA$.

ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.

נסמן את שטח המשולש DEF ב־S.

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו־BFC באמצעות S.

ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.

נסמן: $DE = a$.

ה. **(1)** הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a.

(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע $EABF$ באמצעות a.

פתרון מלא

סעיף א

טענה	נימוק
$\angle EAB = 90°$	זווית במלבן
$\angle EFB = 180° - 90° = 90°$	במרובע חסום במעגל ($EABF$) סכום זוויות נגדיות $180°$
$\angle BFC = 90°$	זווית צמודה ל־$\angle EFB$
$\angle DAB = \angle BFC$	שתיהן ישרות
$\angle ADB = \angle DBC$	זוויות מתחלפות בין המקבילים $AD \parallel BC$
$\triangle DAB \sim \triangle BFC$	ז.ז.

תשובה: הוכחה: דמיון לפי ז.ז. (שתי זוויות שוות)

סעיף ב

מתקיים $DE \parallel BC$, ולכן $\triangle DEF \sim \triangle BCF$ לפי ז.ז.: זוויות קודקודיות ב־F, וזוויות מתחלפות $\angle EDF = \angle CBF$.

נתון $DE = EA = \frac{1}{2}AD$ ו־$BC = AD$ (צלעות נגדיות במלבן), ולכן:

$$\frac{EF}{FC} = \frac{DE}{BC} = \frac{\frac{1}{2}AD}{AD} = \frac{1}{2}$$

תשובה: $\frac{EF}{FC} = \frac{1}{2}$

סעיף ג

המשולש DFC: למשולשים DEF ו־DFC יש גובה משותף מהקודקוד D לישר EC, ולכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים $\frac{EF}{FC} = \frac{1}{2}$:

$$S_{\triangle DFC} = 2S$$

המשולש BFC: $\triangle BCF \sim \triangle DEF$ ביחס $\frac{BC}{DE} = 2$, ויחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$S_{\triangle BFC} = 2^2 \cdot S = 4S$$

תשובה: שטח DFC: $2S$
שטח BFC: $4S$

סעיף ד

האלכסון BD מחלק את המלבן לשני משולשים חופפים, ולכן:

$$S_{\triangle DAB} = S_{\triangle DCB}$$
$$= S_{\triangle DFC} + S_{\triangle BFC} = 2S + 4S = 6S$$

יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון k:

$$k^2 = \frac{S_{\triangle DAB}}{S_{\triangle BFC}} = \frac{6S}{4S} = 1.5$$
$$k = \sqrt{1.5} \approx 1.22$$

תשובה: יחס הדמיון: $\sqrt{1.5} \approx 1.22$

סעיף ה (1)

במלבן $BC = AD = 2DE = 2a$. לפי הדמיון, הצלע DB במשולש DAB (מול הזווית הישרה) מתאימה לצלע BC במשולש BFC (מול הזווית הישרה), ולכן:

$$\frac{DB}{BC} = \sqrt{1.5}$$
$$DB = 2a \cdot \sqrt{1.5} = \sqrt{6}\,a$$

תשובה: $BD = \sqrt{6}\,a$

סעיף ה (2)

הזווית $\angle EAB = 90^\circ$ היא זווית היקפית במעגל החוסם את $EABF$, ולכן EB הוא קוטר המעגל.

נמצא את AB לפי פיתגורס במשולש DAB:

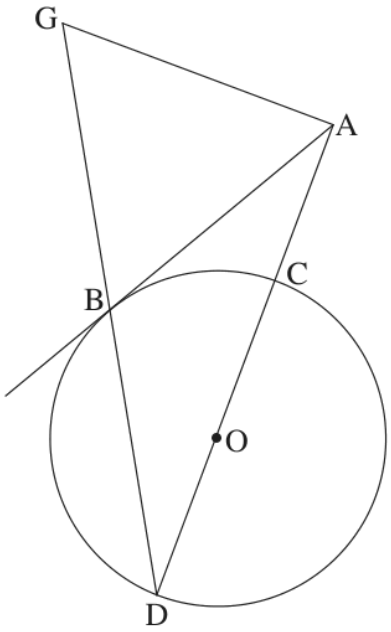
$$AB^2 = DB^2 - AD^2$$
$$= 6a^2 - 4a^2 = 2a^2$$

ובמשולש EAB (עם $EA = a$):

$$EB^2 = EA^2 + AB^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$$
$$EB = \sqrt{3}\,a$$

תשובה: הקוטר: $\sqrt{3}\,a$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 4



4. נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.

מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:

הישר AB משיק למעגל בנקודה B,

הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו־D,

והישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).

הנקודות B, D ו־G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\sphericalangle ADB = \alpha$.

א. הַביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α.

ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$.

נתון: $AC = \frac{1}{2}DC$, $AG = 8$.

ג. חַשבו את R.

נסמן ב־S את שטח המשולש BDC.

ד. **(1)** הוכיחו: $\Delta ADG \sim \Delta BDC$.

(2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.

פתרון מלא

סעיף א

טענה	נימוק
$\angle DBC = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה; DC קוטר, כי AD עובר דרך המרכז
$\angle ABC = \angle ADB = \alpha$	הזווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני
$\angle ABD = \alpha + 90^\circ$	חיבור זוויות
$\angle ABG = 90^\circ - \alpha$	זוויות צמודות משלימות ל־180°, כי D, B, G על ישר אחד
$\angle AGB = 90^\circ - \alpha$	סכום הזוויות במשולש ישר הזווית ADG, כאשר $\angle GAD = 90^\circ$
$\angle BAG = 2\alpha$	סכום הזוויות במשולש ABG

תשובה: $\angle ABG = \angle AGB = 90^\circ - \alpha$

$\angle BAG = 2\alpha$

סעיף ב

טענה	נימוק
$\angle BAC = \angle DAB$	זווית משותפת
$\angle ABC = \angle ADB$	הוכח בסעיף א
$\triangle ABC \sim \triangle ADB$	ז.ז.

$\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{DB}$ יחס הצלעות המתאימות במשולשים דומים שווה

$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{BC}$ היפוך שני האגפים

תשובה: הוכחה: המשולשים ABC ו־ADB דומים לפי ז.ז.
לכן $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{BC}$.

סעיף ג

לפי סעיף א, במשולש ABG שתי זוויות שוות ל־$90^\circ-\alpha$, ולכן הוא שווה שוקיים:

$$AB=AG=8$$

$DC=2R$, ולכן:

$$AC=\tfrac{1}{2}DC=R$$
$$AD=AC+CD=3R$$

מהדמיון בסעיף ב: $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AB}$, כלומר:

$$AB^2=AC\cdot AD$$
$$64=R\cdot 3R\ \Rightarrow\ R^2=\frac{64}{3}$$
$$R=\frac{8}{\sqrt{3}}\approx 4.62$$

תשובה: $R=\frac{8}{\sqrt{3}}\approx 4.62$

סעיף ד (1)

טענה	נימוק
$\angle GAD=\angle CBD=90^\circ$	נתון $AG\perp AD$; זווית היקפית על קוטר – סעיף א
$\angle ADG=\angle BDC$	זווית משותפת, כי B על DG ו־C על DA
$\triangle ADG\sim\triangle BDC$	ז.ז.

תשובה: הוכחה: $\angle GAD=\angle CBD=90^\circ$
וזווית D משותפת, לכן המשולשים דומים לפי ז.ז.

סעיף ד (2)

הקודקוד A מתאים ל־B, והקודקוד D מתאים ל־D. לכן יחס הדמיון הוא:

$$k=\frac{AD}{BD}$$

$AD=3R$. כדי למצוא את BD, נשתמש בסעיפים ב ו־ג:

$$\frac{BC}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{R}{8}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

הנקודה C נמצאת על הקטע AD, ולכן $\angle BDC=\angle BDA=\alpha$. במשולש ישר הזווית BDC:

$$\tan\alpha=\frac{BC}{DB}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ \alpha=30^\circ$$

$$BD=DC\cos 30^\circ=2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=R\sqrt{3}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{3R}{R\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\frac{S_{ADG}}{S_{BDC}} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$
$$S_{ADG} = 3S$$

תשובה: $S_{ADG} = 3S$

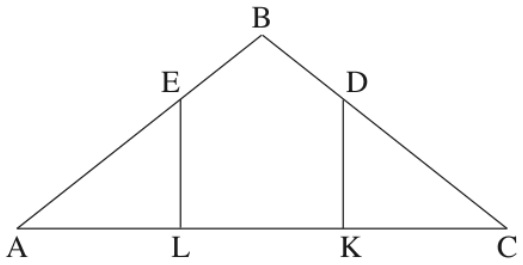
בגרות חורף נבצרים תשפ״ב (2022) • שאלה 4

4. בציור שלפניך מתואר משולש שווה־שוקיים ABC , $BA = BC$.

מנקודה D הנמצאת על השוק BC הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה K .

מנקודה E הנמצאת על השוק BA הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה L .

נתון: $AL = LK = KC$.



א. חשב את $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו־EK נפגשים בנקודה G .

ב. הוכח כי המרובע $BDGE$ הוא דלתון.

נתון: $AC = 45$.

היקף המרובע $EDKL$ הוא 54 .

ג. חשב את אורך הקטע BG .

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע $BDFE$ הוא בר־חסימה במעגל?

נמק את תשובתך.

פתרון מלא

סעיף א

נוריד מ־B את הגובה BT לבסיס AC. במשולש שווה־שוקיים הגובה לבסיס הוא גם תיכון, ולכן:

$$AT = TC = \frac{AC}{2}$$

נסמן $AL = LK = KC = 2x$, ולכן $AC = 6x$ ו־$TC = 3x$.

הישרים DK ו־BT מאונכים שניהם ל־AC, ולכן הם מקבילים. לפי משפט תאלס במשולש BTC:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{TK}{KC} = \frac{3x - 2x}{2x} = \frac{x}{2x}$$
$$\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$$

תשובה: $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$

סעיף ב

באותו אופן, לפי משפט תאלס במשולש BTA שבו $EL \parallel BT$, מתקיים גם:

$$\frac{BE}{EA} = \frac{1}{2}$$

טענה	נימוק
$\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{3}$	מסעיף א ומהחישוב הדומה לשוק BA
$BD = BE$	השוקיים שוות (נתון), וכל אחד מהקטעים הוא שליש מהשוק
$ED \parallel AC$	משפט תאלס ההפוך
$DK \parallel EL$	שני ישרים המאונכים לאותו ישר מקבילים זה לזה
$EDKL$ מלבן	מקבילית שיש בה זווית ישרה: שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ו־$DK \perp AC$

$GD = GE$ במלבן האלכסונים שווים וחוצים זה את זה

$BDGE$ דלתון מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות

תשובה: הוכחה: במרובע יש שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.

סעיף ג

אורכי הקטעים: $AC = 45$, ולכן:

$$AL = LK = KC = 15$$

הקטעים ED ו־LK הם צלעות נגדיות במלבן $EDKL$, ולכן:

$$ED = LK = 15$$

היקף המלבן $EDKL$:

$$2 \cdot 15 + 2 \cdot DK = 54 \;\Rightarrow\; DK = 12$$

המרובע $BDKG$:

- הנקודה G נמצאת על הגובה BT: האלכסון הראשי BG בדלתון חוצה את זווית הראש, ובמשולש שווה־שוקיים חוצה זווית הראש הוא הגובה לבסיס.
- הישרים BG ו־DK מקבילים, כי שניהם מאונכים ל־AC.
- הישרים GK ו־BD מקבילים: EL הוא אנך אמצעי לקטע AK, ולכן המשולש AEK שווה־שוקיים ו־$\angle EKA = \angle A = \angle C$. אלה זוויות מתאימות שוות, ולכן $EK \parallel BC$.

לכן $BDKG$ מקבילית, וצלעות נגדיות בה שוות:

$$BG = DK = 12$$

תשובה: $BG = 12$

סעיף ד

כן, קיימת.

דרך שלוש הנקודות B, D, E, שאינן על ישר אחד, עובר מעגל יחיד.

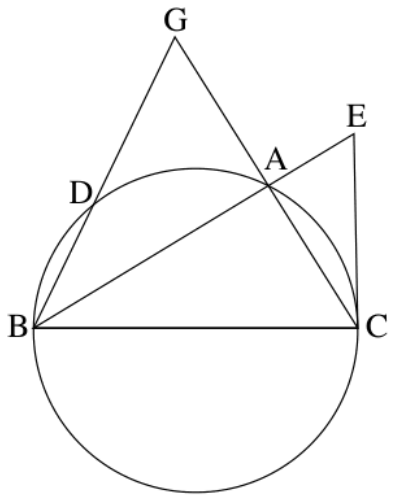
בדלתון $BDGE$ האלכסון הראשי BG הוא האנך האמצעי של האלכסון ED. אנך אמצעי למיתר עובר דרך מרכז המעגל, ולכן הישר BG עובר דרך מרכז המעגל החוסם את המשולש BDE.

נסמן ב־F את הקצה השני של הקוטר שיוצא מ־B. הנקודה F נמצאת על הישר BG ועל המעגל, ולכן המרובע $BDFE$ בר־חסימה במעגל.

שימו לב: הזוויות BDF ו־BEF הן זוויות היקפיות הנשענות על הקוטר BF, ולכן שתיהן ישרות.

תשובה: כן: F הוא הקצה השני של הקוטר היוצא מ־B במעגל העובר דרך B, D, E.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 4



4. משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראה סרטוט).

הצלע BC היא קוטר במעגל.

AG הוא המשך הצלע CA.

הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D.

נתון: $GA = AC$.

א. הוכח כי הישר AB חוצה את $\sphericalangle GBC$.

ב. הוכח כי $\triangle GBC \sim \triangle GAD$.

נתון כי $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC.

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ד. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.

פתרון מלא

סעיף א

טענה	נימוק
$\angle BAC = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר ישרה
$\angle BAG = 90°$	זווית צמודה לזווית ישרה
$GA = AC$	נתון
$AB = AB$	צלע משותפת
$\triangle GAB \cong \triangle CAB$	משפט חפיפה צ.ז.צ
$\angle GBA = \angle CBA$	זוויות מתאימות במשולשים חופפים
BA חוצה את $\angle GBC$	הגדרת חוצה זווית

(מהחפיפה נובע גם $GB = CB = 2R$; נשתמש בזה בסעיף ג.)

תשובה: הוכחה: המשולשים GAB ו־CAB חופפים לפי צ.ז.צ, ולכן $\angle GBA = \angle CBA$.

סעיף ב

טענה	נימוק
$\angle G = \angle G$	זווית משותפת
$\angle GAD = \angle DBC$	במרובע $DACB$ החסום במעגל, זווית חיצונית שווה לזווית הפנימית שמול הזווית הצמודה לה
$\angle GAD = \angle GBC$	אותה זווית (D על GB)
$\triangle GBC \sim \triangle GAD$	ז.ז.

ההתאמה: $G \leftrightarrow G$, $A \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow C$.

תשובה: הוכחה: הזווית G משותפת, והזווית $\angle GAD$ שווה ל־$\angle GBC$ (מרובע חסום). לכן המשולשים דומים לפי ז.ז.

סעיף ג

המרובע $DBCA$ הוא המשולש GBC בלי המשולש GAD, ולכן:

$$S_{GBC} = S_{DBCA} + S_{GAD} = 16S_{GAD}$$

יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$k^2 = 16 \;\Rightarrow\; k = 4$$

לפי ההתאמה מסעיף ב:

$$\frac{GB}{GA} = 4$$

מסעיף א נובע ש־$GB = CB$, ו־BC הוא קוטר, ולכן:

$$GB = CB = 2R$$

נציב:

$$GA = \frac{2R}{4} = \frac{R}{2}$$
$$AC = GA = \frac{R}{2}$$

תשובה: $AC = \frac{R}{2}$

סעיף ד

המשיק ב־C מאונך לקוטר BC, ולכן $\angle BCE = 90^\circ$. גם $\angle BAC = 90^\circ$.

המשולשים CBE ו־ABC דומים לפי ז.ז.: הזווית B משותפת, ולשניהם זווית ישרה ($\angle BCE = \angle BAC = 90^\circ$).

ההתאמה: $C \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow B$, $E \leftrightarrow C$. יחס הדמיון:

$$k = \frac{CB}{AB}$$

נחשב את AB לפי משפט פיתגורס במשולש ABC:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2$$
$$= 4R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{15R^2}{4}$$

יחס השטחים הוא ריבוע יחס הדמיון:

$$\frac{S_{CBE}}{S_{ABC}} = \frac{CB^2}{AB^2}$$
$$= \frac{4R^2}{\frac{15R^2}{4}} = \frac{16}{15}$$

תשובה: פי $\frac{16}{15}$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.