חדו"א – פולינום, רציונלית ושורש – כל השאלות עם פתרונות מלאים

פולינום, רציונלית ושורש – הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י"א (שאלון 571) • 35 שאלות

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{6(x-1)^2}{x^2+a}$.

a הוא פרמטר חיובי.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתון כי שיעור ה־ y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $f(x)$ הוא 7.5.

ג. מצאו את הערך של a.

בעבור הערך של a שמצאתם ענו על הסעיפים ד–ה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת $g(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

ה. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $-a\le x\le 0$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נבדוק מתי המכנה מתאפס. לכל x מתקיים $x^2\geq 0$, ונתון $a>0$, ולכן:

$$x^2+a>0$$

המכנה אף פעם אינו מתאפס, והפונקציה מוגדרת לכל x.

תשובה: כל x.

סעיף א (2)

אסימפטוטה אנכית: אין, כי המכנה אינו מתאפס.

אסימפטוטה אופקית: נפתח את המונה: $6(x-1)^2=6x^2-12x+6$. המעלות במונה ובמכנה שוות (2), ולכן:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^2-12x+6}{x^2+a}=\frac{6}{1}=6$$

תשובה: $y=6$ (אין אסימפטוטה אנכית).

סעיף ב

נגזור לפי נגזרת המנה. המונה של $f'(x)$:

$$12(x-1)(x^2+a)-6(x-1)^2\cdot 2x$$

נוציא גורם משותף $12(x-1)$:

$$= 12(x-1)\left[x^2 + a - x(x-1)\right]$$
$$= 12(x-1)(x+a)$$
$$f'(x) = \frac{12(x-1)(x+a)}{(x^2+a)^2}$$
$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 1 \text{ או } x = -a$$

$a > 0$, ולכן $-a < 1$. טבלת סימנים (המכנה חיובי תמיד):

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < -a$	+	עולה
$x = -a$	0	מקסימום
$-a < x < 1$	−	יורדת
$x = 1$	0	מינימום
$x > 1$	+	עולה

$$f(1) = 0$$
$$f(-a) = \frac{6(-a-1)^2}{a^2+a} = \frac{6(a+1)^2}{a(a+1)}$$
$$f(-a) = \frac{6(a+1)}{a}$$

תשובה: מקסימום $\left(-a,\ \frac{6(a+1)}{a}\right)$**, מינימום** $(1, 0)$**.**

סעיף ג

שיעור ה־y של נקודת המקסימום הוא 7.5:

$$\frac{6(a+1)}{a} = 7.5$$
$$6a + 6 = 7.5a \;\Rightarrow\; 1.5a = 6 \;\Rightarrow\; a = 4$$

תשובה: $a = 4$

סעיף ד

עבור $a = 4$:

$$f(x) = \frac{6(x-1)^2}{x^2+4}$$

- מקסימום: $(-4,\ 7.5)$.
- מינימום: $(1, 0)$ – שם הגרף משיק לציר ה־x.
- חיתוך עם ציר ה־y: $(0,\ 1.5)$, כי $f(0) = \frac{6}{4} = 1.5$.
- אסימפטוטה אופקית: $y = 6$.
- הפונקציה אינה שלילית בשום מקום.

הגרף חותך את האסימפטוטה:

$$6(x-1)^2 = 6(x^2+4) \;\Rightarrow\; x = -1.5$$

לכן משמאל הגרף מתקרב ל־$y = 6$ מלמעלה, ומימין – מלמטה.

סקיצה של f: מקסימום (-4, 7.5), מינימום (1,0), אסימפטוטה y=6

תשובה: מקסימום $(-4, 7.5)$, מינימום $(1, 0)$, חיתוך עם ציר ה־y ב־$(0, 1.5)$, אסימפטוטה $y = 6$.
סקיצה של f: מקסימום (-4, 7.5), מינימום (1,0), אסימפטוטה y=6

סעיף ה (1)

הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת לכל x, כי המכנה שלה $(x^2+4)^2$ חיובי תמיד. לכן צריך רק שהמכנה של g, כלומר $f^2(x)$, לא יתאפס:

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; 6(x-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$$

תשובה: כל x פרט ל־$x = 1$.

סעיף ה (2)

בתחום ההגדרה $f^2(x) > 0$, ולכן הסימן של $g(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ הפוך לסימן של $f'(x)$. לפי טבלת הסימנים מסעיף ב (עם $a = 4$):

x	$f'(x)$	$g(x)$
$x < -4$	+	שלילית
$-4 < x < 1$	–	חיובית
$x > 1$	+	שלילית

תשובה: חיובית: $-4 < x < 1$
שלילית: $x < -4$ **או** $x > 1$

סעיף ה (3)

נשים לב ש־g היא הנגזרת של $\frac{1}{f(x)}$:

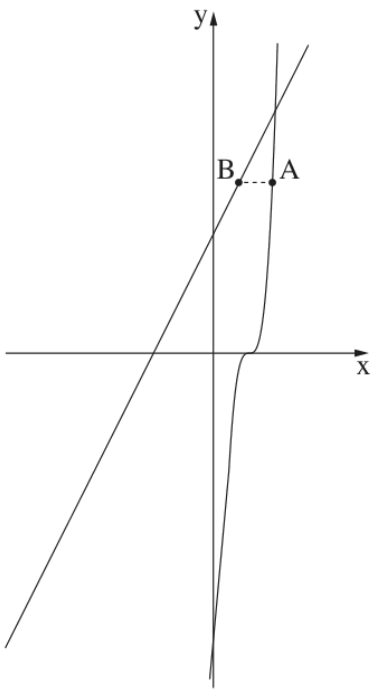
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} = g(x)$$

לכן $\frac{1}{f(x)}$ היא פונקציה קדומה של g. בין $x = -4$ ל־$x = 0$ הפונקציה g אינה שלילית (סעיף ה (2)), ולכן:

$$S = \int_{-4}^{0} g(x)\,dx = \left[\frac{1}{f(x)}\right]_{-4}^{0}$$
$$= \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(-4)} = \frac{1}{1.5} - \frac{1}{7.5}$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$$

תשובה: $\frac{8}{15}$ יחידות שטח.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתוארים גרף הפונקצייה $f(x)=(4x-2)^3$ והישר $y=3x+b$.

b הוא פרמטר חיובי.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ כך ששיעור ה־x שלה קטן משיעור ה־x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה B נמצאת על הישר הנתון כך שהקטע AB מקביל לציר ה־x.

נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה A.

נתון: $0\le t\le 0.7$.

א. הביעו באמצעות b ו־t את שיעור ה־x של הנקודה B.

ב. **(1)** מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.

(2) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

פתרון מלא

סעיף א

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה, ולכן שיעוריה:

$$A\left(t,\ (4t-2)^3\right)$$

הנקודה B נמצאת על הישר $y=3x+b$ ובאותו גובה כמו A:

$$3x_B+b=(4t-2)^3$$
$$x_B=\frac{(4t-2)^3-b}{3}$$

תשובה: $x_B=\frac{(4t-2)^3-b}{3}$

סעיף ב (1)

AB מקביל לציר ה־x ו־A מימין ל־B, ולכן:

$$AB=x_A-x_B=t-\frac{(4t-2)^3-b}{3}$$
$$AB=\frac{3t-(4t-2)^3+b}{3}$$

נגזור לפי t (b קבוע):

$$AB'(t)=\frac{3-3(4t-2)^2\cdot 4}{3}$$
$$AB'(t)=1-4(4t-2)^2$$

השוואה ל־0:

$$(4t-2)^2=\frac{1}{4}$$

$$4t-2=\pm\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; t=\frac{3}{8} \text{ או } t=\frac{5}{8}$$

t	AB'	AB
$t=0$		מקסימום (קצה)
$0<t<\frac{3}{8}$	−	יורד
$t=\frac{3}{8}$	0	מינימום
$\frac{3}{8}<t<\frac{5}{8}$	+	עולה
$t=\frac{5}{8}$	0	מקסימום
$\frac{5}{8}<t<0.7$	−	יורד
$t=0.7$		מינימום (קצה)

נשווה את שתי נקודות המינימום (בלי $\frac{b}{3}$, שמשותף לכולן):

$$t=\tfrac{3}{8}:\quad \frac{3\cdot\frac{3}{8}-(-\frac{1}{2})^3}{3}=\frac{\frac{9}{8}+\frac{1}{8}}{3}=\frac{5}{12}$$

$$t=0.7:\quad \frac{2.1-0.8^3}{3}=\frac{1.588}{3}\approx 0.529$$

$\frac{5}{12}\approx 0.417$ קטן מ־0.529, ולכן המינימום בתחום מתקבל ב־$t=\frac{3}{8}$.

תשובה: $t=\frac{3}{8}=0.375$

סעיף ב (2)

נשווה את שתי נקודות המקסימום מטבלת סעיף ב (1) (שוב בלי $\frac{b}{3}$):

$$t=0:\quad \frac{0-(-2)^3}{3}=\frac{8}{3}$$

$$t=\tfrac{5}{8}:\quad \frac{\frac{15}{8}-(\frac{1}{2})^3}{3}=\frac{\frac{14}{8}}{3}=\frac{7}{12}$$

$\frac{8}{3}$ גדול מ־$\frac{7}{12}$, ולכן המקסימום בתחום מתקבל בקצה $t=0$.

תשובה: $t=0$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{ax}{(x-3)^2}$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

a הוא פרמטר חיובי.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x)+0.5$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

נתון כי לגרף הפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם ציר ה־x.

ג. מצאו את הערך של a.

הציבו בפונקצייה $g(x)$ את הערך של a שמצאתם, וענו על סעיף ד.

נתונה הפונקצייה $h(x)=g(x)\cdot g'(x)$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

ד. **(1)** רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $h(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$ ועל ידי ציר ה־x בתחום $-9\leq x\leq 0$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

אסימפטוטה אנכית: המכנה מתאפס ב־$x=3$, והמונה שם $3a\neq 0$ (כי $a>0$), ולכן $x=3$ היא אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה אופקית: מעלת המונה (1) קטנה ממעלת המכנה (2), ולכן כאשר $x\to\pm\infty$: $f(x)\to 0$.
האסימפטוטה האופקית היא $y=0$.

תשובה: אסימפטוטות: $x=3,\ y=0$

סעיף א (2)

נגזור לפי כלל המנה:

$$f'(x)=\frac{a(x-3)^2-ax\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}$$

נצמצם ב־$(x-3)$:

$$f'(x)=\frac{a(x-3)-2ax}{(x-3)^3}$$

$$f'(x)=\frac{-a(x+3)}{(x-3)^3}$$

$f'(x)=0\Rightarrow x=-3$, ו:

$$f(-3)=\frac{-3a}{(-6)^2}=-\frac{a}{12}$$

x $f'(x)$ $f(x)$

$x < -3$	$-$	↘
-3	0	מינ'
$-3 < x < 3$	$+$	↗
$x > 3$	$-$	↘

תשובה: מינימום בנקודה $\left(-3,\ -\frac{a}{12}\right)$

סעיף ב

נאסוף את הנתונים: אסימפטוטות $x = 3,\ y = 0$; מינימום $\left(-3, -\frac{a}{12}\right)$; חיתוך עם הצירים רק בראשית $(0,0)$; יורדת ב־$x < -3$ וב־$x > 3$, עולה ב־$-3 < x < 3$. כאשר $x \to 3$ משני הצדדים $f(x) \to +\infty$ (המונה חיובי והמכנה ריבוע).

סקיצה של f: אסימפטוטות x=3 ו-y=0, מינימום (-3,-a/12), עוברת בראשית

תשובה: סקיצה: עוברת בראשית, מינימום בנקודה $\left(-3, -\frac{a}{12}\right)$**, אסימפטוטות** $x = 3,\ y = 0$**.**

סעיף ג

$f(x) = -0.5 \iff g(x) = 0$, כלומר צריך שלישר $y = -0.5$ תהיה נקודה משותפת אחת בדיוק עם גרף f.

- עבור $x > 3$: $f(x) > 0$, ולכן אין שם פתרון.
- עבור $x < 3$: כאשר x שואף למינוס אינסוף, f שואפת ל־0. משם f יורדת עד המינימום $-\frac{a}{12}$, ואחר כך עולה לפלוס אינסוף. לכן לישר $y = -0.5$ יש נקודה משותפת אחת בדיוק רק אם הוא עובר דרך נקודת המינימום. אם הוא נמוך יותר – אין נקודות משותפות, ואם גבוה יותר – יש שתיים.

$$-\frac{a}{12} = -0.5 \Rightarrow a = 6$$

תשובה: $a = 6$

סעיף ד (1)

עם $a = 6$:

$$g(x) = \frac{6x}{(x-3)^2} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{12x + (x-3)^2}{2(x-3)^2} = \frac{(x+3)^2}{2(x-3)^2}$$

לכן $g(x) \geq 0$ לכל $x \neq 3$, ו־$g(x) = 0$ רק ב־$x = -3$.

$g'(x) = f'(x)$, ולכן לפי הטבלה בסעיף א: $g' > 0$ בקטע $-3 < x < 3$, ו־$g' < 0$ כאשר $x < -3$ או $x > 3$.

$h(x) = g(x) \cdot g'(x)$, ו־$g(x) > 0$ לכל $x \neq -3$, ולכן הסימן של h הוא הסימן של g'. בצורה מפורשת:

$$h(x) = \frac{-3(x+3)^3}{(x-3)^5}$$

תשובה: חיוביות: $-3 < x < 3$**; שליליות:** $x < -3$ **או** $x > 3$**.**

סעיף ד (2)

$h(x) = g(x) \cdot g'(x)$, ולכן פונקציה קדומה של h היא:

$$H(x) = \frac{g^2(x)}{2}$$

(כי $\left(\frac{g^2}{2}\right)' = g \cdot g'$.) נחשב ערכים של g:

$$g(-9) = \frac{(-6)^2}{2 \cdot (-12)^2} = \frac{36}{288} = \frac{1}{8}$$

$$g(-3) = 0$$

$$g(0) = \frac{9}{2 \cdot 9} = \frac{1}{2}$$

בקטע $-9 \le x \le -3$ מתקיים $h \le 0$ (השטח מתחת לציר), ובקטע $-3 \le x \le 0$ מתקיים $h \ge 0$. לכן נחשב שני אינטגרלים:

$$\int_{-9}^{-3} h\,dx = \frac{g^2(-3)}{2} - \frac{g^2(-9)}{2}$$

$$= 0 - \frac{1}{128} = -\frac{1}{128}$$

$$\int_{-3}^{0} h\,dx = \frac{g^2(0)}{2} - \frac{g^2(-3)}{2}$$

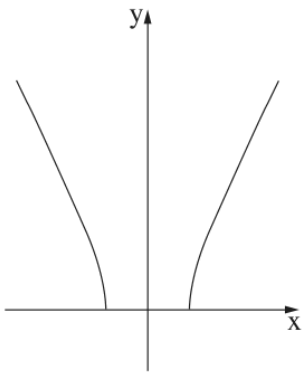
$$= \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

השטח (סכום הערכים המוחלטים):

$$S = \frac{1}{128} + \frac{1}{8} = \frac{17}{128} \approx 0.133$$

תשובה: השטח: $\frac{17}{128} \approx 0.133$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=2\sqrt{x^2-1}$.

נתון הישר $y=3x-3$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב.

דרך הנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר המקביל לציר ה־y וחותך את הישר הנתון בנקודה B.

ישר המקביל לציר ה־x וחותך את הישר הנתון בנקודה C.

נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה A.

ג. **(1)** הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

(2) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC.

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו־AC הוא מקסימלי.

פתרון מלא

סעיף א

ביטוי בתוך שורש ריבועי חייב להיות אי־שלילי:

$$x^2-1\geq 0 \Rightarrow x^2\geq 1$$
$$\Rightarrow x\leq -1$$

או

$$x\geq 1$$

תשובה: תחום: $x\leq -1$ **או** $x\geq 1$

סעיף ב

נשווה:

$$2\sqrt{x^2-1}=3x-3$$

אגף שמאל אי־שלילי, ולכן צריך גם $3x-3\geq 0$, כלומר $x\geq 1$. נעלה בריבוע:

$$4(x^2-1)=9(x-1)^2$$
$$4x^2-4=9x^2-18x+9$$
$$5x^2-18x+13=0$$
$$x_{1,2}=\frac{18\pm\sqrt{324-260}}{10}$$
$$=\frac{18\pm 8}{10}$$
$$x=1$$

או

$$x=2.6$$

שני הפתרונות מקיימים $x\geq 1$. בדיקה:

$f(2.6) = 2\sqrt{5.76} = 4.8$
$3 \cdot 2.6 - 3 = 4.8$ ✓

תשובה: נקודות החיתוך $(1, 0)$ **ו־**$(2.6,\ 4.8)$

סעיף ג (1)

$A(t,\ 2\sqrt{t^2-1})$, כאשר $1 < t < 2.6$.

AB מקביל לציר ה־y, ולכן ל־B אותו שיעור x: $B(t,\ 3t-3)$.

לפי סעיף ב, הגרף של f והישר נחתכים רק ב־$x = 1$ וב־$x = 2.6$. שתי הפונקציות רציפות, ולכן בתוך הקטע $1 < t < 2.6$ אחת מהן נמצאת מעל השנייה לכל אורכו, ומספיק לבדוק נקודה אחת. עבור $t = 2$:

$f(2) = 2\sqrt{3} \approx 3.46 > 3 = y(2)$

לכן בכל הקטע גרף f נמצא מעל הישר, ו:

$AB = y_A - y_B$
$= 2\sqrt{t^2-1} - (3t-3)$
$= 2\sqrt{t^2-1} - 3t + 3$

הגרף של f, הישר y=3x-3, והנקודות A, B, C

תשובה: $AB = 2\sqrt{t^2-1} - 3t + 3$

סעיף ג (2)

AC מקביל לציר ה־x, ולכן ל־C אותו שיעור y כמו ל־A. נציב בישר:

$3x - 3 = 2\sqrt{t^2-1}$
$x_C = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{t^2-1}$

הישר עולה, ו־A נמצאת מעליו, ולכן C נמצאת מימין ל־A:

$AC = x_C - x_A$
$= 1 + \frac{2}{3}\sqrt{t^2-1} - t$

תשובה: $AC = \frac{2}{3}\sqrt{t^2-1} - t + 1$

סעיף ד

נסמן את סכום האורכים:

$S(t) = AB + AC$
$= \frac{8}{3}\sqrt{t^2-1} - 4t + 4$

נגזור:

$$S'(t) = \frac{8}{3} \cdot \frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}} - 4$$
$$= \frac{8t}{3\sqrt{t^2-1}} - 4$$

נשווה לאפס:

$$\frac{8t}{3\sqrt{t^2-1}} = 4$$

$$2t = 3\sqrt{t^2-1}$$
$$4t^2 = 9t^2 - 9$$
$$t^2 = \frac{9}{5}$$
$$t = \sqrt{1.8} = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.342$$

הערך חיובי ונמצא בתחום $1 < t < 2.6$.

t	$S'(t)$	$S(t)$
$1 < t < \frac{3}{\sqrt{5}}$	$+$	↗
$\frac{3}{\sqrt{5}}$	0	מקס'
$\frac{3}{\sqrt{5}} < t < 2.6$	$-$	↘

בדיקת סימן הנגזרת:

$$S'(1.1) \approx 2.4 > 0$$
$$S'(2) \approx -0.92 < 0$$

תשובה: $t = \sqrt{1.8} = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.34$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{\sqrt{5x^2-kx}}{x^3}$, k הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות k את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=-f(x)$.

שיעור ה־ x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $h(x)$ הוא 1.6 .

ב. מצאו את הערך של k .

הציבו $k=8$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ו.

ג. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=(f(x))^2$ שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 2 .

ה. האם ערך הביטוי $\int_a^{a+1}g(x)dx$ שווה, גדול או קטן בהשוואה לערך הביטוי $\int_a^{a+1}f(x)dx$? נמקו את תשובתכם.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=2$ ו־ $x=6$.

פתרון מלא

סעיף א

שני תנאים: הביטוי שבתוך השורש אי־שלילי, והמכנה שונה מאפס.

$$5x^2-kx\geq 0 \;\Rightarrow\; x(5x-k)\geq 0$$

זו פרבולה „מחייכת" עם שורשים $x=0$ ו־$x=\frac{k}{5}$, כאשר $k>0$; לכן:

$$x\leq 0 \quad \text{או} \quad x\geq \frac{k}{5}$$

בנוסף $x^3\neq 0$, כלומר $x\neq 0$:

$$x<0 \quad \text{או} \quad x\geq \frac{k}{5}$$

תשובה: $x<0$ **או** $x\geq \frac{k}{5}$

סעיף ב

בנקודת חיתוך של f ו־$h=-f$:

$$f(x)=-f(x) \;\Rightarrow\; 2f(x)=0 \;\Rightarrow\; f(x)=0$$

כלומר נקודת החיתוך היא נקודת אפס של f, ושם $\sqrt{5x^2-kx}=0$. נציב $x=1.6$:

$$5\cdot 1.6^2-1.6k=0$$

$$12.8=1.6k \;\Rightarrow\; k=8$$

תשובה: $k=8$

סעיף ג (1)

עבור $k=8$: $f(x)=\frac{\sqrt{5x^2-8x}}{x^3}$, בתחום $x<0$ או $x\geq 1.6$.

אסימפטוטה אנכית. המכנה מתאפס ב־$x=0$ (מתקרבים אליו רק משמאל). כש־$x\to 0^-$ המונה שואף ל־0 לאט יותר מהמכנה:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(5-\frac{8}{x}\right)}}{x^3}=\frac{|x|\sqrt{5-\frac{8}{x}}}{x^3}$$

כש־$x\to 0^-$: $\sqrt{5-\frac{8}{x}}\to\infty$ ו־$\frac{|x|}{x^3}=-\frac{1}{x^2}\to-\infty$, ולכן $f(x)\to-\infty$. האסימפטוטה: $x=0$.

אסימפטוטה אופקית. כש־$x\to\pm\infty$:

$$f(x)=\frac{\sqrt{5-\frac{8}{x}}}{x^2}\cdot\frac{|x|}{x}\to 0$$

האסימפטוטה: $y=0$.

תשובה: $x=0$**,** $y=0$

סעיף ג (2)

נגזור לפי נגזרת המנה:

$$f'(x)=\frac{\frac{10x-8}{2\sqrt{5x^2-8x}}\cdot x^3-\sqrt{5x^2-8x}\cdot 3x^2}{x^6}$$

נכפול מונה ומכנה ב־$2\sqrt{5x^2-8x}$ ונצמצם ב־x^2:

$$f'(x)=\frac{x(10x-8)-6(5x^2-8x)}{2x^4\sqrt{5x^2-8x}}$$
$$=\frac{-20x^2+40x}{2x^4\sqrt{5x^2-8x}}$$
$$=\frac{10(2-x)}{x^3\sqrt{5x^2-8x}}$$
$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ x=2$$

ב־$x=1.6$ הנגזרת אינה מוגדרת – זו נקודת קצה של התחום.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<0$	–	יורדת
$x=1.6$	–	קצה התחום
$1.6<x<2$	+	עולה
$x=2$	0	מקסימום
$x>2$	–	יורדת

$$f(1.6)=0$$
$$f(2)=\frac{\sqrt{20-16}}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

הפונקציה עולה מימין ל־$x=1.6$, ולכן $(1.6,\ 0)$ היא נקודת מינימום (קצה). בתחום $x<0$ הפונקציה יורדת כל הזמן, אין בו קיצון.

תשובה: מינימום (קצה) $(1.6,\ 0)$**; מקסימום** $\left(2,\ \frac{1}{4}\right)$

סעיף ג (3)

נשתמש בכל הממצאים: בתחום $x<0$ הפונקציה שלילית ויורדת, מתקרבת ל־$y=0$ משמאל ויורדת ל־$-\infty$ ליד $x=0$. בתחום $x\geq 1.6$ היא מתחילה ב־$(1.6,0)$, עולה עד המקסימום $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ ואחר כך יורדת ומתקרבת ל־$y=0$.

סקיצה של f(x)

תשובה: ענף שמאלי, ב־$x<0$: שלילי ויורד, בין האסימפטוטות $y=0$ ו־$x=0$.
ענף ימני: מתחיל ב־$(1.6,0)$, עולה עד המקסימום $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ ויורד אל $y=0$.

סעיף ד

$g(x)=\left(f(x)\right)^2=\frac{5x^2-8x}{x^6}=\frac{5x-8}{x^5}$, באותו תחום.

- $g(x)\geq 0$ תמיד, כי זהו ריבוע, ו־$g(x)=0$ רק ב־$x=1.6$.
- כאשר $x\to 0^-$: $f\to-\infty$, ולכן $g\to+\infty$. כלומר $x=0$ אסימפטוטה אנכית.
- כש־$f\to 0$ גם $g\to 0$: $y=0$ אסימפטוטה אופקית.
- $g'=2f\cdot f'$: ב־$x<0$ גם $f<0$ וגם $f'<0$, לכן $g'>0$ ו־g עולה. ב־$x>1.6$ $f>0$, ולכן ל־g אותם תחומי עלייה וירידה כמו ל־f: מקסימום ב־$x=2$, $g(2)=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$.

סקיצה של g(x)

תשובה: ענף שמאלי, ב־$x<0$: חיובי ועולה, בין האסימפטוטות $y=0$ ו־$x=0$.
ענף ימני: מתחיל ב־$(1.6,0)$, עולה עד המקסימום $\left(2,\frac{1}{16}\right)$ ויורד אל $y=0$.

סעיף ה

בקטע $[a,\ a+1]$ כאשר $a>2$: לפי סעיף ג, f יורדת עבור $x>2$, ולכן שם

$$0<f(x)<f(2)=\tfrac{1}{4}<1$$

עבור מספר בין 0 ל־1 הריבוע קטן מהמספר עצמו:

$$g(x)=f^2(x)<f(x)$$

שתי הפונקציות חיוביות בקטע, והגרף של g נמצא כולו מתחת לגרף של f, ולכן השטח שמתחתיו קטן יותר:

$$\int_a^{a+1} g(x)\,dx<\int_a^{a+1} f(x)\,dx$$

תשובה: קטן, כי בקטע מתקיים $0<f(x)<1$, ולכן $g(x)=f^2(x)<f(x)$.

סעיף ו

בקטע $2\leq x\leq 6$ מתקיים $g(x)\geq 0$, ולכן השטח הוא האינטגרל:

$$S=\int_2^6 \frac{5x-8}{x^5}\,dx=\int_2^6 \left(5x^{-4}-8x^{-5}\right)dx$$

פונקציה קדומה:

$$G(x)=-\frac{5}{3x^3}+\frac{2}{x^4}$$

נציב את הגבולות:

$$G(6)=-\frac{5}{648}+\frac{2}{1296}=-\frac{1}{162}$$
$$G(2)=-\frac{5}{24}+\frac{2}{16}=-\frac{1}{12}$$

$$S = G(6) - G(2) = -\frac{1}{162} + \frac{1}{12}$$
$$= \frac{25}{324} \approx 0.077$$

תשובה: $S = \frac{25}{324} \approx 0.077$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 8

8. נתונה הפונקצייה $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 8kx$, המוגדרת לכל x .

k הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

הנקודה A היא נקודת הפיתול של הפונקצייה $f(x)$.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A .

נתון כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ב. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k .

דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה־ x החותך אותו בנקודה B , ואנך לציר ה־ y החותך אותו בנקודה C .

נתון ריבוע I שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AB , וריבוע II שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AC .

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו סכום שטחי הריבועים I ו־ II הוא מינימלי (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

פתרון מלא

סעיף א

$$f'(x) = 3kx^2 - 6x + 8k$$
$$f''(x) = 6kx - 6$$
$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{k}$$

f'' היא פונקציה קווית, כי $k \neq 0$, ולכן היא מחליפה סימן ב־ $x = \frac{1}{k}$ – זו נקודת פיתול.

$$f\left(\tfrac{1}{k}\right) = k \cdot \frac{1}{k^3} - 3 \cdot \frac{1}{k^2} + 8k \cdot \frac{1}{k}$$
$$= \frac{1}{k^2} - \frac{3}{k^2} + 8 = 8 - \frac{2}{k^2}$$

תשובה: $A\left(\frac{1}{k},\ 8 - \frac{2}{k^2}\right)$

סעיף ב

ברביע הראשון שני השיעורים חיוביים:

$$x_A = \frac{1}{k} > 0 \;\Rightarrow\; k > 0$$
$$y_A = 8 - \frac{2}{k^2} > 0 \;\Rightarrow\; k^2 > \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow\; k > \tfrac{1}{2} \text{ או } k < -\tfrac{1}{2}$$

יחד עם $k > 0$:

$$k > \tfrac{1}{2}$$

תשובה: $k > \frac{1}{2}$

סעיף ג

B על ציר x מתחת ל־A ו־C על ציר y משמאל ל־A, ולכן (רביע ראשון):

$$AB = y_A = 8 - \frac{2}{k^2} \qquad AC = x_A = \frac{1}{k}$$

סכום שטחי הריבועים, עבור $k > \frac{1}{2}$:

$$S(k) = \left(8 - \frac{2}{k^2}\right)^2 + \frac{1}{k^2}$$

נגזור לפי כלל השרשרת, כאשר $\left(-\frac{2}{k^2}\right)' = \frac{4}{k^3}$:

$$S'(k) = 2\left(8 - \frac{2}{k^2}\right) \cdot \frac{4}{k^3} - \frac{2}{k^3}$$
$$= \frac{2}{k^3}\left(32 - \frac{8}{k^2} - 1\right)$$
$$= \frac{2}{k^3}\left(31 - \frac{8}{k^2}\right)$$
$$S'(k) = 0 \;\Rightarrow\; k^2 = \frac{8}{31}$$
$$k = \sqrt{\frac{8}{31}} \approx 0.508$$

הערך בתחום, כי $0.508 > 0.5$. טבלת סימנים, כאשר $\frac{2}{k^3} > 0$:

k	$S'(k)$	$S(k)$
$-\frac{1}{2} < k < \sqrt{\frac{8}{31}}$	–	יורדת
$k = \sqrt{\frac{8}{31}}$	0	מינימום
$k > \sqrt{\frac{8}{31}}$	+	עולה

לכן הסכום מינימלי עבור $k = \sqrt{\frac{8}{31}}$.

תשובה: $k = \sqrt{\frac{8}{31}} \approx 0.508$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2ax}{(x^2-16)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$ שפונקציית הנגזרת שלה היא $g'(x)=f(x)+1$.

תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ושל פונקציית הנגזרת $g'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-2$.

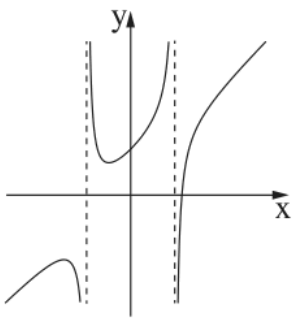
ב. מצאו את הערך של a.

הציבו את הערך של a שמצאתם בפונקצייה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג–ד.

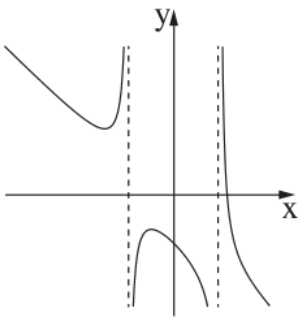
נתון כי הפונקצייה $g(x)$ עוברת בנקודה $(2\ ,\ 7)$.

ג. כתבו ביטוי אלגברי אפשרי לפונקצייה $g(x)$.

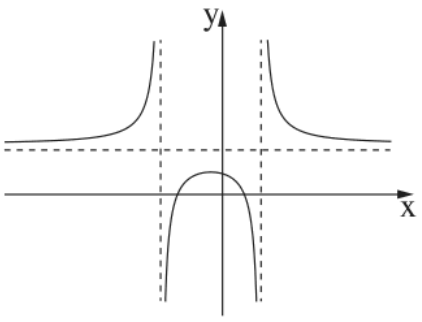
ד. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם הוא גרף אפשרי של הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.



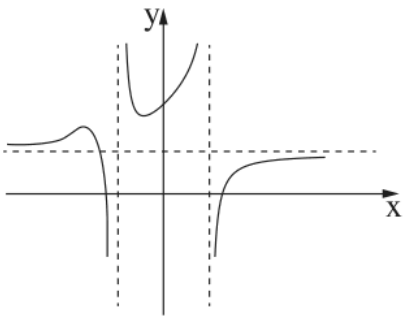
II



I



IV



III

פתרון מלא

סעיף א (1)

הפונקציה מוגדרת כשהמכנה שונה מאפס:

$$(x^2-16)^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; x^2 \neq 16$$

$$x \neq 4, \quad x \neq -4$$

תשובה: $x \neq \pm 4$

סעיף א (2)

אסימפטוטות אנכיות: ב־$x = \pm 4$ המכנה מתאפס. המונה שם הוא $2ax = \pm 8a$, והוא שונה מאפס כי $a > 0$. לכן:

$$x = 4, \qquad x = -4$$

אסימפטוטה אופקית: מעלת המונה (1) קטנה ממעלת המכנה (4), ולכן כאשר $x \to \pm\infty$, $f(x) \to 0$:

$$y = 0$$

תשובה: אנכיות: $x = 4$ **ו־**$x = -4$**. אופקית:** $y = 0$**.**

סעיף א (3)

נגזור לפי נגזרת המנה. נגזרת המכנה:

$$\left[(x^2-16)^2\right]' = 4x(x^2-16)$$

ולכן המונה של $f'(x)$ הוא:

$$2a(x^2-16)^2 - 2ax \cdot 4x(x^2-16)$$

והמכנה הוא $(x^2-16)^4$. נצמצם את המונה והמכנה בגורם המשותף:

$$x^2-16$$

$$f'(x) = \frac{2a(x^2-16) - 8ax^2}{(x^2-16)^3}$$

$$f'(x) = \frac{-2a(3x^2+16)}{(x^2-16)^3}$$

נתון $a > 0$, ותמיד $3x^2 + 16 > 0$, ולכן המונה תמיד שלילי ו־$f'(x) \neq 0$: אין נקודות קיצון. הסימן של $f'(x)$ הפוך לסימן של $(x^2-16)^3$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < -4$	−	יורדת
$-4 < x < 4$	+	עולה
$x > 4$	−	יורדת

עולה בתחום $-4 < x < 4$. יורדת בתחומים $x < -4$ ו־$x > 4$.

תשובה: עולה ב־$-4 < x < 4$**. יורדת ב־**$x < -4$ **וגם ב־**$x > 4$**.**

סעיף א (4)

נאסוף את הנתונים:

- חיתוך עם הצירים: רק הנקודה $(0,0)$, כי $f(0) = 0$.
- אסימפטוטות: $x = \pm 4$ ו־$y = 0$.

- בתחום $-4 < x < 4$ הפונקציה עולה מ־$-\infty$ ל־$+\infty$.
- בתחום $x > 4$ היא חיובית ויורדת לכיוון 0.
- בתחום $x < -4$ היא שלילית ויורדת לכיוון $-\infty$.
- אין נקודות קיצון.

סקיצה של f: שלושה ענפים, אסימפטוטות x=±4 ו-y=0, עוברת בראשית

הסקיצה איכותית: היא נבנתה רק מהנתונים שמצאנו בתת־סעיפים הקודמים, התקפים לכל $a > 0$, בלי להציב ערך מספרי במקום הפרמטר a.

תשובה: שלושה ענפים, הגרף עובר בראשית, אסימפטוטות $x = \pm 4$ ו־$y = 0$, אין קיצון.

סקיצה של f: שלושה ענפים, אסימפטוטות x=±4 ו-y=0, עוברת בראשית

סעיף ב

נתון $g'(x) = f(x) + 1$. בנקודת קיצון $g'(-2) = 0$:

$$f(-2) + 1 = 0 \;\Rightarrow\; f(-2) = -1$$

$$\frac{2a \cdot (-2)}{((-2)^2 - 16)^2} = -1$$

$$\frac{-4a}{144} = -1$$

$$a = 36$$

בדיקה: בתחום $-4 < x < 4$ הפונקציה f עולה, ולכן $g'(x) = f(x) + 1$ עוברת ב־$x = -2$ מסימן שלילי לחיובי – זו אכן נקודת קיצון (מינימום).

תשובה: $a = 36$

סעיף ג

עבור $a = 36$:

$$g'(x) = \frac{72x}{(x^2 - 16)^2} + 1$$

נמצא פונקציה קדומה. המונה $72x = 36 \cdot 2x$, ו־$2x$ היא נגזרת של $x^2 - 16$, ולכן:

$$\int \frac{72x}{(x^2 - 16)^2} dx = 36 \cdot \frac{-1}{x^2 - 16}$$

בדיקה בגזירה:

$$\left(\frac{-36}{x^2 - 16} \right)' = \frac{36 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2}$$

$$g(x) = -\frac{36}{x^2 - 16} + x + C$$

הגרף עובר בנקודה $(2, 7)$:

$$-\frac{36}{4 - 16} + 2 + C = 7$$

$$3 + 2 + C = 7 \;\Rightarrow\; C = 2$$

$$g(x) = -\frac{36}{x^2 - 16} + x + 2$$

זהו ביטוי **אפשרי**: תחום ההגדרה מורכב משלושה קטעים נפרדים, והנקודה הנתונה קובעת את הקבוע רק בקטע $-4 < x < 4$.

תשובה: $g(x) = -\frac{36}{x^2-16} + x + 2$

סעיף ד

נבדוק את התכונות של

$$g(x) = -\frac{36}{x^2-16} + x + 2$$

1. התנהגות באינסוף: כאשר $x \to \pm\infty$ המחובר $-\frac{36}{x^2-16}$ שואף ל־0, ולכן $g(x)$ מתקרבת לישר $y = x + 2$: היא שואפת ל־$+\infty$ מימין ול־$-\infty$ משמאל. לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית, ולכן **הגרפים III ו־IV נפסלים**.

2. הקטע $-4 < x < 4$: ליד $x = \pm 4$ מתקיים $x^2 - 16 \to 0^-$, ולכן $g(x) \to +\infty$ בשני קצות הקטע. בקטע זה יש לגרף מינימום ב־$x = -2$ (סעיף ב):

$$g(-2) = -\frac{36}{-12} - 2 + 2 = 3$$

הענף האמצעי פונה כלפי מעלה. בגרף I הענף האמצעי פונה כלפי מטה, ולכן **גרף I נפסל**.

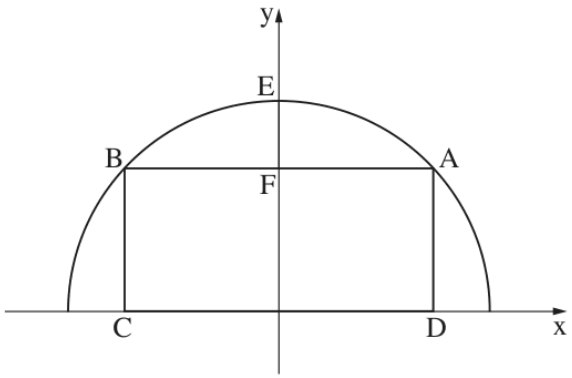
3. הקטע $x > 4$: שם $f(x) > 0$, ולכן $g'(x) = f(x) + 1 > 0$: הפונקציה עולה מ־$-\infty$. זה מתאים לגרף II.

לכן גרף II הוא הגרף האפשרי של $g(x)$.

תשובה: גרף II.

ל־g אין אסימפטוטה אופקית, ובין האסימפטוטות האנכיות יש לה מינימום.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$,

R הוא פרמטר חיובי.

פונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-R\le x\le R$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע הראשון.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה־x

וחותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה נוספת B.

הנקודות C ו־D נמצאות על ציר ה־x כך שנוצר מלבן $ABCD$.

הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה־y.

הנקודה E היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־y.

נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF.

נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה A.

א. **(1)** הביעו באמצעות R ו־t את אורך הקטע EF.

(2) הביעו באמצעות R ו־t את היקף המלבן $ABCD$.

ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן $ABCD$ לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הנקודה E – חיתוך עם ציר ה־y:

$$f(0)=\sqrt{R^2-0}=R\ \Rightarrow\ E(0,R)$$

הנקודה A נמצאת על הגרף ברביע הראשון, ושיעור ה־x שלה הוא t, כאשר $0<t<R$:

$$A\left(t,\sqrt{R^2-t^2}\right)$$

הנקודה F נמצאת על ציר ה־y ובאותו גובה כמו A, כי AB מקביל לציר ה־x:

$$F\left(0,\sqrt{R^2-t^2}\right)$$

שתי הנקודות על ציר ה־y, והנקודה E מעל F, כי $\sqrt{R^2-t^2}<R$:

$$EF=R-\sqrt{R^2-t^2}$$

תשובה: $EF=R-\sqrt{R^2-t^2}$

סעיף א (2)

הפונקציה זוגית, כי $f(-x)=f(x)$. לכן הנקודה B סימטרית ל־A ביחס לציר ה־y:

$$B\left(-t,\sqrt{R^2-t^2}\right)$$

אורך המלבן ורוחבו (הצלע AD יורדת מ־A אנכית אל ציר ה־x):

$$AB=t-(-t)=2t$$

$$AD=y_A=\sqrt{R^2-t^2}$$

$$P_{ABCD}=2\cdot 2t+2\sqrt{R^2-t^2}$$

$$P_{ABCD} = 4t + 2\sqrt{R^2 - t^2}$$

תשובה: $P_{ABCD} = 4t + 2\sqrt{R^2 - t^2}$

סעיף ב

היקף הריבוע שצלעו EF:

$$4\left(R - \sqrt{R^2 - t^2}\right)$$

פונקציית ההפרש, בתחום $0 < t < R$:

$$D(t) = 4t + 2\sqrt{R^2 - t^2}$$
$$\quad -4R + 4\sqrt{R^2 - t^2}$$
$$D(t) = 4t + 6\sqrt{R^2 - t^2} - 4R$$

נגזור:

$$D'(t) = 4 + 6 \cdot \frac{-2t}{2\sqrt{R^2 - t^2}}$$
$$D'(t) = 4 - \frac{6t}{\sqrt{R^2 - t^2}}$$
$$D'(t) = 0 \;\Rightarrow\; 4\sqrt{R^2 - t^2} = 6t$$

שני האגפים חיוביים, נעלה בריבוע:

$$16(R^2 - t^2) = 36t^2$$
$$52t^2 = 16R^2$$
$$t = \frac{4R}{\sqrt{52}} = \frac{2R}{\sqrt{13}} \approx 0.555R$$

בדיקת סוג הקיצון: ליד $t = 0$ מתקיים $D'(t) \approx 4$, כלומר חיובית. ליד $t = R$ המכנה $\sqrt{R^2 - t^2}$ קטן מאוד, ולכן $D'(t)$ שלילית.

t	$D'(t)$	$D(t)$
$0 < t < \frac{2R}{\sqrt{13}}$	+	עולה
$t = \frac{2R}{\sqrt{13}}$	0	מקסימום
$\frac{2R}{\sqrt{13}} < t < R$	−	יורדת

ההפרש מקסימלי עבור $t = \frac{2R}{\sqrt{13}}$.

תשובה: $t = \frac{2R}{\sqrt{13}} \approx 0.555R$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על הסעיפים א–ו. הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא אי־זוגית.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

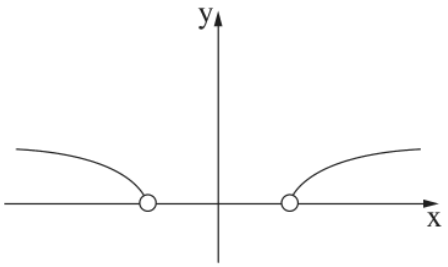
נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ה. **(1)** מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$.

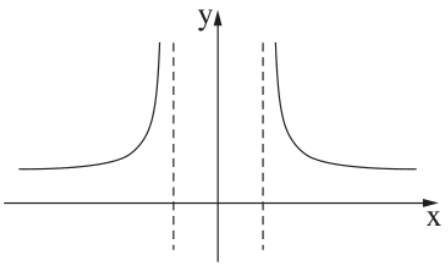
(2) קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־x ועל ידי הישרים $x=2a$ ו־$x=3a$ הוא 7.5.

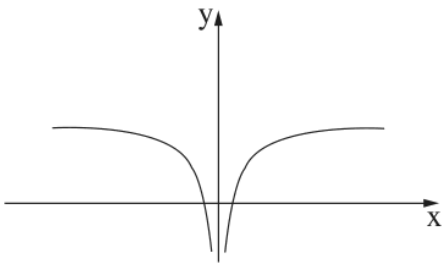
ו. מצאו את הערך של a.



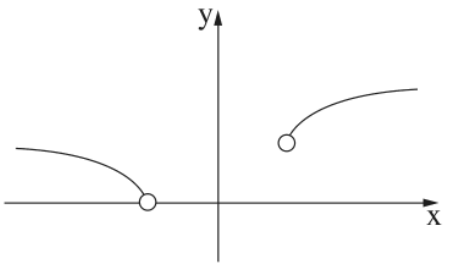
I



II



III



IV

פתרון מלא

סעיף א (1)

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$. הביטוי שבתוך השורש חייב להיות אי־שלילי, והמכנה שונה מ־0, ולכן:

$$x^2-a^2>0$$

$$x^2>a^2$$

a חיובי, ולכן:

$$x > a \quad \text{או} \quad x < -a$$

תשובה: $x > a$ **או** $x < -a$

סעיף א (2)

אסימפטוטות אנכיות: המכנה מתאפס בקצות תחום ההגדרה $x = \pm a$, והמונה שם שונה מ־0. לכן:

$$x \to a^+ : \quad f(x) \to +\infty$$
$$x \to -a^- : \quad f(x) \to -\infty$$

האסימפטוטות האנכיות: $x = a$ ו־$x = -a$.

אסימפטוטות אופקיות: נחלק מונה ומכנה ב־$|x| = \sqrt{x^2}$:

כאשר $x \to \infty$:

$$f(x) = \frac{x}{x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \to 1$$

כאשר $x \to -\infty$:

$$f(x) = \frac{x}{-x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \to -1$$

לכן האסימפטוטה האופקית מימין היא $y = 1$, ומשמאל היא $y = -1$.

תשובה: אסימפטוטות אנכיות $x = a$ **ו־**$x = -a$**. אסימפטוטה אופקית** $y = 1$ **מימין, ו־**$y = -1$ **משמאל.**

סעיף ב

תחום ההגדרה סימטרי סביב 0: אם x בתחום, גם $-x$ בתחום. נחשב את $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 - a^2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$
$$= -f(x)$$

לכל x בתחום ההגדרה $f(-x) = -f(x)$, ולכן $f(x)$ אי־זוגית.

תשובה: הוכחה: $f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2-a^2}} = -f(x)$ **לכל** x **בתחום.**

סעיף ג

נגזור לפי כלל המנה, עם $\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2 - a^2}$$

נכפול מונה ומכנה ב־$\sqrt{x^2 - a^2}$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - a^2 - x^2}{(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2}}$$
$$f'(x) = \frac{-a^2}{(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2}}$$

המונה שלילי והמכנה חיובי בכל תחום ההגדרה, ולכן $f'(x) < 0$ לכל x בתחום. אין נקודות קיצון.

$$x \qquad f(x) \; f'(x)$$

$x < -a$ ↘

$x > a$ ↘

תשובה: יורדת ב־$x < -a$ וב־$x > a$; אין תחומי עלייה.

סעיף ד

נאסוף את הנתונים:

- תחום ההגדרה: $x < -a$ או $x > a$. אין חיתוך עם הצירים, כי $x = 0$ לא בתחום.
- אסימפטוטות אנכיות $x = a$ ו־$x = -a$.
- אסימפטוטה אופקית מימין $y = 1$, ומשמאל $y = -1$.
- הפונקציה יורדת בכל אחד משני התחומים, והגרף סימטרי ביחס לראשית כי f אי־זוגית.
- מימין: הגרף יורד מפלוס אינסוף ליד $x = a$, ומתקרב ל־1 מלמעלה.
- משמאל: הגרף יורד מ־-1 אל מינוס אינסוף ליד $x = -a$.

סקיצה של f: שני ענפים יורדים, אסימפטוטות x=a, x=-a, y=1, y=-1

תשובה: סקיצה: שני ענפים יורדים, סימטריים ביחס לראשית; אסימפטוטות אנכיות $x = \pm a$, אופקית $y = 1$ מימין ו־$y = -1$ משמאל.

סעיף ה (1)

נחשב את $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{f^2(x)} = \frac{x^2 - a^2}{x^2} = 1 - \frac{a^2}{x^2}$$

בתחום $x < -a$ או $x > a$. נגזור:

$$g'(x) = \frac{2a^2}{x^3}$$

סימן g' הוא סימן x^3, כלומר סימן x:

x	$g'(x)$	$g(x)$
$x < -a$	$-$	↘
$x > a$	$+$	↗

תשובה: יורדת ב־$x < -a$, עולה ב־$x > a$

סעיף ה (2)

תכונות $g(x) = 1 - \frac{a^2}{x^2}$:

- אין לה אסימפטוטות אנכיות: כאשר $x \to \pm a$ מתקיים $g(x) \to 1 - 1 = 0$, כלומר הגרף מסתיים בנקודות $(\pm a, 0)$, שאינן שייכות לו.
- כאשר $x \to \pm\infty$: $g(x) \to 1$.
- $g(x) > 0$ בכל התחום, כי $x^2 > a^2$.
- לפי סעיף ה (1): יורדת ב־$x < -a$ ועולה ב־$x > a$; הגרף סימטרי ביחס לציר ה־y.

בגרף II ובגרף III יש אסימפטוטות אנכיות – לא מתאים. בגרף IV הענף הימני לא מתחיל על ציר ה־x והגרף אינו סימטרי – לא מתאים. גרף I מתאים לכל התכונות.

תשובה: גרף I

סעיף ו

בתחום $2a \le x \le 3a$ מתקיים $g(x) > 0$, ולכן השטח הוא:

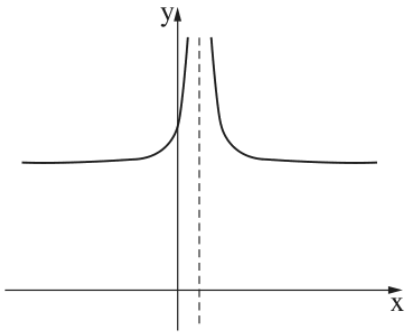
$$S = \int_{2a}^{3a} \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) dx$$
$$= \left[x + \frac{a^2}{x}\right]_{2a}^{3a}$$
$$= \left(3a + \frac{a}{3}\right) - \left(2a + \frac{a}{2}\right)$$
$$= a - \frac{a}{6} = \frac{5a}{6}$$

נתון שהשטח הוא 7.5:

$$\frac{5a}{6} = 7.5 \;\Rightarrow\; a = 9$$

תשובה: $a = 9$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+9$.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x\neq 1$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, ושיעור ה־x שלה הוא 2.

דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.

המשיק חותך את ציר ה־x בנקודה A ואת הישר $x=1$ בנקודה B.

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1,0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB.

ד. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

פתרון מלא

סעיף א

אסימפטוטה אנכית: המכנה $(x-1)^2$ מתאפס ב־$x=1$, והמונה a שונה מאפס. לכן האסימפטוטה האנכית היא $x=1$.

אסימפטוטה אופקית: כאשר $x\to\pm\infty$:

$$\frac{a}{(x-1)^2}\to 0 \;\Rightarrow\; f(x)\to 9$$

לכן האסימפטוטה האופקית היא $y=9$.

תשובה: $x=1,\ y=9$

סעיף ב

נקודת ההשקה C: $x=2$.

$$f(2)=\frac{a}{1^2}+9=a+9$$
$$C(2,\ a+9)$$

שיפוע המשיק – הנגזרת ב־$x=2$:

$$f'(x)=\frac{-2a}{(x-1)^3}$$
$$m=f'(2)=\frac{-2a}{1}=-2a$$

משוואת המשיק לפי הנוסחה:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(a+9)=-2a(x-2)$$
$$y=-2ax+5a+9$$

תשובה: $y=-2ax+5a+9$

סעיף ג

הנקודה A – חיתוך המשיק עם ציר ה־x ($y=0$):

$$0=-2ax+5a+9 \;\Rightarrow\; x=\frac{5a+9}{2a}$$

הנקודה B – חיתוך המשיק עם הישר $x=1$:

$$y=-2a+5a+9=3a+9$$

$$B(1,\ 3a+9)$$

המשולש ADB ישר זווית בקודקוד $D(1,0)$, כי הצלע DA על ציר ה־x והצלע DB על הישר $x=1$.

$$DA=\frac{5a+9}{2a}-1=\frac{3a+9}{2a}$$

$$DB=3a+9$$

$$S=\frac{DA\cdot DB}{2}=\frac{(3a+9)^2}{4a}$$

$$S=\frac{9(a+3)^2}{4a}$$

המשולש ADB עבור a=3: המשיק דרך C חותך את ציר x ב-A ואת x=1 ב-B

תשובה: $S_{ADB}=\frac{9(a+3)^2}{4a}$

סעיף ד

נגזור את $S(a)=\frac{9(a+3)^2}{4a}$ לפי a, כאשר $a>0$:

$$S'(a)=\frac{9}{4}\cdot\frac{2(a+3)\cdot a-(a+3)^2}{a^2}$$

$$=\frac{9}{4}\cdot\frac{(a+3)(a-3)}{a^2}$$

$S'(a)=0$ עבור $a=3$; הפתרון $a=-3$ נפסל כי $a>0$.

a	$0<a<3$	3	$a>3$
$S'(a)$	$-$	0	$+$
$S(a)$	↘	מינ'	↗

לכן השטח מינימלי עבור $a=3$. השטח המינימלי הוא $S(3)=27$.

תשובה: $a=3$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 6

6. נתון כי $f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-a^2)^3}$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$. a הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$ מוגדרות באותו התחום.

בסעיפים א–ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

ג. מצאו פונקצייה $f(x)$ המקיימת תנאים אלה.

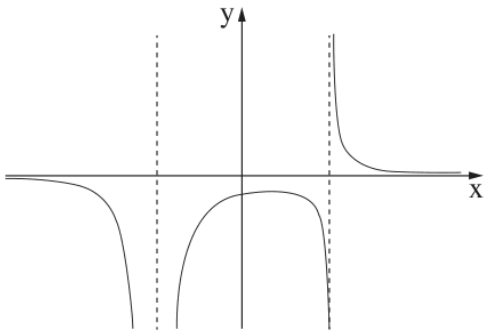
נתונות הפונקצייה $g(x)=\frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$ והפונקצייה $h(x)=\frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$.

הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו־ $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.

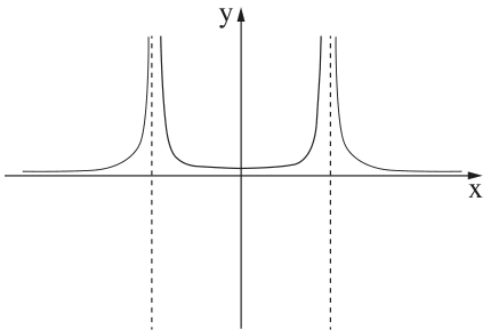
ד. התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו־ $h(x)$ גרף אפשרי המייצג אותה מבין הגרפים I–IV שבסוף השאלה.
נמקו את תשובותיכם.

נתון כי לפונקצייה $h(x-6)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה $x=0.25a$.

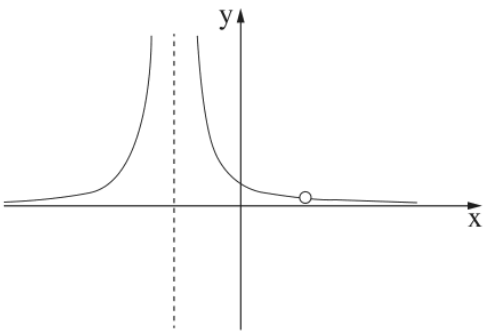
ה. מצאו את הערך של a .



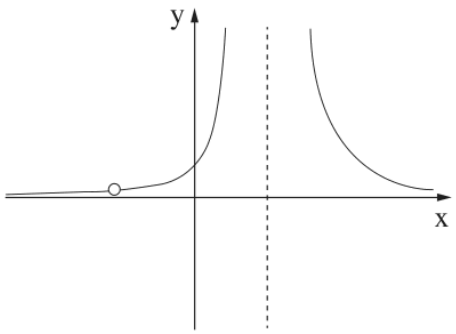
I



II



III



IV

פתרון מלא

סעיף א

המכנה לא יכול להתאפס:

$$(x^2-a^2)^3 \neq 0 \;\Rightarrow\; x^2 \neq a^2$$
$$x \neq a, \quad x \neq -a$$

תשובה: $x \neq a,\ x \neq -a$

סעיף ב

$f'(x)=0$ כאשר המונה מתאפס: $-4x=0$, כלומר $x=0$. נבדוק את סימן הנגזרת בין הנקודות $-a,\ 0,\ a$ – הסימן של $(x^2-a^2)^3$ הוא הסימן של x^2-a^2:

x	$(x^2-a^2)^3$	$-4x$	$f'(x)$	$f(x)$
$x<-a$	+	+	+	עולה
$-a<x<0$	+	−	−	יורדת
$0<x<a$	−	−	+	עולה
$x>a$	−	+	−	יורדת

תחומי עלייה: $x<-a$, $0<x<a$.

תחומי ירידה: $-a<x<0$, $x>a$.

תשובה: עלייה: $x<-a$ **או** $0<x<a$

ירידה: $-a<x<0$ **או** $x>a$

סעיף ג

נמצא פונקציה קדומה ל־$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-a^2)^3}$. הנגזרת של הביטוי הפנימי x^2-a^2 היא $2x$, ולכן לפי כלל השרשרת (בכיוון ההפוך) הפונקציה הקדומה היא מהצורה $k(x^2-a^2)^{-2}$. נגזור את $(x^2-a^2)^{-2}$ ונראה שמתקבל בדיוק $f'(x)$:

$$\left[(x^2-a^2)^{-2}\right]' = -2(x^2-a^2)^{-3}\cdot 2x$$
$$= \frac{-4x}{(x^2-a^2)^3} = f'(x) \quad \checkmark$$

לכן:

$$f(x)=\frac{1}{(x^2-a^2)^2}+C$$

כאשר $x\to\pm\infty$ השבר שואף ל־0, ולכן האסימפטוטה האופקית היא $y=C$. לפי הנתון $y=0$, ולכן $C=0$:

$$f(x)=\frac{1}{(x^2-a^2)^2}$$

תשובה: $f(x)=\frac{1}{(x^2-a^2)^2}$

סעיף ד

תחום ההגדרה של שלוש הפונקציות: $x\neq\pm a$, וזכרו ש־$a>0$.

$f(x)=\frac{1}{(x^2-a^2)^2}$**:** חיובית בכל התחום, ויש לה אסימפטוטות אנכיות $x=a$ ו־$x=-a$. לפי סעיף ב יש לה מינימום ב־$x=0$ (יורדת ואז עולה). רק בגרף II הפונקציה חיובית בכל התחום ויש שתי אסימפטוטות אנכיות. לכן f – **גרף II**.

$g(x)=\frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$**:** נפרק $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$ ונצמצם, עבור $x\neq a$:

$$g(x)=\frac{x-a}{(x-a)^2(x+a)^2}$$
$$=\frac{1}{(x-a)(x+a)^2}$$

המכנה עדיין מתאפס ב־$x=a$ וב־$x=-a$ – שתי אסימפטוטות אנכיות. הסימן של g הוא הסימן של $x-a$: שלילית עבור $x<a$ וחיובית עבור $x>a$. זה גרף I. לכן g – **גרף I**.

$h(x)=\frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$ **:** נצמצם, עבור $x\neq a$:

$$h(x)=\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2(x+a)^2}$$
$$=\frac{1}{(x+a)^2}$$

ל־h יש אסימפטוטה אנכית אחת בלבד, $x=-a$, משמאל לציר ה־y. ב־$x=a$ הפונקציה לא מוגדרת, אבל שם אין אסימפטוטה – יש "חור" בגרף (נקודה ריקה) מימין לציר ה־y. הפונקציה חיובית. זה גרף III. לכן h – **גרף III**.

גרף IV מתאים לאסימפטוטה מימין לציר ה־y ולחור משמאל, כלומר ל־$\frac{1}{(x-a)^2}$ – לא אחת מהפונקציות שלנו.

תשובה: f – גרף II

g – גרף I

h – גרף III

סעיף ה

ל־$h(x)=\frac{1}{(x+a)^2}$, עבור $x\neq a$, יש אסימפטוטה אנכית אחת: $x=-a$.

הגרף של $h(x-6)$ מתקבל מהגרף של $h(x)$ בהזזה של 6 יחידות ימינה, ולכן האסימפטוטה שלו:

$$x-6=-a\ \Rightarrow\ x=6-a$$

לפי הנתון:

$$6-a=0.25a$$
$$6=1.25a\ \Rightarrow\ a=4.8$$

ב־$x-6=a$ יש ל־$h(x-6)$ רק חור, לא אסימפטוטה.

תשובה: $a=4.8$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 8

8. נתונה הפונקצייה $f(x)=x\sqrt{21-x}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת ואין לה נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם החלק החיובי של ציר ה־x.

מן הנקודה A העבירו שני אנכים:

אנך אחד לציר ה־x החותך אותו בנקודה B, ואנך נוסף לישר $x=21$ החותך אותו בנקודה D.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן $ABCD$ הוא מקסימלי.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הביטוי שבתוך השורש חייב להיות אי־שלילי:

$$21-x\geq 0 \;\Rightarrow\; x\leq 21$$

תשובה: $x\leq 21$

סעיף א (2)

אפסים:

$$x\sqrt{21-x}=0 \;\Rightarrow\; x=0 \text{ או } x=21$$

עבור $x<21$ מתקיים $\sqrt{21-x}>0$, ולכן הסימן של f הוא הסימן של x:

תחום חיוביות: $0<x<21$.

תחום שליליות: $x<0$.

תשובה: חיובית: $0<x<21$

שלילית: $x<0$

סעיף ב

נגזרת (כלל המכפלה):

$$f'(x)=\sqrt{21-x}+x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{21-x}}$$

$$=\frac{2(21-x)-x}{2\sqrt{21-x}}=\frac{42-3x}{2\sqrt{21-x}}$$

$f'(x)=0$ כאשר $42-3x=0$, כלומר $x=14$:

$$f(14)=14\sqrt{7}\approx 37.04$$

x $f(x)$ $f'(x)$

$x<14$	+	עולה
$x=14$	0	מקס׳
$14<x<21$	–	יורדת

נקודת המקסימום: $(14,14\sqrt{7})$. בקצה התחום, $(21,0)$, יש מינימום קצה. כאשר $x\to-\infty$, $f(x)\to-\infty$. חיתוך עם הצירים: $(0,0)$ ו־$(21,0)$.

סקיצה של f(x)=x√(21−x): עולה מ־מינוס אינסוף דרך הראשית למקסימום (14, 7√14) ויורדת ל־(21,0)

תשובה: מקסימום $(14,14\sqrt{7})\approx(14,\ 37.04)$; חיתוך עם הצירים ב־$(0,0)$ וב־$(21,0)$ (נקודת קצה); כאשר $x\to-\infty$ הגרף יורד ל־$-\infty$

סקיצה של f(x)=x√(21−x): עולה מ־מינוס אינסוף דרך הראשית למקסימום (14, 7√14) ויורדת ל־(21,0)

סעיף ג

נסמן $A\left(x,\ x\sqrt{21-x}\right)$, כאשר $0<x<21$ (רביע ראשון). אז:

- $B(x,0)$ – על ציר ה־x, מתחת ל־A.
- $C(21,0)$ ו־$D\left(21,\ x\sqrt{21-x}\right)$.

אורכי הצלעות של המלבן:

$$AB=x\sqrt{21-x},\qquad BC=21-x$$

פונקציית ההיקף:

$$P(x)=2\left(x\sqrt{21-x}+21-x\right)$$
$$P'(x)=2\left(f'(x)-1\right)$$

נשווה ל־0, כלומר $f'(x)=1$ (הנגזרת מסעיף ב):

$$\frac{42-3x}{2\sqrt{21-x}}=1$$
$$42-3x=2\sqrt{21-x}$$

נסמן $t=\sqrt{21-x}$, כאשר $t>0$, אז $x=21-t^2$:

$$42-3(21-t^2)=2t$$
$$3t^2-2t-21=0$$
$$t=\frac{2\pm\sqrt{4+252}}{6}=\frac{2\pm16}{6}$$

$t>0$, ולכן $t=3$:

$$\sqrt{21-x}=3\ \Rightarrow\ x=12$$

בדיקה שזה מקסימום:

x	$P'(x)$	$P(x)$
$0<x<12$	+	עולה
$x=12$	0	מקס׳
$12<x<21$	–	יורדת

למשל $P'(10)\approx1.62>0$, $P'(14)=-2<0$.

$$y_A = 12\sqrt{21-12} = 12 \cdot 3 = 36$$

הנקודה: $A(12,36)$.

המלבן ABCD: A(12,36) על הגרף, B על ציר x, C(21,0), D על הישר x=21

תשובה: $A(12,36)$

בגרות קיץ תשפ״ד (2024) – מועד ב׳ • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x-1}{(x-a)^3}$, המוגדרת בתחום $x\neq a$, a הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ y .

ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה־ x , וקבעו את סוגה.

הגרפים 1–4 שבסוף השאלה מתארים את הפונקצייה $f(x)$ בעבור ערכים שונים של a .

ג. התאימו לכל אחד מן הערכים I–IV של a את הגרף המתאים לו, ונמקו את תשובותיכם.

I. $a=-1$ II. $a=0.5$ III. $a=1$ IV. $a=2$

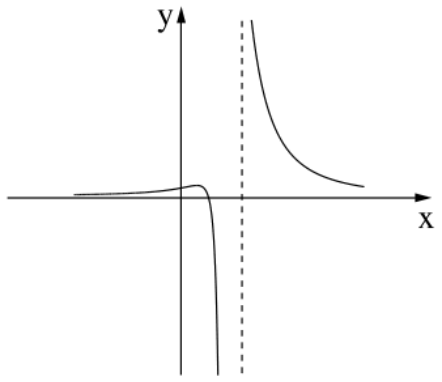
נתונה הפונקצייה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x)-b$ בעבור הערך של a המתאים לגרף 2 .

b הוא פרמטר חיובי.

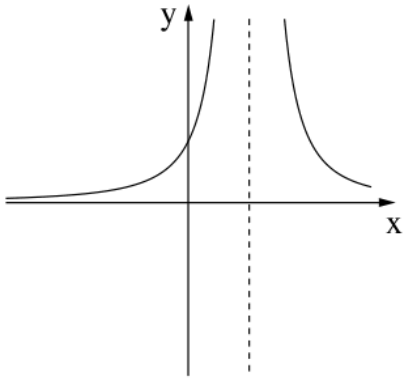
אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x היא $(t,0)$, $1<t<5$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $g(x)$, על ידי הישר $x=t$ ועל ידי הישר $x=5$ הוא 1.75 .

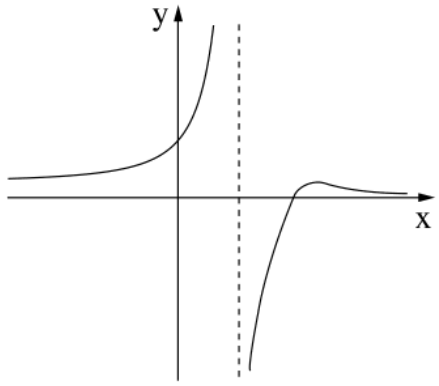
ד. מצאו את הערך של b .



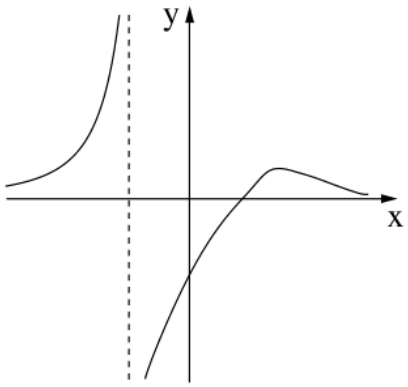
1



2



3



4

פתרון מלא

סעיף א (1)

אסימפטוטה אנכית: המכנה מתאפס ב־$x = a$. נבדוק את המונה בנקודה זו:

אם a שונה מ־1, המונה $a - 1$ אינו מתאפס, ולכן $x = a$ אסימפטוטה אנכית.

אם $a = 1$, אז:

$$f(x) = \frac{x - 1}{(x - 1)^3} = \frac{1}{(x - 1)^2}$$

וגם אז $x = 1$ אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה אופקית: מעלת המונה (1) קטנה ממעלת המכנה (3), ולכן:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

תשובה: $x = a$ **ו־**$y = 0$

סעיף א (2)

נציב $x = 0$ (מותר, כי $a \neq 0$):

$$f(0) = \frac{0 - 1}{(0 - a)^3} = \frac{-1}{-a^3} = \frac{1}{a^3}$$

תשובה: $\left(0,\ \frac{1}{a^3}\right)$

סעיף ב

נגזור לפי נגזרת המנה:

$$f'(x) = \frac{(x - a)^3 - (x - 1) \cdot 3(x - a)^2}{(x - a)^6}$$

נצמצם ב־$(x - a)^2$:

$$f'(x) = \frac{(x - a) - 3(x - 1)}{(x - a)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-2x - a + 3}{(x - a)^4}$$

השוואה ל־0:

$$-2x - a + 3 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{3 - a}{2}$$

זו נקודת קיצון רק אם היא שונה מ־a (שם הפונקציה לא מוגדרת). עבור $a = 1$ מתקבל $\frac{3-1}{2} = 1 = a$, ולכן עבור $a = 1$ אין נקודת קיצון.

משמאל לאסימפטוטה:

$$\frac{3 - a}{2} < a \ \Rightarrow \ 3 - a < 2a \ \Rightarrow \ a > 1$$

סוג הקיצון: המכנה $(x - a)^4$ חיובי. המונה $-2x - a + 3$ חיובי משמאל לנקודה ושלילי מימינה. לכן f עולה ואחר כך יורדת – מקסימום.

תשובה: $a > 1$**, והקיצון הוא מקסימום.**

סעיף ג

לכל ערך נבדוק את האסימפטוטה $x=a$, את נקודת החיתוך עם ציר ה־y, $\left(0,\frac{1}{a^3}\right)$, ואת נקודת הקיצון $x=\frac{3-a}{2}$:

a	ציר y	קיצון	גרף
-1	$(0,-1)$	מקס׳ ב־$x=2$	4
0.5	$(0,8)$	מקס׳ ב־$x=1.25$	3
1	$(0,1)$	אין	2
2	$(0,\frac{1}{8})$	מקס׳ ב־$x=0.5$	1

- גרף 4: האסימפטוטה משמאל לציר ה־y והחיתוך עם ציר ה־y שלילי – רק $a=-1$.
- גרף 2: אין נקודת קיצון והגרף כולו מעל ציר ה־x – זה $a=1$, כי אז $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$.
- גרף 1: המקסימום משמאל לאסימפטוטה – לפי סעיף ב זה $a>1$, כלומר $a=2$.
- גרף 3: המקסימום מימין לאסימפטוטה $x=0.5$, והחיתוך עם ציר ה־y גבוה – $a=0.5$.

תשובה: I – גרף 4; II – גרף 3; III – גרף 2; IV – גרף 1.

סעיף ד

לגרף 2 מתאים $a=1$, ולכן:

$$g(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-b$$

כאשר $x\to\pm\infty$ השבר שואף ל־0, ולכן האסימפטוטה האופקית של g היא $y=-b$. הגרף של g נמצא מעל האסימפטוטה, והפרש הגבהים הוא:

$$g(x)-(-b)=\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$S=\int_t^5\frac{dx}{(x-1)^2}=\Big[-\frac{1}{x-1}\Big]_t^5$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{t-1}$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{t-1}=1.75\ \Rightarrow\ \frac{1}{t-1}=2$$

$$t=1.5$$

הנקודה $(t,0)$ היא נקודת חיתוך של g עם ציר ה־x:

$$g(1.5)=\frac{1}{0.5^2}-b=4-b$$

$$4-b=0\ \Rightarrow\ b=4$$

תשובה: $b=4$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 8

8. נתונה הפונקצייה $f(x)=\sqrt{x}$ המוגדרת בתחום $x\geq 0$, ונתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{16}{x^2+3}$ המוגדרת לכל x.

א. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$.

בנקודה $C(t,0)$ מעבירים אנך לציר ה־x, $t>0$.

האנך חותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקצייה $g(x)$ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו־BC.

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו־BC מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $k(x)=\frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2+3}$, המוגדרת בתחום $x\geq 4$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקצייה $k(x)$, וקבעו את סוגה.

נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

$$g'(x)=\frac{-16\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-32x}{(x^2+3)^2}$$

המכנה חיובי, ולכן הסימן של g' הפוך לסימן של x:

x	$g'(x)$	$g(x)$
$x<0$	+	עולה
$x=0$	0	מקסימום
$x>0$	–	יורדת

$$g(0)=\frac{16}{3}$$

תשובה: מקסימום $\left(0,\frac{16}{3}\right)$

סעיף א (2)

נגזור את $g'(x)=\frac{-32x}{(x^2+3)^2}$ לפי נגזרת המנה. המונה של g'':

$$-32(x^2+3)^2+32x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x$$

נוציא גורם משותף $32(x^2+3)$ ונצמצם:

$$g''(x)=\frac{-32(x^2+3)+128x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$g''(x)=\frac{96(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

g'' מתאפסת ב־$x=\pm 1$, והסימן שלה (לפי x^2-1) מתחלף בכל אחת מהן – אלה נקודות פיתול:

$$g(\pm 1) = \frac{16}{1+3} = 4$$

תשובה: $(1,4)$ **ו־**$(-1,4)$

סעיף א (3)

הגרף של g**:** זוגית וחיובית, מקסימום $\left(0,\ \frac{16}{3}\right)$, נקודות פיתול $(\pm 1, 4)$, אסימפטוטה אופקית $y = 0$.

הגרף של $f = \sqrt{x}$**:** מוגדר רק עבור $x \geq 0$, מתחיל בראשית ועולה.

סקיצה של g(x)=16/(x^2+3) ושל f(x)=√x

תשובה: סקיצה:

סקיצה של g(x)=16/(x^2+3) ושל f(x)=√x

סעיף ב

האנך לציר ה־x ב־$C(t,0)$ הוא הישר $x = t$:

$$A\left(t,\ \sqrt{t}\right), \qquad B\left(t,\ \frac{16}{t^2+3}\right)$$

שתי הפונקציות חיוביות, ולכן:

$$AC = \sqrt{t}, \qquad BC = \frac{16}{t^2+3}$$

$$AC \cdot BC = \frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$$

תשובה: $AC \cdot BC = \frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$

סעיף ג

נסמן $h(t) = \frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$ (עבור $t > 0$) ונגזור לפי נגזרת המנה. המונה של h':

$$16\left[\frac{t^2+3}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\cdot 2t\right]$$

נכתוב על מכנה משותף $2\sqrt{t}$:

$$= \frac{16\left(t^2+3-4t^2\right)}{2\sqrt{t}} = \frac{24(1-t^2)}{\sqrt{t}}$$

$$h'(t) = \frac{24(1-t^2)}{\sqrt{t}\,(t^2+3)^2}$$

t	$h'(t)$	$h(t)$
$0 < t < 1$	+	עולה
$t = 1$	0	מקסימום
$t > 1$	–	יורדת

לכן המכפלה מקסימלית ב־$t = 1$, ואז:

$$B = \left(1,\ g(1)\right) = (1,4)$$

זו בדיוק נקודת הפיתול של g מסעיף א (2).

תשובה: הוכחה: המכפלה מקסימלית ב־$t = 1$**, ואז** $B = (1,4)$ **– נקודת הפיתול.**

סעיף ד

נכתוב את k בעזרת h מסעיף ג:

$$k(x) = \frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2+3}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{16\sqrt{x-4}}{(x-4)^2+3} = \frac{1}{2}\, h(x-4)$$

הגרף של k מתקבל מהגרף של h בהזזה של 4 יחידות ימינה וכיווץ פי 2 בכיוון ציר ה־y. ל־h יש קיצון פנימי יחיד – מקסימום ב־$t = 1$, שם $h(1) = \frac{16}{4} = 4$.

לכן ל־k יש מקסימום ב־$x = 1 + 4 = 5$:

$$k(5) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

תשובה: מקסימום $(5, 2)$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{4x}{(x^2-a)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על סעיפים א–ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת $g'(x)=f(x)$. גרף הפונקצייה $g(x)$ עובר בנקודה $(0\ ,\ 0)$.

הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ג. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקצייה $g(x)$.

ד. **(1)** מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ שמצאתם בתת־סעיף ד(1).

$h(x)$ היא פונקצייה המוגדרת כך: $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.

הפונקציות $h(x)$ ו־ $f(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ה. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקצייה $h(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקצייה $h(x)$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה מתאפס כאשר:

$$x^2-a=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$$

הערכים קיימים כי $a>0$.

תשובה: $x\neq\pm\sqrt{a}$

סעיף א (2)

אנכיות: ב־$x=\pm\sqrt{a}$ המכנה מתאפס והמונה $\pm4\sqrt{a}\neq0$, ולכן $x=\sqrt{a}$ ו־$x=-\sqrt{a}$ הן אסימפטוטות אנכיות.

אופקית: מעלת המונה (1) קטנה ממעלת המכנה (4), ולכן כאשר $x\to\pm\infty$: $f(x)\to0$. האסימפטוטה האופקית היא $y=0$.

תשובה: $x=\pm\sqrt{a},\ y=0$

סעיף א (3)

נגזור לפי כלל המנה:

$$f'(x)=\frac{4(x^2-a)^2-4x\cdot 2(x^2-a)\cdot 2x}{(x^2-a)^4}$$

נצמצם ב־(x^2-a):

$$f'(x)=\frac{4(x^2-a)-16x^2}{(x^2-a)^3}$$
$$f'(x)=\frac{-4(3x^2+a)}{(x^2-a)^3}$$

המונה $-4(3x^2+a)$ שלילי תמיד, ולכן ל־f' אין אפסים, והסימן שלה הפוך לסימן של x^2-a:

x	x^2-a	$f'(x)$	$f(x)$
$x<-\sqrt{a}$	$+$	$-$	↘
$-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$	$-$	$+$	↗
$x>\sqrt{a}$	$+$	$-$	↘

תשובה: עלייה: $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$**. ירידה:** $x<-\sqrt{a}$ **וגם** $x>\sqrt{a}$

סעיף ב

נאסוף את הנתונים:

- הפונקצייה אי־זוגית ($f(-x)=-f(x)$) ועוברת בראשית: $f(0)=0$.
- ליד $x=\sqrt{a}$ המונה חיובי והמכנה (ריבוע) חיובי, ולכן משני הצדדים $f\to+\infty$; ליד $x=-\sqrt{a}$ משני הצדדים $f\to-\infty$.
- כאשר $x\to\infty$: $f\to 0$ מלמעלה; כאשר $x\to-\infty$: $f\to 0$ מלמטה.
- תחומי עלייה וירידה מסעיף א (3); אין נקודות קיצון.

סקיצה של f: אסימפטוטות x=±√a ו-y=0, עוברת בראשית ועולה בקטע האמצעי

תשובה: סקיצה: עוברת בראשית, אין קיצון, אסימפטוטות $x=\pm\sqrt{a}$ **ו־**$y=0$

סעיף ג

$g'(x)=f(x)$, ולכן $g''(x)=f'(x)$. הגרף של g קעור כלפי מעלה כאשר $g''>0$, כלומר כאשר $f'>0$, וקעור כלפי מטה כאשר $f'<0$. לפי סעיף א (3):

- קעורה כלפי מעלה : $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$.
- קעורה כלפי מטה : $x<-\sqrt{a}$ וגם $x>\sqrt{a}$.

תשובה: קעורה כלפי מעלה: $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$**. קעורה כלפי מטה:** $x<-\sqrt{a}$ **וגם** $x>\sqrt{a}$

סעיף ד (1)

g היא פונקציה קדומה של f. המונה $4x$ הוא פעמיים הנגזרת של x^2-a:

$$g(x)=\int\frac{4x}{(x^2-a)^2}\,dx$$
$$=2\int\frac{2x}{(x^2-a)^2}\,dx$$
$$g(x)=-\frac{2}{x^2-a}+C$$

נציב $g(0)=0$:

$$-\frac{2}{0-a}+C=0$$
$$\frac{2}{a}+C=0\Rightarrow C=-\frac{2}{a}$$

תשובה: $g(x)=-\frac{2}{x^2-a}-\frac{2}{a}$

סעיף ד (2)

נכתוב את g כשבר אחד:

$$g(x)=\frac{-2a-2(x^2-a)}{a(x^2-a)}=\frac{-2x^2}{a(x^2-a)}$$

- **אסימפטוטות:** אנכיות $x=\pm\sqrt{a}$; כאשר $x\to\pm\infty$: $g\to-\frac{2}{a}$, ולכן אסימפטוטה אופקית $y=-\frac{2}{a}$.
- **קיצון:** $g'=f$ מתאפסת ב־$x=0$, שלילית משמאל וחיובית מימין, ולכן $(0,0)$ נקודת מינימום.
- **עלייה וירידה:** $g'=f$; $f>0$ כאשר $x>0$, ולכן g עולה ב־$0<x<\sqrt{a}$ וב־$x>\sqrt{a}$, ויורדת ב־$x<-\sqrt{a}$ וב־$-\sqrt{a}<x<0$.
- בקטע האמצעי $g\geq 0$ ($g\to+\infty$ ליד $\pm\sqrt{a}$); בקטעים החיצוניים $g<-\frac{2}{a}$ ($g\to-\infty$ ליד $\pm\sqrt{a}$). הפונקצייה זוגית.

סקיצה של g: מינימום (0,0), אסימפטוטות x=±√a ו-y=-2/a

תשובה: סקיצה: g זוגית, מינימום $(0,0)$, אסימפטוטות $x=\pm\sqrt{a}$ ו־$y=-\frac{2}{a}$

סעיף ה (1)

נכפול:

$$h(x)=\frac{4x}{(x^2-a)^2}\cdot\frac{-2x^2}{a(x^2-a)}$$
$$h(x)=\frac{-8x^3}{a(x^2-a)^3}$$

אנכיות: המכנה מתאפס ב־$x=\pm\sqrt{a}$, והמונה שם שונה מאפס: $x=\pm\sqrt{a}$.

אופקית: מעלת המונה (3) קטנה ממעלת המכנה (6), ולכן $y=0$.

תשובה: $x=\pm\sqrt{a},\ y=0$

סעיף ה (2)

$h=f\cdot g$ חיובית כאשר ל־f ול־g אותו סימן.

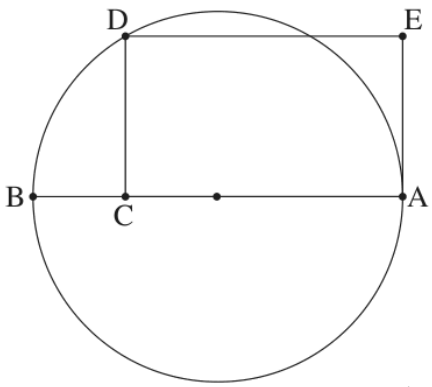
- $f(x)=\frac{4x}{(x^2-a)^2}$: הסימן של f הוא הסימן של x.
- $g(x)=\frac{-2x^2}{a(x^2-a)}$: חיובית כאשר $x^2<a$ ($x\neq 0$), ושלילית כאשר $x^2>a$.

x	f	g	h
$x<-\sqrt{a}$	$-$	$-$	$+$
$-\sqrt{a}<x<0$	$-$	$+$	$-$
$0<x<\sqrt{a}$	$+$	$+$	$+$

$x > \sqrt{a}$ $\quad + - -$

תשובה: חיובית: $x < -\sqrt{a}$ **וגם** $0 < x < \sqrt{a}$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 8



8. הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R.

מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל מסמנים נקודה D,

כך שהקטע CD מאונך לקטע AB. הקטע AC גדול מ־R.

דרך הנקודה D מעבירים ישר שמקביל לקוטר AB.

דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל.

הישר המקביל והמשיק נחתכים בנקודה E.

נסמן: $AC = x$.

א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן ACDE מקסימלי.

הנקודה F נמצאת על הצלע DE.

ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו־AFE.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן ב־O את מרכז המעגל. $AO = R$ ו־$AC = x > R$, ולכן C בין O ל־B ו־$OC = x - R$.

$OD = R$ (רדיוס), ולפי פיתגורס במשולש OCD:

$$CD^2 = R^2 - (x-R)^2 = 2Rx - x^2$$
$$CD = \sqrt{2Rx - x^2}$$

שטח המלבן $ACDE$:

$$S(x) = x\sqrt{2Rx - x^2}, \quad R < x < 2R$$

נגזור:

$$S'(x) = \sqrt{2Rx - x^2} + \frac{x(2R-2x)}{2\sqrt{2Rx-x^2}}$$
$$= \frac{2Rx - x^2 + Rx - x^2}{\sqrt{2Rx-x^2}}$$
$$= \frac{x(3R-2x)}{\sqrt{2Rx-x^2}}$$

$S'(x) = 0 \Rightarrow x = 1.5R$

x	$S'(x)$	$S(x)$
$R < x < 1.5R$	$+$	↗
$1.5R$	0	מקס'
$1.5R < x < 2R$	$-$	↘

תשובה: $x = 1.5R$

סעיף ב

$DE \perp CD$ ו־$DE \perp AE$ (מלבן), ולכן:

- במשולש CDF הבסיס CD והגובה אליו DF.
- במשולש AFE הבסיס $AE = CD$ והגובה אליו FE.

$$S_{CDF} + S_{AFE} =$$
$$\frac{1}{2}CD \cdot DF + \frac{1}{2}CD \cdot FE$$
$$= \frac{1}{2}CD\left(DF + FE\right) = \frac{1}{2}CD \cdot DE$$

כלומר סכום השטחים הוא תמיד חצי משטח המלבן, והוא מקסימלי כאשר שטח המלבן מקסימלי – ב־ $x = 1.5R$:

$$CD = \sqrt{2R \cdot 1.5R - 2.25R^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$
$$S_{max} = \frac{1}{2} \cdot 1.5R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{3\sqrt{3}}{8}R^2$$

תשובה: $\frac{3\sqrt{3}}{8}R^2 \approx 0.65R^2$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה: $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x}-2}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ג. הראו כי לכל $x>0$ בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים $f(x)=g'(x)$.

ד. לפניכם טענות I–II. קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. יש משיק לגרף הפונקצייה $g(x)$ ששיפועו הוא 2.

II. לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

ה. חשבו את ערך הביטוי $\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot f(x)\,dx$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

$\sqrt{x}$ מוגדר עבור $x\geq 0$, והמכנה שונה מאפס:

$$(\sqrt{x}-2)^2\neq 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x}\neq 2 \;\Rightarrow\; x\neq 4$$

תשובה: $x\geq 0$, $x\neq 4$

סעיף א (2)

אנכית: ב־$x=4$ המכנה מתאפס והמונה $\sqrt{4}-4=-2\neq 0$. המכנה ריבוע – חיובי – ולכן $f(x)\to$ $-\infty$ משני צדי $x=4$. האסימפטוטה: $x=4$.

אופקית: כש־$x\to\infty$ נחלק מונה ומכנה ב־x:

$$f(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x}}{\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2}\to\frac{0}{1}=0$$

האסימפטוטה: $y=0$ – כאשר $x\to\infty$; משמאל התחום מוגבל ב־$x\geq 0$.

תשובה: $x=4$, $y=0$

סעיף א (3)

ציר y: $f(0)=\frac{0-4}{(0-2)^2}=\frac{-4}{4}=-1$.

ציר x:

$$\sqrt{x}-4=0 \;\Rightarrow\; x=16$$

תשובה: $(0,-1)$**,** $(16,0)$

סעיף א (4)

נגזור לפי נגזרת המנה, עם $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$:

המכנה של $f'(x)$ הוא $(\sqrt{x}-2)^4$, והמונה:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2)^2$$
$$-(\sqrt{x}-4)\cdot 2(\sqrt{x}-2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

נוציא גורם משותף $\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}}$ ונצמצם:

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{x}-2)-2(\sqrt{x}-4)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^3}$$
$$=\frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-2)^3}$$
$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x}=6 \;\Rightarrow\; x=36$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x=0$		קצה התחום
$0<x<4$	–	יורדת
$4<x<36$	+	עולה
$x=36$	0	מקסימום
$x>36$	–	יורדת

ב־$0<x<4$: $\sqrt{x}<2$, המכנה שלילי והמונה חיובי.

$$f(36)=\frac{6-4}{(6-2)^2}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

הפונקציה יורדת מימין ל־$x=0$, ולכן $(0,-1)$ היא נקודת מקסימום (קצה).

תשובה: מקסימום $\left(36,\frac{1}{8}\right)$**; מקסימום (קצה)** $(0,-1)$

סעיף ב

מ־$(0,-1)$ הגרף יורד אל $-\infty$ ליד האסימפטוטה $x=4$; מימינה הוא עולה מ־$-\infty$, חותך את ציר x ב־$(16,0)$, מגיע למקסימום $\left(36,\frac{1}{8}\right)$ ויורד ומתקרב ל־$y=0$ מלמעלה.

סקיצה של f(x)

תשובה: ענף שמאלי: מ־$(0,-1)$ **יורד אל** $-\infty$ **ליד** $x=4$**.**

ענף ימני: עולה מ־$-\infty$ **דרך** $(16,0)$ **עד המקסימום** $\left(36,\frac{1}{8}\right)$**, ויורד אל** $y=0$**.**

סעיף ג

נגזור את $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x}-2}$ לפי נגזרת המנה:

$$g'(x)=\frac{2(\sqrt{x}-2)-2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-2)^2}$$

$\sqrt{x} = \frac{2x}{2\sqrt{x}}$ – עבור $x > 0$, ולכן:

$$g'(x) = \frac{2\sqrt{x} - 4 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)^2} = \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$$
$$g'(x) = f(x)$$

תשובה: הוכחה: $g'(x) = \frac{2(\sqrt{x}-2)-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)^2} = \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2} = f(x)$

סעיף ד

טענה I. שיפוע המשיק לגרף g הוא $g'(x) = f(x)$. לפי סעיף א, הערך הגדול ביותר של f הוא המקסימום $\frac{1}{8}$: בקטע $0 \le x < 4$ הערכים קטנים מ־-1, ובקטע $x > 4$ הם לכל היותר $\frac{1}{8}$. לכן $f(x) \neq 2$ לכל x, ואין משיק ששיפועו 2.

טענה II. בנקודת פיתול של g הנגזרת $g' = f$ משנה כיוון עלייה/ירידה, כלומר יש ל־f נקודת קיצון פנימית. ל־f יש קיצון פנימי אחד בלבד, ב־$x = 36$; ב־$x = 0$ זו נקודת קצה, ו־$x = 4$ אינו בתחום. לכן ל־g נקודת פיתול אחת בלבד, ב־$x = 36$.

תשובה: I – לא נכונה: לכל x בתחום $g'(x) = f(x) \le \frac{1}{8} < 2$.
II – נכונה: נקודת הפיתול היחידה היא ב־$x = 36$.

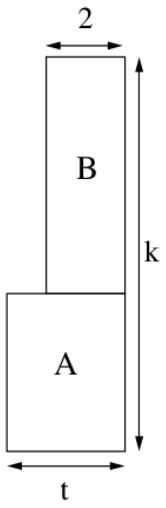
סעיף ה

לפי סעיף ג, $f(x) = g'(x)$. לכן $g(x) \cdot f(x) = g(x) \cdot g'(x)$, ופונקציה קדומה שלה היא $\frac{1}{2}g^2(x)$ (נגזרת לפי כלל השרשרת).

$$\int_{0.25}^{1} g(x)f(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}g^2(x)\right]_{0.25}^{1}$$
$$g(1) = \frac{2}{1-2} = -2$$
$$g(0.25) = \frac{0.5}{0.5-2} = -\frac{1}{3}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(4 - \tfrac{1}{9}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{35}{9} = \tfrac{35}{18}$$
$$= 1\tfrac{17}{18} \approx 1.944$$

תשובה: $\frac{35}{18} = 1\frac{17}{18} \approx 1.944$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 8



8. נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B.

הרוחב של גינה A הוא t מטרים.

הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא $2t+2$ מ"ר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. k הוא קבוע.

א. הביעו באמצעות k ו־t את שטח הגינה A.

ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי. נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

אורך גינה B = שטח חלקי רוחב:

$$\frac{2t+2}{2}=t+1$$

האורך הכולל הוא k, ולכן אורך גינה A:

$$k-(t+1)=k-t-1$$

$$S_A=t(k-t-1)$$

תשובה: $S_A=t(k-t-1)$

סעיף ב

התחום: $t>0$ וגם $k-t-1>0$, כלומר $0<t<k-1$.

$$R(t)=\frac{S_B}{S_A}=\frac{2t+2}{t(k-1-t)}$$

$$=\frac{2t+2}{(k-1)t-t^2}$$

נגזור לפי נגזרת המנה. המונה של $R'(t)$:

$$2\left[(k-1)t-t^2\right]$$

$$-(2t+2)(k-1-2t)$$

נפתח סוגריים:

$$=2(k-1)t-2t^2-2(k-1)t+4t^2$$

$$-2(k-1)+4t$$

$$=2t^2+4t-2(k-1)$$

$$R'(t)=\frac{2\left(t^2+2t+1-k\right)}{t^2(k-1-t)^2}$$

$$R'(t)=0\ \Rightarrow\ (t+1)^2=k$$

$$t+1=\sqrt{k} \;\Rightarrow\; t=\sqrt{k}-1$$

הפתרון $t=-\sqrt{k}-1$ שלילי ונפסל.

t	$R'(t)$	$R(t)$
$0<t<\sqrt{k}-1$	–	יורדת
$t=\sqrt{k}-1$	0	מינימום
$\sqrt{k}-1<t<k-1$	+	עולה

המכנה חיובי, ולכן סימן $R'(t)$ הוא סימן הביטוי $(t+1)^2-k$.

תשובה: $t=\sqrt{k}-1$

סעיף ג

היחס $\frac{S_A}{S_B}$ הוא ההופכי של $\frac{S_B}{S_A}$, ושניהם חיוביים. כשמספר חיובי קטן ביותר – ההופכי שלו גדול ביותר.

לכן $\frac{S_A}{S_B}$ מקסימלי בדיוק כאשר $\frac{S_B}{S_A}$ מינימלי, כלומר לפי סעיף ב:

$$t=\sqrt{k}-1$$

תשובה: $t=\sqrt{k}-1$**, כמו בסעיף ב**

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x^2-a^2}{(x-4)^2}$, $0<a<4$ הוא פרמטר.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{x^2}{(x-4)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ב. **(1)** הוכיחו כי גרף הפונקצייה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$, על ידי הישר $x=1$ ועל ידי ציר ה־ y.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה מתאפס כאשר $x=4$, ולכן תחום ההגדרה:

$$x\neq 4$$

תשובה: $x\neq 4$

סעיף א (2)

אסימפטוטה אנכית: ב־$x=4$ המכנה מתאפס, והמונה שם הוא $16-a^2$. נתון $0<a<4$, ולכן $16-a^2\neq 0$:

$$x=4$$

אסימפטוטה אופקית: המונה והמכנה ממעלה 2, והמקדמים של x^2 בשניהם הם 1:

$$y=\frac{1}{1}=1$$

תשובה: $x=4$

$y=1$

סעיף א (3)

עם ציר ה־x: נציב $y=0$:

$$x^2-a^2=0\ \Rightarrow\ x=\pm a$$

שתי הנקודות בתחום, כי $a\neq 4$. הנקודות: $(a,0)$ ו־$(-a,0)$.

עם ציר ה־y: נציב $x=0$:

$$f(0)=\frac{-a^2}{16}$$

הנקודה: $\left(0,-\frac{a^2}{16}\right)$.

תשובה: $(a,0)$
$(-a,0)$
$\left(0,-\frac{a^2}{16}\right)$

סעיף א (4)

נגזור לפי נגזרת המנה:

המונה:

$$2x(x-4)^2-(x^2-a^2)\cdot 2(x-4)$$

והמכנה $(x-4)^4$.

נצמצם את המונה והמכנה בגורם $x-4$:

$$f'(x)=\frac{2x(x-4)-2(x^2-a^2)}{(x-4)^3}$$

$$f'(x)=\frac{2a^2-8x}{(x-4)^3}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ x=\frac{a^2}{4}$$

נתון $0<a<4$, ולכן:

$$0<\frac{a^2}{4}<4$$

המונה חיובי משמאל ל־$\frac{a^2}{4}$ ושלילי מימין לו. המכנה שלילי משמאל ל־4 וחיובי מימין לו. טבלת סימנים:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<\frac{a^2}{4}$	−	יורדת
$x=\frac{a^2}{4}$	0	מינימום
$\frac{a^2}{4}<x<4$	+	עולה
$x>4$	−	יורדת

בנקודה $x=\frac{a^2}{4}$ יש מינימום.

תשובה: $x=\frac{a^2}{4}$ **– מינימום**

סעיף א (5)

נאסוף את הנתונים מתת־סעיפים 1–4:

- אסימפטוטות: $x=4$ ו־$y=1$.
- חיתוך עם הצירים: $(-a,0)$, $(a,0)$ ו־$\left(0,-\frac{a^2}{16}\right)$.
- מינימום בנקודה שבה $x=\frac{a^2}{4}$, בין 0 ל־a.
- משמאל לאסימפטוטה: יורדת עד המינימום ואז עולה לכיוון $+\infty$.
- מימין לאסימפטוטה: יורדת מ־$+\infty$ לכיוון $y=1$.

סקיצה של f: ענף שמאלי עם מינימום ושני חיתוכים עם ציר x, ענף ימני מעל y=1; אסימפטוטות x=4 ו-y=1
הסקיצה איכותית: היא נבנתה רק מהנתונים שמצאנו בתת־סעיפים 1–4, התקפים לכל $0<a<4$, בלי להציב ערך מספרי במקום הפרמטר a.

תשובה: שני ענפים.
אסימפטוטות: $x=4$, $y=1$.
מינימום בין 0 ל-a.
סקיצה של f: ענף שמאלי עם מינימום ושני חיתוכים עם ציר x, ענף ימני מעל y=1; אסימפטוטות x=4 ו-y=1

סעיף ב (1)
נחשב את ההפרש בין הפונקציות בתחום ההגדרה המשותף $x \neq 4$:

$$g(x)-f(x)=\frac{x^2-(x^2-a^2)}{(x-4)^2}$$
$$=\frac{a^2}{(x-4)^2}$$

המונה חיובי, כי $a \neq 0$. המכנה חיובי, כי $x \neq 4$. לכן:

$$g(x)-f(x)>0$$

לכל x בתחום, כלומר גרף g נמצא כולו מעל גרף f.
תשובה: הוכחה: $g(x)-f(x)=\frac{a^2}{(x-4)^2}>0$

סעיף ב (2)
לפי ב (1), בתחום $0 \leq x \leq 1$ גרף g מעל גרף f, ולכן:

$$S=\int_0^1 \big(g(x)-f(x)\big)dx$$
$$=\int_0^1 \frac{a^2}{(x-4)^2}dx$$

פונקציה קדומה:

$$\int \frac{dx}{(x-4)^2}=-\frac{1}{x-4}$$
$$S=a^2\left[-\frac{1}{x-4}\right]_0^1$$
$$=a^2\left(-\frac{1}{-3}-\left(-\frac{1}{-4}\right)\right)$$
$$=a^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{a^2}{12}$$

תשובה: $S=\frac{a^2}{12}$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) האם גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.

(3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

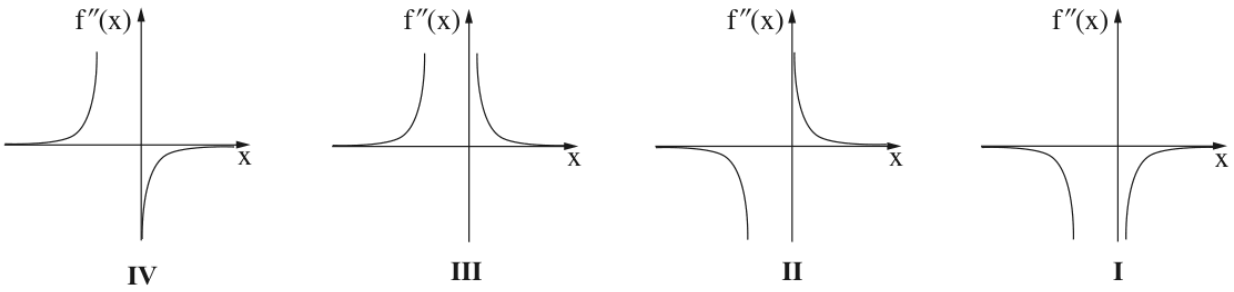
נתון כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ג. היעזרו בגרף הפונקצייה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.

נמקו את קביעתכם.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=1$ ו־ $x=2$.



פתרון מלא

סעיף א (1)

הביטוי שבתוך השורש נמצא במכנה, ולכן הוא חייב להיות חיובי:

$$x^2+x>0 \;\Rightarrow\; x(x+1)>0$$

זו פרבולה "מחייכת" שאפסיה -1 ו־0, והיא חיובית מחוץ לקטע שביניהם:

$$x<-1 \quad \text{או} \quad x>0$$

תשובה: $x<-1$
או $x>0$

סעיף א (2)

חיתוך עם ציר ה־y: צריך $x=0$, אבל $x=0$ אינו בתחום ההגדרה – אין חיתוך.

חיתוך עם ציר ה־x: צריך $f(x)=0$, כלומר המונה $2x=0$, ושוב $x=0$ – לא בתחום. אין חיתוך.

הגרף אינו חותך את הצירים.

תשובה: לא. הנקודה היחידה האפשרית היא $x=0$, והיא אינה בתחום ההגדרה.

סעיף א (3)

אסימפטוטה אנכית: נבדוק מה קורה ליד $x=-1$, משמאל:

$$x\to -1^-: \quad \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}}\to \frac{-2}{0^+}=-\infty$$

לכן הישר $x=-1$ הוא אסימפטוטה אנכית.

ליד $x=0$, מימין, גם המונה וגם המכנה שואפים ל־0. עבור $x>0$ אפשר לצמצם:

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

$$x\to 0^+ : \quad f(x)\to 0$$

לכן $x=0$ אינו אסימפטוטה: הגרף מתקרב לנקודה $(0,0)$, שאינה שייכת לו.

אסימפטוטות אופקיות: נוציא $|x|$ מהשורש:

$$\sqrt{x^2+x}=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

כאשר $x\to+\infty$, $|x|=x$:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\to 2$$

כאשר $x\to-\infty$, $|x|=-x$:

$$f(x)=\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\to -2$$

האסימפטוטות: $x=-1$, ו־$y=2$ מימין, ו־$y=-2$ משמאל.

תשובה: $x=-1$

$y=2$

$y=-2$

סעיף א (4)

נגזור לפי נגזרת המנה:

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+x}-2x\cdot\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}{x^2+x}$$

נכפיל מונה ומכנה ב־$\sqrt{x^2+x}$:

$$f'(x)=\frac{2(x^2+x)-x(2x+1)}{(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}$$

$$f'(x)=\frac{x}{(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}$$

המכנה חיובי בכל תחום ההגדרה, ולכן סימן $f'(x)$ הוא סימן x:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<-1$	–	יורדת
$x>0$	+	עולה

עולה ב־$x>0$, יורדת ב־$x<-1$. אין נקודות קיצון.

תשובה: עולה: $x>0$

יורדת: $x<-1$

סעיף ב

נאסוף את הנתונים מסעיף א:

- הענף השמאלי, בתחום $x < -1$, יורד מהאסימפטוטה $y = -2$ אל $-\infty$ ליד $x = -1$.
- הענף הימני, בתחום $x > 0$, עולה מהנקודה הריקה $(0, 0)$ ומתקרב ל־$y = 2$.
- אין חיתוך עם הצירים ואין קיצון.

סקיצה של f: ענף שמאלי יורד מ-y=-2 אל מינוס אינסוף ליד x=-1, ענף ימני עולה מהנקודה הריקה (0,0) אל y=2

תשובה: ענף שמאלי: יורד מ־$y = -2$ אל $x = -1$.
ענף ימני: עולה מ־$(0, 0)$, לא כולל, אל $y = 2$.

סקיצה של f: ענף שמאלי יורד מ-y=-2 אל מינוס אינסוף ליד x=-1, ענף ימני עולה מהנקודה הריקה (0,0) אל y=2

סעיף ג

נקרא מהסקיצה את הקעירות של f (נתון שאין נקודות פיתול):

- ב־$x < -1$ הגרף יורד ונעשה תלול יותר ויותר – הנגזרת f' יורדת, ולכן f קעורה כלפי מטה ו־$f''(x) < 0$.
- ב־$x > 0$ הגרף עולה ונעשה שטוח יותר ויותר – הנגזרת f' יורדת, ולכן f קעורה כלפי מטה ו־$f''(x) < 0$.
- כאשר $x \to \pm\infty$ הגרף של f מתקרב לאסימפטוטה אופקית, ולכן $f''(x) \to 0$.

הגרף המתאים הוא גרף שבו $f''(x)$ שלילית בשני הענפים (מתחת לציר ה־x) ושואפת ל־0 באינסוף – **גרף I**.

תשובה: גרף I.
f קעורה כלפי מטה בשני הענפים, ולכן $f''(x) < 0$.

סעיף ד

בתחום $1 \le x \le 2$ גרף I נמצא מתחת לציר, כלומר $f''(x) < 0$. לכן:

$$S = -\int_1^2 f''(x)\,dx = -\left[f'(x)\right]_1^2$$

$$S = f'(1) - f'(2)$$

לפי הנגזרת מסעיף א (4):

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$f'(2) = \frac{2}{6\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{18}$$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{18} \approx 0.217$$

תשובה: $S = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{18} \approx 0.217$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=x+\sqrt{x^2-4}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־x (אם יש כאלה).

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(4) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה ($\cup$) וכלפי מטה ($\cap$) של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=-f(-x)$. הפונקציות $f(x)$ ו־$h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. באותה מערכת צירים שבה סרטטתם סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$, הוסיפו בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)$.

נתון: $a>4$ הוא פרמטר.

ד. סדרו את הביטויים **I–III** שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר (כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

I. $\int_{a}^{a+1}(f(x)-h(x))dx$ **II.** $\int_{a+1}^{a+2}(f(x)-h(x))dx$ **III.** $\int_{-a+1}^{-a+2}(f(x)-h(x))dx$

פתרון מלא

סעיף א (1)

$f(x)=x+\sqrt{x^2-4}$. הביטוי שבתוך השורש חייב להיות אי־שלילי:

$$x^2-4\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2\geq 4$$

$$x\leq -2 \text{ או } x\geq 2$$

תשובה: $x\leq -2$ **או** $x\geq 2$

סעיף א (2)

נפתור $f(x)=0$:

$$\sqrt{x^2-4}=-x$$

צריך $-x\geq 0$, כלומר $x\leq 0$. נעלה בריבוע:

$$x^2-4=x^2 \;\Rightarrow\; -4=0$$

אין פתרון, ולכן לגרף אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

תשובה: אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

סעיף א (3)

נגזור:

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

בתחום $x>2$**:** שני המחוברים חיוביים, ולכן $f'(x)>0$ והפונקציה עולה.

בתחום $x<-2$**:** השורש קטן מהערך המוחלט של x:

$$\sqrt{x^2-4} < \sqrt{x^2} = |x|$$

ומכיוון ש־x שלילי:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} < \frac{x}{|x|} = -1$$

כלומר $f'(x) < 0$ והפונקציה יורדת.

הנגזרת לא מתאפסת אף פעם. בקצוות התחום:

$$f(-2) = -2, \quad f(2) = 2$$

תשובה: הפונקציה יורדת בתחום $x \le -2$ ועולה בתחום $x \ge 2$.

סעיף א (4)

נגזור שוב:

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4}$$
$$= \frac{x^2-4-x^2}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$$
$$f''(x) = \frac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$$

המכנה חיובי בכל תחום ההגדרה, פרט לקצוות שבהם f'' לא מוגדרת. לכן $f''(x) < 0$.

הפונקציה קעורה כלפי מטה בשני התחומים, ואין תחומי קעירות כלפי מעלה.

תשובה: קעורה כלפי מטה $(\cap)$ בתחום $x < -2$ ובתחום $x > 2$; אין תחומי קעירות כלפי מעלה.

סעיף ב

נשלים את התמונה בהתנהגות באין־סוף:

כאשר $x \to \infty$: שני המחוברים גדלים, ולכן $f(x) \to \infty$.

כאשר $x \to -\infty$ נכפול ונחלק בצמוד:

$$f(x) = \frac{x^2-(x^2-4)}{x-\sqrt{x^2-4}} = \frac{4}{x-\sqrt{x^2-4}}$$

המכנה שואף למינוס אינסוף, ולכן $f(x) \to 0^-$: האסימפטוטה האופקית משמאל היא $y = 0$.

סיכום: משמאל הגרף יורד מתחת לציר ה־x, מ־$y = 0$ אל נקודת הקצה $(-2, -2)$; מימין הגרף עולה מנקודת הקצה $(2, 2)$ אל אינסוף. שני הענפים קעורים כלפי מטה.

סקיצה של f(x)=x+√(x²−4): ענף שמאלי יורד מ־y=0 עד (−2,−2), ענף ימני עולה מ־(2,2)

תשובה: סקיצה: הענף השמאלי יורד מהאסימפטוטה $y = 0$ עד הנקודה $(-2, -2)$; הענף הימני עולה מהנקודה $(2, 2)$ לאין־סוף; הגרף קעור כלפי מטה.

סעיף ג

הגרף של $h(x) = -f(-x)$ מתקבל מהגרף של f בשני שיקופים: $f(-x)$ הוא שיקוף ביחס לציר ה־y, והמינוס שלפניו משקף ביחס לציר ה־x. יחד – שיקוף ביחס לראשית הצירים.

בפועל: $h(x) = x - \sqrt{x^2-4}$. הנקודה $(2, 2)$ עוברת ל־$(-2, -2)$ ולהפך; הענף הימני של h יורד מ־$(2, 2)$ אל האסימפטוטה $y = 0$, והענף השמאלי יורד מ־$(-2, -2)$ למינוס אינסוף.

f בקו מלא ו־h בקו מקווקו: h היא שיקוף של f ביחס לראשית

תשובה: סקיצה: h היא שיקוף של גרף f ביחס לראשית (בקו מקווקו).

סעיף ד

נחשב את ההפרש בין הפונקציות:

$$
\begin{aligned}
&f(x) - h(x) \\
&= \left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right) - \left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right) \\
&= 2\sqrt{x^2 - 4}
\end{aligned}
$$

זו פונקציה זוגית וחיובית, ולכן כל שלושת האינטגרלים חיוביים. בגלל הזוגיות, הגרף סימטרי ביחס לציר ה־y, ולכן:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-a+1}^{-a+2} 2\sqrt{x^2 - 4}\, dx \\
&= \int_{a-2}^{a-1} 2\sqrt{x^2 - 4}\, dx
\end{aligned}
$$

כלומר שלושת הביטויים הם שטחים מתחת לגרף של $2\sqrt{x^2 - 4}$ על שלושה קטעים ברוחב 1:

- ביטוי III: הקטע $[a - 2,\ a - 1]$
- ביטוי I: הקטע $[a,\ a + 1]$
- ביטוי II: הקטע $[a + 1,\ a + 2]$

מכיוון ש־$a > 4$, כל הקטעים נמצאים בתחום $x > 2$, ושם הפונקציה $2\sqrt{x^2 - 4}$ עולה. לכן ככל שהקטע ימני יותר, השטח גדול יותר:

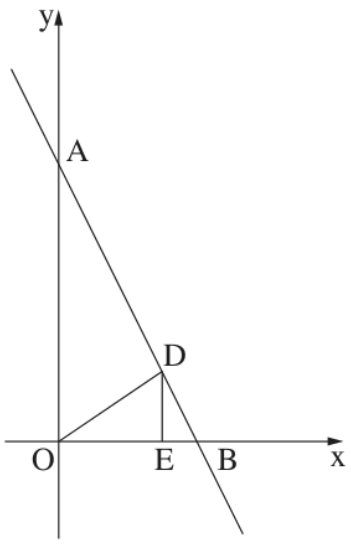
$$\text{III} < \text{I} < \text{II}$$

בדיקה מספרית עבור $a = 5$:

$$\text{III} \approx 5.73,\ \ \text{I} \approx 10.24,\ \ \text{II} \approx 12.37$$

תשובה: מהקטן לגדול: III, I, II.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 8



8. ישר ששיפועו -2 חותך את החלק החיובי של ציר ה־x בנקודה B, ואת החלק החיובי של ציר ה־y בנקודה A.

הנקודה D נמצאת על הישר AB ברביע הראשון.

הנקודה E נמצאת על ציר ה־x כך שהקטע DE מקביל לציר ה־y.

הנקודה O היא ראשית הצירים, כמתואר בסרטוט.

נסמן את אורך הקטע OE ב־p.

נתון: שטח המשולש OED הוא $\frac{p}{2}$.

א. הביעו באמצעות p את משוואת הישר AB.

ב. מצאו את הערך של p שבעבורו היחס בין שטח המשולש OED ובין שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.

פתרון מלא

סעיף א

הקטע DE מקביל לציר ה־y, ולכן המשולש OED ישר זווית ב־E, עם ניצבים $OE = p$ ו־DE:

$$S_{OED} = \frac{p \cdot DE}{2} = \frac{p}{2}$$

$$DE = 1$$

לכן $D(p, 1)$. הישר AB עובר דרך D ושיפועו -2:

$$y - 1 = -2(x - p)$$

$$y = -2x + 2p + 1$$

תשובה: $y = -2x + 2p + 1$

סעיף ב

הנקודה A על ציר ה־y, ולכן נציב $x = 0$:

$$A(0,\ 2p + 1)$$

הנקודה B על ציר ה־x, ולכן נציב $y = 0$:

$$0 = -2x + 2p + 1 \ \Rightarrow \ x = \frac{2p + 1}{2}$$

המשולש ABO ישר זווית בראשית, ולכן שטחו:

$$S_{ABO} = \frac{OB \cdot OA}{2} = \frac{\frac{2p+1}{2} \cdot (2p + 1)}{2}$$

$$= \frac{(2p + 1)^2}{4}$$

היחס בין השטחים:

$$k(p) = \frac{S_{OED}}{S_{ABO}} = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{(2p+1)^2}{4}} = \frac{2p}{(2p + 1)^2}$$

נגזור לפי p, כאשר $p > 0$:

$$k'(p) = \frac{2(2p+1)^2 - 2p \cdot 2(2p+1) \cdot 2}{(2p+1)^4}$$
$$= \frac{2(2p+1) - 8p}{(2p+1)^3} = \frac{2(1-2p)}{(2p+1)^3}$$

$k'(p) = 0$ עבור $p = \frac{1}{2}$.

p	$0 < p < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$p > \frac{1}{2}$
$k'(p)$	$+$	0	$-$
$k(p)$	↗	מקס'	↘

לכן היחס מקסימלי עבור $p = \frac{1}{2}$. היחס המקסימלי הוא $k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

תשובה: $p = \frac{1}{2}$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2a-x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x\neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

(2) הראו שהפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה אי־זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

(4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$, אם יש כאלה.

(5) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה ($\cup$) ואת תחום הקעירות כלפי מטה ($\cap$) של הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה גם הפונקצייה $g(x)=|f(x)|-b$, b הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ היא: $(-3\ ,\ 2)$.

ד. מצאו את הערכים של a ו־b .

נתונה גם הפונקצייה $s(x)=\int_1^x g(t)\,dt$, המוגדרת בתחום $1<x$.

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

אסימפטוטה אנכית: המכנה מתאפס ב־$x=0$, והמונה שם שווה ל־$2a\neq 0$. לכן:

$$x=0$$

אסימפטוטה אופקית: נכתוב

$$f(x)=\frac{2a}{x}-x$$

כאשר $x\to\infty$ מתקיים $\frac{2a}{x}\to 0$ ו־$-x\to-\infty$, ולכן $f(x)\to-\infty$; כאשר $x\to-\infty$, $f(x)\to\infty$.
הפונקציה לא שואפת למספר – אין אסימפטוטה אופקית.

תשובה: $x=0$; אין אסימפטוטה אופקית

סעיף א (2)

תחום ההגדרה $x\neq 0$ סימטרי ביחס ל־0.

$$f(-x)=\frac{2a-(-x)^2}{-x}=\frac{2a-x^2}{-x}$$

$$=-\frac{2a-x^2}{x}=-f(x)$$

לכן הפונקציה אי־זוגית.

תשובה: $f(-x)=-f(x)$, ולכן f אי־זוגית.

סעיף א (3)

ציר ה־y: $x=0$ אינו בתחום ההגדרה – אין נקודת חיתוך.

ציר ה־x:

$$\frac{2a-x^2}{x}=0 \;\Rightarrow\; x^2=2a$$
$$x=\pm\sqrt{2a}$$

הנקודות:

$$(\sqrt{2a},\,0),\quad (-\sqrt{2a},\,0)$$

תשובה: $(\sqrt{2a},0)$, $(-\sqrt{2a},0)$**; אין חיתוך עם ציר ה־**y

סעיף א (4)

$$f(x)=\frac{2a}{x}-x$$
$$f'(x)=-\frac{2a}{x^2}-1$$

$a>0$ ו־$x^2>0$, ולכן $-\frac{2a}{x^2}<0$ ו־$f'(x)<0$ לכל x בתחום.

תחומי ירידה: $x<0$, $x>0$.

תחומי עלייה: אין.

תשובה: ירידה: $x<0$ **וגם** $x>0$
אין תחומי עלייה

סעיף א (5)

$$f''(x)=\Big(-2ax^{-2}-1\Big)'=\frac{4a}{x^3}$$

$a>0$, ולכן הסימן של f'' הוא הסימן של x^3, כלומר של x:

- $x>0$: $f''(x)>0$ – קעורה כלפי מעלה $\cup$.
- $x<0$: $f''(x)<0$ – קעורה כלפי מטה $\cap$.

אין נקודת פיתול, כי $x=0$ אינו בתחום.

תשובה: קעורה כלפי מעלה: $x>0$
קעורה כלפי מטה: $x<0$

סעיף ב

לפי סעיף א:

- אסימפטוטה אנכית $x=0$; הפונקציה אי־זוגית – הגרף סימטרי ביחס לראשית.
- הפונקציה יורדת בכל אחד מהענפים.
- **ענף ימני:** כאשר $x\to 0^+$, $f(x)\to+\infty$. הוא יורד, חותך את ציר ה־x ב־$(\sqrt{2a},0)$ ויורד ל־$-\infty$. קעור כלפי מעלה.
- **ענף שמאלי:** מתקבל מהסימטריה – יורד מ־$+\infty$ דרך $(-\sqrt{2a},0)$ ל־$-\infty$ ליד $x=0^-$. קעור כלפי מטה.

סקיצה של f: שני ענפים יורדים, אסימפטוטה x=0, חיתוך עם ציר x ב־±√(2a)

תשובה: שני ענפים יורדים, אסימפטוטה $x=0$, חיתוך ב־$(\pm\sqrt{2a},0)$; הענף הימני $\cup$ והשמאלי $\cap$, סימטריים ביחס לראשית

סקיצה של f: שני ענפים יורדים, אסימפטוטה x=0, חיתוך עם ציר x ב־±√(2a)

סעיף ג

הגרף של $|f(x)|$: החלקים של f שמתחת לציר ה־x משתקפים מעליו, והחלקים שמעליו נשארים. מתקבל גרף שכולו מעל ציר ה־x או עליו, ונוגע בציר ב־$(\pm\sqrt{2a},0)$ – אלה נקודות מינימום (חדות). $|f|$ פונקציה זוגית, כי f אי־זוגית.

הגרף של $|f(x)|-b$: הזזה של b יחידות כלפי מטה:

- נקודות מינימום: $(\sqrt{2a},-b)$ ו־$(-\sqrt{2a},-b)$.
- אסימפטוטה אנכית $x=0$, ושם $g(x)\to+\infty$ משני הצדדים.
- כאשר $x\to\pm\infty$, $g(x)\to+\infty$.

סקיצה של g: גרף זוגי, מינימום ב־(±√(2a),–b), אסימפטוטה x=0

תשובה: גרף זוגי מעל $y=-b$, עם מינימום ב־$(\pm\sqrt{2a},-b)$ ואסימפטוטה $x=0$

סקיצה של g: גרף זוגי, מינימום ב־(±√(2a),–b), אסימפטוטה x=0

סעיף ד

לפי סעיף ג, נקודות הקיצון של g הן $(\pm\sqrt{2a},-b)$. הנקודה $(2,-3)$ היא אחת מהן, עם $x>0$:

$$\sqrt{2a}=2 \;\Rightarrow\; 2a=4 \;\Rightarrow\; a=2$$
$$-b=-3 \;\Rightarrow\; b=3$$

תשובה: $a=2$, $b=3$

סעיף ה

לפי המשפט היסודי, $s'(x)=g(x)$. עבור $a=2$, $b=3$ ובתחום $x>1$:

$$s'(x)=g(x)=\left|\frac{4}{x}-x\right|-3$$

$s'(x)=0$: $\left|\frac{4}{x}-x\right|=3$.

- $\frac{4}{x}-x=3$: $x^2+3x-4=0$, כלומר $x=1$ או $x=-4$ – לא בתחום $x>1$.
- $\frac{4}{x}-x=-3$: $x^2-3x-4=0$, כלומר $x=4$ או $x=-1$ – מתאים רק $x=4$.

סימן s':

$$s'(2)=|2-2|-3=-3<0$$
$$s'(5)=|0.8-5|-3=1.2>0$$

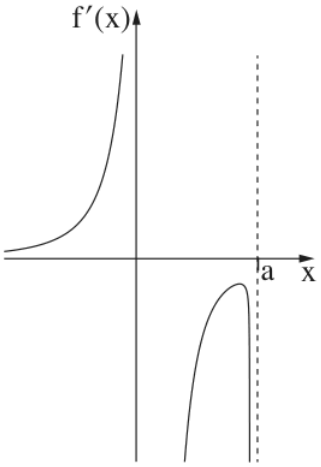
x	$s'(x)$	$s(x)$
$1<x<4$	–	יורדת
$x=4$	0	מינ׳
$x>4$	+	עולה

ל־$s(x)$ יש נקודת **מינימום** ב־$x=4$.

תשובה: נקודת מינימום, ב־$x=4$.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x \neq 0 \ , \ x \leq a$. a הוא פרמטר חיובי.



בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x \neq 0 \ , \ x < a$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים שמשוואותיהן: $y = 0 \ , \ x = a \ , \ x = 0$.

בתחום $x < 0$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה.

הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקצייה $f(x)$.

$f(a) = 0$.

א. **(1)** מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקצייה $f(x)$ (הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך). נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם בתת־סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים I–IV שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

I. $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ **II.** $\frac{\sqrt{x-a}}{x^2}$ **III.** $\frac{\sqrt{a-x}}{x}$ **IV.** $\frac{\sqrt{x-a}}{x}$

ג. איזה מן הביטויים I–IV מייצג את הפונקצייה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = (-2)$, הוא: $\frac{7}{16}$.

ד. מצאו את הערך של a .

ה. הציבו $a = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = 1$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

לפי גרף הנגזרת:

- עבור $x < 0$ הגרף של f' מעל ציר ה־x: $f'(x) > 0$.
- עבור $0 < x < a$ הגרף של f' מתחת לציר ה־x: $f'(x) < 0$.

תחום עלייה: $x < 0$.

תחום ירידה: $0 < x \leq a$, כי הפונקציה f מוגדרת גם ב־$x = a$.

תשובה: עלייה: $x < 0$

ירידה: $0 < x \leq a$

סעיף א (2)

בנקודת פיתול של f הנגזרת f' עוברת מעלייה לירידה או להפך, כלומר ל־f' יש שם נקודת קיצון.

- בתחום $x < 0$ הנגזרת f' עולה, לפי הנתון – אין לה קיצון, ולכן אין שם נקודת פיתול.

- בתחום $0 < x < a$ הגרף של f' עולה ואחר כך יורד – יש לו נקודת מקסימום אחת. שם f עוברת מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה.

לכן ל־f יש **נקודת פיתול אחת**, בתחום $0 < x < a$.

תשובה: נקודת פיתול אחת.

סעיף ב

נאסוף את הנתונים:

- **$x < 0$:** f עולה וקעורה כלפי מעלה, כי f' עולה. $y = 0$ אסימפטוטה, ולכן כאשר $x \to -\infty$ הגרף מתקרב ל־0 מלמעלה, ועולה ל־$+\infty$ ליד האסימפטוטה $x = 0$.
- **$0 < x \leq a$:** f יורדת עד $f(a) = 0$. היא יורדת ומגיעה ל־0, ולכן ליד $x = 0^+$ היא שואפת ל־$+\infty$. בתחילה היא קעורה כלפי מעלה, ואחרי נקודת הפיתול – כלפי מטה.

סקיצה אפשרית של f: ענף שמאלי עולה מ־0 לאינסוף ליד x=0, ענף ימני יורד מאינסוף לנקודה (a,0) עם נקודת פיתול

תשובה: ענף שמאלי: עולה מהאסימפטוטה $y = 0$ ל־$+\infty$ ליד $x = 0$
ענף ימני: יורד מ־$+\infty$ עד $(a, 0)$, עם נקודת פיתול אחת

סקיצה אפשרית של f: ענף שמאלי עולה מ־0 לאינסוף ליד x=0, ענף ימני יורד מאינסוף לנקודה (a,0) עם נקודת פיתול

סעיף ג

תחום ההגדרה של f הוא $x \leq a$, $x \neq 0$. בביטויים II ו־IV מופיע $\sqrt{x-a}$, שמוגדר רק עבור $x \geq a$ – הם לא מתאימים.

סימן: לפי סעיף ב, $f(x) > 0$ עבור $x < 0$, כי הפונקציה עולה מ־0.

- ביטוי III, $\frac{\sqrt{a-x}}{x}$: עבור $x < 0$ המכנה שלילי, ולכן הביטוי שלילי – לא מתאים.
- ביטוי I, $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$: חיובי לכל $x < a$, $x \neq 0$, ו־$f(a) = 0$ – מתאים.

לכן f מיוצגת על ידי **ביטוי I**.

תשובה: ביטוי I: $f(x) = \frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$

סעיף ד

נגזרת (כלל המנה):

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{a-x}} \cdot x^2 - \sqrt{a-x} \cdot 2x}{x^4}$$

נכפול מונה ומכנה ב־$2\sqrt{a-x}$ ונצמצם ב־x:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x(a-x)}{2x^4\sqrt{a-x}}$$
$$= \frac{3x - 4a}{2x^3\sqrt{a-x}}$$

נציב $x = -2$:

$$f'(-2) = \frac{-6 - 4a}{2 \cdot (-8)\sqrt{a+2}}$$

$$= \frac{6+4a}{16\sqrt{a+2}}$$
$$\frac{6+4a}{16\sqrt{a+2}} = \frac{7}{16}$$
$$6+4a = 7\sqrt{a+2}$$

נעלה בריבוע:

$$36+48a+16a^2 = 49a+98$$
$$16a^2 - a - 62 = 0$$
$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+3968}}{32} = \frac{1 \pm 63}{32}$$

$a > 0$, ולכן $a = 2$. בדיקה: $6+8 = 14 = 7\sqrt{4}$ ✓.

תשובה: $a = 2$

סעיף ה

עבור $a = 2$:

$$\big(f(x)\big)^2 = \frac{2-x}{x^4}$$

הפונקציה $\big(f(x)\big)^2$ מתאפסת ב־$x = 2$ וחיובית עבור $x < 2$. השטח המוגבל על ידי הגרף, ציר ה־x והישר $x = 1$ נמצא בין $x = 1$ ל־$x = 2$:

$$S = \int_1^2 \frac{2-x}{x^4}\,dx$$
$$= \int_1^2 \left(2x^{-4} - x^{-3}\right)dx$$
$$= \Big[-\frac{2}{3x^3} + \frac{1}{2x^2}\Big]_1^2$$
$$= \Big(-\frac{2}{24} + \frac{1}{8}\Big) - \Big(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\Big)$$
$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$$

תשובה: $\frac{5}{24}$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 6

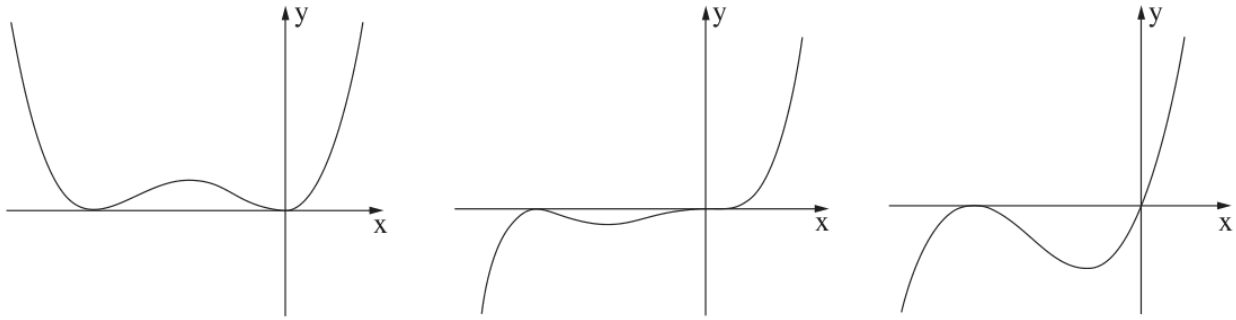
6. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^n \cdot (x+1)^2$, $n > 1$ הוא מספר טבעי. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה). הבחינו בין n זוגי ובין n אי־זוגי.

ג. מצאו את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות n , אם יש צורך. הבחינו בין n זוגי ובין n אי־זוגי.

לפניכם שלושה גרפים I–III . אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי־זוגי.



III II I

ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי־זוגי. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקצייה $g(x) = a \cdot f(x-2)$, a הוא פרמטר חיובי.

נסמן ב־ T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $g(x)$ ובין ציר ה־ x .

ה. הביעו באמצעות a ו־ T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין ציר ה־ x . נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

ציר ה־x: נפתור $f(x) = 0$:

$$x^n(x+1)^2 = 0$$

$$x = 0, \qquad x = -1$$

ציר ה־y: $f(0) = 0$ – זו אותה נקודה, הראשית.

תשובה: $(0,0)$ **ו־**$(-1,0)$

סעיף ב

הגורם $(x+1)^2$ חיובי לכל x שונה מ־-1, ולכן הסימן של f נקבע לפי x^n.

כאשר n זוגי: החזקה x^n חיובית לכל x שונה מ־0. לכן f חיובית בכל מקום פרט לנקודות $x = -1$ ו־$x = 0$, ואין תחום שלילי.

כאשר n אי־זוגי: הסימן של x^n כסימן של x. לכן f חיובית מימין לראשית, ושלילית משמאל לה (פרט לנקודה $x = -1$).

תשובה: כאשר n זוגי:

חיובית לכל x פרט ל־0 ול־-1

אין תחום שלילי

כאשר n אי־זוגי:

חיובית: $x > 0$

שלילית: $x < 0,\ x \neq -1$

סעיף ג

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = nx^{n-1}(x+1)^2 + x^n \cdot 2(x+1)$$
$$= x^{n-1}(x+1)\big[n(x+1) + 2x\big]$$
$$= x^{n-1}(x+1)\big[(n+2)x + n\big]$$

הנגזרת מתאפסת ב־$x = 0$, ב־$x = -1$, וב:

$$x = -\frac{n}{n+2}$$

(נקודה זו בין -1 ל־0.)

כאשר n זוגי: החזקה $n-1$ אי־זוגית, ולכן הסימן של x^{n-1} כסימן של x.

תחום	f'	f
$x < -1$	−	יורדת
$x = -1$	0	מינימום
$-1 < x < -\frac{n}{n+2}$	+	עולה
$x = -\frac{n}{n+2}$	0	מקסימום
$-\frac{n}{n+2} < x < 0$	−	יורדת
$x = 0$	0	מינימום
$x > 0$	+	עולה

כאשר n אי־זוגי: החזקה $n-1$ זוגית, ולכן x^{n-1} אינו שלילי ואינו מחליף סימן ב־0.

תחום	f'	f
$x < -1$	+	עולה
$x = -1$	0	מקסימום
$-1 < x < -\frac{n}{n+2}$	−	יורדת
$x = -\frac{n}{n+2}$	0	מינימום
$-\frac{n}{n+2} < x < 0$	+	עולה
$x = 0$	0	אין קיצון
$x > 0$	+	עולה

תשובה: כאשר n זוגי:

מינימום: $x = -1,\ x = 0$

מקסימום: $x = -\frac{n}{n+2}$

כאשר n אי־זוגי:

מקסימום: $x = -1$

מינימום: $x = -\frac{n}{n+2}$

סעיף ד

כאשר n זוגי: לפי סעיפים ב ו־ג, הגרף לא יורד מתחת לציר ה־x, ויש לו שני מינימומים (ב־-1 וב־0) ומקסימום ביניהם – גרף III.

כאשר n אי־זוגי: הגרף שלילי משמאל לראשית וחיובי מימינה. יש לו מקסימום ב־$x=-1$ (נוגע בציר), מינימום ביניהם, ובראשית שיפוע אפס בלי קיצון – גרף II.

(בגרף I הגרף חוצה את הציר בראשית בשיפוע שאינו אפס. זה קורה רק כאשר $n=1$, וזה לא אפשרי כאן.)

תשובה: כאשר n זוגי: גרף III

כאשר n אי־זוגי: גרף II

סעיף ה

הגרף של $g(x)=a\cdot f(x-2)$ מתקבל מהגרף של f בהזזה של 2 ימינה ובמתיחה פי a בכיוון ציר ה־y.

הזזה אינה משנה שטח, ומתיחה פי a מכפילה כל שטח ב־a. לכן אם S הוא השטח בין הגרף של f לציר ה־x:

$$T=a\cdot S \;\Rightarrow\; S=\frac{T}{a}$$

תשובה: $\frac{T}{a}$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 8

8. לפניכם שלוש פונקציות שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)} \quad , \quad h(x)=\frac{x^3}{x(x+2)} \quad , \quad k(x)=\frac{x^3-1}{x^2(x+2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות ישׁ אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקצייה מקיימת את כל התכונות האלה. נמקו את קביעתכם.

ענו על סעיפים ב–ד עבור הפונקצייה שקבעתם בסעיף א.

ב. **(1)** מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ואת המשוואה של האסימפטוטה האנכית של הפונקצייה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה עם הצירים.

נתון כי לפונקצייה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה.

נסמן נקודה A על גרף הפונקצייה, שעבורה $x=t$, $-1<t<1$.

מן הנקודה A מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה־x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקצייה, כך שנוצר מלבן על ידי שני הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה־x.

ד. מצאו את ערכו של t שבעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

נבדוק כל פונקציה.

הפונקציה g: נפרק את המונה $x^2-1=(x-1)(x+1)$. עבור $x\neq -1$:

$$g(x)=\frac{x-1}{x+2}$$

ב־$x=-1$ אין אסימפטוטה (רק „חור"). יש אסימפטוטה אנכית אחת, $x=-2$, ואסימפטוטה אופקית $y=1$ ✓.

הפונקציה h: עבור $x\neq 0$:

$$h(x)=\frac{x^2}{x+2}$$

מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה – אין אסימפטוטה אופקית ✗.

הפונקציה k: המכנה $x^2(x+2)$ מתאפס ב־$x=0$ וב־$x=-2$, והמונה x^3-1 לא מתאפס שם – שתי אסימפטוטות אנכיות ✗.

תשובה: $g(x)$

סעיף ב (1)

לפי סעיף א, $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ עבור $x\neq -1$:

אנכית: המכנה מתאפס ב־$x=-2$. אופקית: המעלות שוות, ויחס המקדמים המובילים הוא $\frac{1}{1}=1$.

תשובה: אנכית: $x=-2$

אופקית: $y=1$

סעיף ב (2)

ציר ה־x:

$$x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1$$

ציר ה־y:

$$g(0)=\frac{0-1}{0+2}=-\frac{1}{2}$$

תשובה: $(1,0)$ **ו־** $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

סעיף ג

- $g(x)=\frac{x-1}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}$, ולכן g עולה בכל אחד מתחומי ההגדרה: $x<-2$, $-2<x<-1$ ו־$x>-1$ (הנקודה $x=-1$ אינה בתחום ההגדרה).
- אסימפטוטות: $x=-2$ ו־$y=1$.
- חיתוך עם הצירים: $(1,0)$ ו־$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.
- $x=-1$ לא בתחום ההגדרה: בגרף יש „חור" בנקודה $(-1,-2)$.

סקיצה של g עם אסימפטוטות x=-2 ו־y=1 וחור בנקודה (-1,-2)

תשובה: סקיצה:

סקיצה של g עם אסימפטוטות x=-2 ו־y=1 וחור בנקודה (-1,-2)

סעיף ד

לנקודה A שיעור x שהוא t, ושיעור y שהוא $g(t)$. בתחום הנתון המונה $t-1$ שלילי והמכנה $t+2$ חיובי, ולכן $g(t)$ שלילי: הנקודה A מתחת לציר ה־x.

רוחב המלבן – מהאסימפטוטה $x=-2$ עד A:

$$t+2$$

גובה המלבן – מציר ה־x עד A:

$$-g(t)=\frac{1-t}{t+2}$$

ההיקף:

$$P(t)=2(t+2)+\frac{2(1-t)}{t+2}$$

נגזור (נגזרת המנה בחלק השני):

$$P'(t)=2+\frac{2\left[-(t+2)-(1-t)\right]}{(t+2)^2}$$

$$P'(t)=2-\frac{6}{(t+2)^2}$$

$$P'(t)=0 \;\Rightarrow\; (t+2)^2=3$$

בתחום $t+2$ חיובי, ולכן:

$$t+2=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; t=\sqrt{3}-2\approx -0.27$$

הנגזרת שלילית משמאל לנקודה וחיובית מימינה, ולכן זו נקודת מינימום.

תשובה: $t=\sqrt{3}-2\approx -0.27$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. **(1)** מצאו את a .

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונות הפונקציות $g(x)=-f(x+2)$, $h(x)=|f(x)|$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) האם שיעור ה־ y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $g(x)$ גדול משיעור ה־ y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

נתון כי $\int_{-1}^{3}h(x)dx=\int_{-3}^{k}g(x)dx$, $k>-3$.

ד. מצאו את k . הסבירו את התשובה.

פתרון מלא

סעיף א

הביטוי שבתוך השורש נמצא במכנה, ולכן הוא חייב להיות חיובי ממש:

$$x+a>0\Rightarrow x>-a$$

תשובה: $x>-a$

סעיף ב (1)

כאשר $x\to -a^+$ המכנה $\sqrt{x+a}$ שואף ל־0. אם המונה לא שואף שם ל־0, מתקבלת אסימפטוטה אנכית $x=-a$. לכן כדי שלא תהיה אסימפטוטה, המונה חייב להתאפס ב־$x=-a$:

$$(-a)^2-9=0\Rightarrow a=\pm 3$$

הפרמטר a חיובי, ולכן $a=3$. בדיקה:

$$f(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x+3}}$$
$$f(x)=(x-3)\sqrt{x+3}$$

ואין לה אסימפטוטה אנכית. גם אסימפטוטה אופקית אין, כי $f(x)\to\infty$ כאשר $x\to\infty$.

תשובה: $a=3$

סעיף ב (2)

עם $a=3$: $f(x)=(x-3)\sqrt{x+3}$, בתחום $x>-3$.

ציר ה־x: $f(x)=0\Rightarrow x=3$ (הערך $x=-3$ אינו בתחום).

ציר ה־y:

$$f(0)=\frac{0-9}{\sqrt{3}}=-3\sqrt{3}$$

תשובה: $(3,0)$ **ו־**$(0,-3\sqrt{3})$

סעיף ב (3)

נגזור את $f(x)=(x-3)\sqrt{x+3}$ לפי כלל המכפלה:

$$f'(x)=\sqrt{x+3}+\frac{x-3}{2\sqrt{x+3}}$$
$$=\frac{2(x+3)+x-3}{2\sqrt{x+3}}=\frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+3}}$$

נשווה לאפס: $f'(x)=0\Rightarrow x=-1$. נציב:

$$f(-1)=(-4)\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$-3<x<-1$	$-$	↘
-1	0	מינ'
$x>-1$	$+$	↗

תשובה: מינימום: $(-1,-4\sqrt{2})$

סעיף ב (4)

הגרף מתחיל ליד הנקודה $(-3,0)$ (שאינה שייכת לגרף), יורד עד המינימום $(-1,-4\sqrt{2})$, ואחר כך עולה, עובר דרך $(0,-3\sqrt{3})$ ו־$(3,0)$, וממשיך לעלות.

סקיצה של f: מתחילה ליד (-3,0), מינימום (-1,-4√2), חותכת ב-(0,-3√3) ו-(3,0)

תשובה: סקיצה:

סקיצה של f: מתחילה ליד (-3,0), מינימום (-1,-4√2), חותכת ב-(0,-3√3) ו-(3,0)

סעיף ג (1)

$g(x)=-f(x+2)$**:** צריך ש־$x+2$ יהיה בתחום של f:

$$x+2>-3\Rightarrow x>-5$$

$|f(x)|=h(x)$**:** אותו תחום כמו של f: $x>-3$.

תשובה: תחום g**:** $x>-5$

תחום h**:** $x>-3$

סעיף ג (2)

g**:** הגרף של $g(x)=-f(x+2)$ מתקבל מהגרף של f בהזזה של 2 יחידות שמאלה ובשיקוף ביחס לציר ה־x. השיקוף הופך את נקודת המינימום של f לנקודת מקסימום:

$$(-1,-4\sqrt{2})\ \rightarrow\ (-3,\ 4\sqrt{2})$$

h**:** בקטע $-3<x<3$ מתקיים $f(x)<0$, ולכן $h(x)=-f(x)$, והמינימום של f הופך למקסימום של h:

$$(-1,\ 4\sqrt{2})$$

שיעורי ה־y של שתי נקודות המקסימום שווים ל־$4\sqrt{2}$.

תשובה: שווה – בשתיהן שיעור ה־y הוא $4\sqrt{2}$

סעיף ד

בקטע $-1 \le x \le 3$ מתקיים $f(x) \le 0$, ולכן $h(x) = -f(x)$:

$$\int_{-1}^{3} h(x)\,dx = \int_{-1}^{3} -f(x)\,dx$$

מצד שני, נציב $u = x + 2$ (הזזה): כאשר $x = -3$ מתקבל $u = -1$, וכאשר $x = k$ מתקבל $u = k + 2$:

$$\int_{-3}^{k} g(x)\,dx = \int_{-3}^{k} -f(x+2)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{k+2} -f(u)\,du$$

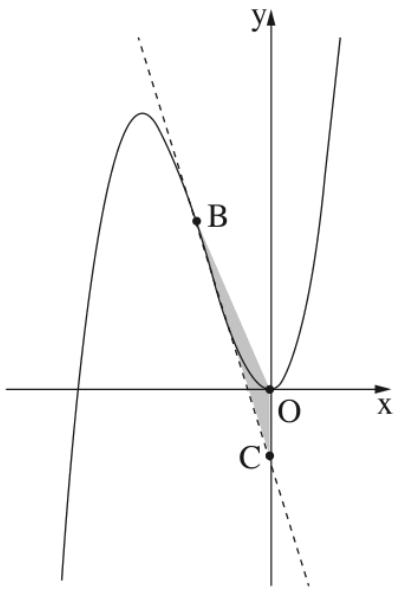
כלומר שני האינטגרלים הם שטחים מתחת לגרף של $-f$ החל מ־-1. הם שווים כאשר הגבול העליון זהה:

$$k + 2 = 3 \Rightarrow k = 1$$

זה הפתרון היחיד: עד $u = 3$ הפונקצייה $-f$ חיובית, ולכן האינטגרל עולה ממש; אחרי $u = 3$ הפונקצייה $-f$ שלילית, והאינטגרל קטן מהערך שהתקבל ב־$u = 3$.

תשובה: $k = 1$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 8



8. נתונה הפונקצייה $f(x)=x^3+4x^2$, המוגדרת לכל x.

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט).

מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

המשיק חותך את ציר ה־y בנקודה C.

נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה B.

א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה B.

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה־x.

ב. מהו תחום הערכים של t?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC.

פתרון מלא

סעיף א

הנקודה $B(t,\ t^3+4t^2)$. השיפוע:

$$f'(x)=3x^2+8x \Rightarrow m=3t^2+8t$$

משוואת המשיק:

$$y-(t^3+4t^2)=(3t^2+8t)(x-t)$$
$$y=(3t^2+8t)x-3t^3-8t^2+t^3+4t^2$$
$$y=(3t^2+8t)x-2t^3-4t^2$$

תשובה: $y=(3t^2+8t)x-2t^3-4t^2$

סעיף ב

הנקודה B נמצאת ברביע השני, ולכן $t<0$ וגם:

$$f(t)=t^2(t+4)>0 \Rightarrow t>-4$$

כלומר $-4<t<0$.

הנקודה C היא נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה־y, כלומר $x=0$:

$$y_C=-2t^3-4t^2=-2t^2(t+2)$$

הנקודה C מתחת לציר ה־x:

$$-2t^2(t+2)<0$$

מכיוון ש־$t\neq 0$, מתקיים $t^2>0$, ולכן:

$$t+2>0 \Rightarrow t>-2$$

יחד עם $-4<t<0$ מקבלים:

$$-2<t<0$$

תשובה: $-2<t<0$

סעיף ג

נבחר את OC (על ציר ה־y) כבסיס. אורכו:

$$OC = |y_C| = 2t^2(t+2)$$

הגובה לבסיס הוא המרחק של B מציר ה־y: $-t = |t|$.

$$S(t) = \tfrac{1}{2} \cdot 2t^2(t+2) \cdot (-t)$$
$$S(t) = -t^4 - 2t^3, \quad -2 < t < 0$$

נגזור:

$$S'(t) = -4t^3 - 6t^2 = -2t^2(2t+3)$$

הנגזרת מתאפסת: $S'(t) = 0$ בתחום: $t = -1.5$.

t	$S'(t)$	$S(t)$
$-2 < t < -1.5$	$+$	↗
-1.5	0	מקס'
$-1.5 < t < 0$	$-$	↘

$$S(-1.5) = -5.0625 + 6.75 = \frac{27}{16}$$

תשובה: $S_{max} = \frac{27}{16} = 1.6875$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=2x+\frac{2}{x}$.

א. **(1)** מִצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? הוכיחו את התשובה.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

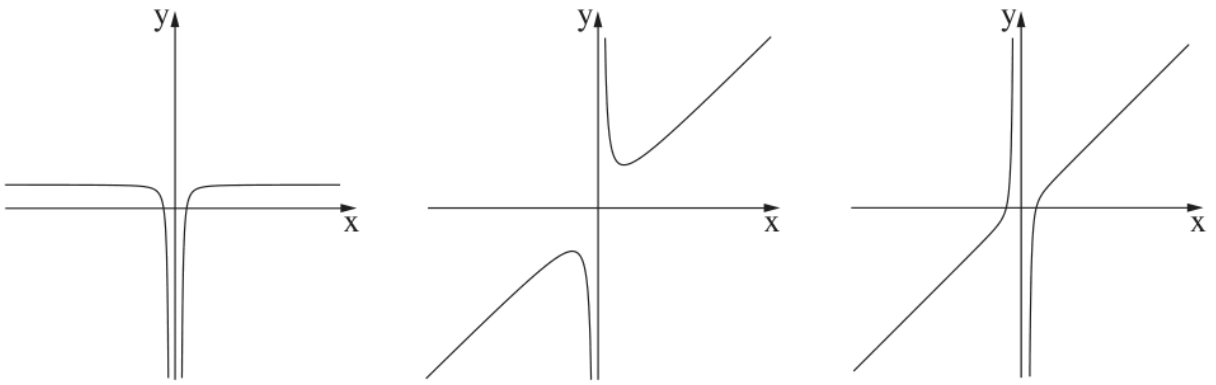
נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו־ $g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו־ $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

הפונקציות $f'(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים I–III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־ $g(x)$.

לכל אחת מן הפונקציות כִּתבו איזה גרף מתאר אותה. נַמקו את התשובה.



גרף I **גרף II** **גרף III**

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x .

ד. חַשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{4}$ ו־ $x=4$.

ה. נתון: $1<a$ הוא פרמטר. חשבו את $\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\,dx$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=\int_{1}^{x} f'(t)\,dt$. נתון כי הפונקצייה $h(x)$ מוגדרת בתחום $1\le x$.

ו. מִצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $h(x)$, וקִבעו את סוגה.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הביטוי $\frac{2}{x}$ מוגדר כאשר המכנה שונה מאפס:

$$x \neq 0$$

תשובה: $x \neq 0$

סעיף א (2)

התחום $x \neq 0$ סימטרי סביב 0. נציב $-x$:

$$f(-x) = 2(-x) + \frac{2}{-x}$$
$$= -\left(2x + \frac{2}{x}\right)$$
$$= -f(x)$$

לכן $f(x)$ היא פונקציה אי־זוגית.

תשובה: אי־זוגית,
כי $f(-x) = -f(x)$

סעיף א (3)

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^2-1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ כאשר $x^2 = 1$, כלומר $x = \pm 1$. נבנה טבלה, כולל $x = 0$ שבה הפונקציה לא מוגדרת:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < -1$	+	↗
$x = -1$	0	מקסימום
$-1 < x < 0$	–	↘
$x = 0$	–	לא מוגדרת
$0 < x < 1$	–	↘
$x = 1$	0	מינימום
$x > 1$	+	↗

תשובה: עלייה: $x < -1$ **או** $x > 1$
ירידה: $-1 < x < 0$ **או** $0 < x < 1$

סעיף ב

נחשב את שתי הפונקציות האחרות:

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$$
$$g(x) = f(x) \cdot f'(x)$$
$$= \left(2x + \frac{2}{x}\right)\left(2 - \frac{2}{x^2}\right)$$
$$= 4x - \frac{4}{x^3}$$

- $f(x)$ **– גרף II.** לפי סעיף א: ל־f מינימום ב־$(1, 4)$ ומקסימום ב־$(-1, -4)$, והגרף לא חותך את ציר x, כי $2x + \frac{2}{x} = 0$ אין לה פתרון.
- $f'(x)$ **– גרף III.** f' זוגית, שואפת ל־$-\infty$ ליד $x = 0$, מתאפסת ב־$x = \pm 1$ ושואפת ל־2 כש־$x \to \pm\infty$.

- $g(x)$ – **גרף I.** g אי־זוגית, כי היא מכפלה של אי־זוגית בזוגית. מימין ל־0 היא שואפת ל־$-\infty$, ועבור x גדול היא מתנהגת כמו $4x$ ועולה ללא הגבלה.

תשובה: **גרף I –** $g(x)$
גרף II – $f(x)$
גרף III – $f'(x)$

סעיף ג

$$g(x)=0 \;\Rightarrow\; 4x=\frac{4}{x^3}$$
$$x^4=1 \;\Rightarrow\; x=\pm 1$$

אפשר לראות זאת גם כך: $g=f\cdot f'$, ו־f אינה מתאפסת, ולכן g מתאפסת בדיוק היכן ש־$f'(x)=0$.

תשובה: $(1,0)$**,** $(-1,0)$

סעיף ד

פונקציה קדומה של g:

$$G(x)=\int \left(4x-4x^{-3}\right)dx$$
$$=2x^2+\frac{2}{x^2}$$

בתחום $\frac{1}{4}<x<1$ הגרף מתחת לציר x, ובתחום $1<x<4$ מעליו. נחשב כל חלק בנפרד:

$$\int_{1/4}^{1} g\,dx = G(1)-G\left(\tfrac{1}{4}\right)$$
$$=4-\left(\tfrac{1}{8}+32\right)$$
$$=-28.125$$
$$\int_{1}^{4} g\,dx = G(4)-G(1)$$
$$=\left(32+\tfrac{1}{8}\right)-4$$
$$=28.125$$

השטח בין g(x) לציר x

$$S=28.125+28.125=56.25$$

תשובה: $S=56.25$

סעיף ה

נתון $a>1$, ולכן $\frac{1}{a}<a$.

$$\int_{1/a}^{a} g(x)\,dx = G(a)-G\left(\tfrac{1}{a}\right)$$
$$=\left(2a^2+\frac{2}{a^2}\right)-\left(\frac{2}{a^2}+2a^2\right)=0$$

כלומר השטחים מתחת לציר ומעליו שווים לכל $a>1$, כמו שראינו בסעיף ד עבור $a=4$.

תשובה: $\int_{1/a}^{a} g(x)\,dx=0$

סעיף ו

$h(x)$ מוגדרת עבור $x \geq 1$. לפי המשפט היסודי:

$$h(x) = \int_1^x f'(t)\,dt = f(x) - f(1)$$

$$= 2x + \frac{2}{x} - 4$$

$$h'(x) = f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$$

עבור $x > 1$: $h'(x) > 0$, ולכן h עולה בכל התחום. נקודת הקיצון היחידה היא בקצה התחום, $x = 1$:

$$h(1) = \int_1^1 f'(t)\,dt = 0$$

מכיוון ש־h עולה מימין לנקודה, זוהי נקודת מינימום בקצה.

תשובה: $(1, 0)$ **– מינימום בקצה התחום**

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 8

8. נתונות שתי פונקציות: $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. **(1)** מְצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מְצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה־ x .

נתון כי שיעור ה־ x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך של הפונקצייה $f(x)$ עם הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A . t הוא פרמטר.

ב. הַביעו באמצעות t את אורך הקטע AB .

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB .

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נַמקו את התשובה.

פתרון מלא

סעיף א (1)

$f(x)=x^3$ היא פולינום, ולכן מוגדרת לכל x.

$g(x)=\sqrt{x^3}$ מוגדרת כאשר הביטוי שבתוך השורש אינו שלילי:

$$x^3 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 0$$

תשובה: הפונקציה f מוגדרת לכל x
הפונקציה g מוגדרת עבור $x \geq 0$

סעיף א (2)

נשווה, בתחום $x \geq 0$:

$$x^3 = \sqrt{x^3}$$

נעלה את שני האגפים בריבוע:

$$x^6 = x^3 \;\Rightarrow\; x^3\left(x^3-1\right)=0$$
$$x=0 \quad \text{או} \quad x=1$$

שני הערכים בתחום $x \geq 0$, ובשניהם מתקיים השוויון המקורי.

תשובה: $(0,0)$, $(1,1)$

סעיף ב

לפי הנתון $0<t<1$. הנקודה A על גרף f:

$$A=\left(t,t^3\right)$$

AB מקביל לציר x, ולכן ל־B אותו שיעור y:

$$\sqrt{x^3}=t^3 \;\Rightarrow\; x^3=t^6 \;\Rightarrow\; x=t^2$$
$$B=\left(t^2,t^3\right)$$

עבור $0<t<1$ מתקיים $t^2<t$, כלומר B משמאל ל־A:

$$AB = t - t^2$$

תשובה: $AB = t - t^2$

סעיף ג

הבסיס AB מקביל לציר x, ולכן הגובה מ־O אליו הוא שיעור ה־y של A, כלומר t^3:

$$S(t) = \frac{1}{2}\left(t - t^2\right)t^3 = \frac{t^4 - t^5}{2}$$

$$S'(t) = \frac{4t^3 - 5t^4}{2} = \frac{t^3(4 - 5t)}{2}$$

בתחום $0 < t < 1$ הנגזרת מתאפסת רק עבור $t = \frac{4}{5}$. משמאל לנקודה הנגזרת חיובית ומימין שלילית, ולכן זהו מקסימום:

$$S\left(\tfrac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\tfrac{4}{5}\right)^4 \cdot \tfrac{1}{5}$$

$$= \frac{128}{3125} = 0.04096$$

תשובה: $S_{\max} = \frac{128}{3125} \approx 0.041$

מתקבל כאשר $t = 0.8$

סעיף ד

אורך הקטע $AB = t - t^2$ הוא פרבולה הפוכה, והוא מקסימלי בקודקוד:

$$(t - t^2)' = 1 - 2t = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{2}$$

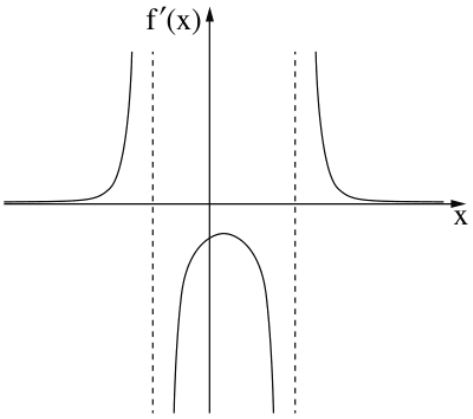
השטח המקסימלי מתקבל עבור $t = \frac{4}{5}$, ולא עבור $t = \frac{1}{2}$. הסיבה: השטח תלוי גם בגובה t^3, שגדל עם t.

תשובה: לא.

AB **מקסימלי עבור** $t = \frac{1}{2}$

השטח מקסימלי עבור $t = \frac{4}{5}$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 6



6. נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x<b\ ,\ b<x<c\ ,\ c<x$ וגזירה בכל תחום הגדרתה.

בסרטוט שלפניך מתואר הגרף של <u>פונקציית הנגזרת</u> $f'(x)$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד

ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים: $y=0\ ,\ x=b\ ,\ x=c$.

שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא a.

b, a ו־ c הם פרמטרים.

א. הבע את תשובותיך באמצעות b, a ו־ c, אם יש צורך.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a, 0)$.

ב. סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון גם כי $f(x)=\frac{18-36x}{(x^2-x-6)^2}$.

ג. מצא את b, a ו־ c.

ד. **(1)** הראה כי בתחום $b<x<c$ מתקיים: $f'(x)\cdot(f(x))^2\le 0$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)\cdot(f(x))^2$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=0$ ו־ $x=2a$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הסימן של $f'(x)$ נקרא מהגרף הנתון:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<b$	+	עולה
$b<x<c$	−	יורדת
$x>c$	+	עולה

עלייה: $x<b$ וגם $x>c$.

ירידה: $b<x<c$.

תשובה: עולה: $x<b$ **וגם** $x>c$

יורדת: $b<x<c$

סעיף א (2)

הקעירות של f נקבעת לפי הסימן של $f''(x)$, כלומר לפי העלייה והירידה של $f'(x)$. נקרא מהגרף של f':

- בתחום $x<b$ הנגזרת f' עולה, ולכן $f''>0$.
- בתחום $b<x<a$ הנגזרת f' עולה עד המקסימום שלה, ולכן $f''>0$.
- בתחום $a<x<c$ הנגזרת f' יורדת, ולכן $f''<0$.

- בתחום $x > c$ הנגזרת f' יורדת, ולכן $f'' < 0$.

קעורה כלפי מעלה ∪: $x < b$ וגם $b < x < a$.

קעורה כלפי מטה ∩: $a < x < c$ וגם $x > c$.

תשובה: ∪: $x < b$ **וגם** $b < x < a$

∩: $a < x < c$ **וגם** $x > c$

סעיף ב

נשתמש בתוצאות סעיף א:

- בכל אחד משלושת התחומים הגרף רציף, והישרים $x = b$ ו־$x = c$ הם אסימפטוטות אנכיות שלו.
- בתחום $x < b$ הגרף עולה וקעור כלפי מעלה.
- בתחום $b < x < c$ הגרף יורד, עובר בנקודה $(a, 0)$, ושם משנה קעירות (נקודת פיתול).
- בתחום $x > c$ הגרף עולה וקעור כלפי מטה.

סקיצה אפשרית של f: שלושה ענפים, אסימפטוטות x=b, x=c, ונקודת פיתול (a,0)

זו סקיצה אפשרית: בסקיצה הישר $y = 0$ אסימפטוטה אופקית, כפי שיתברר בסעיף ג.

תשובה: שלושה ענפים, אסימפטוטות $x = b$ ו־$x = c$, נקודת פיתול $(a, 0)$.

סקיצה אפשרית של f: שלושה ענפים, אסימפטוטות x=b, x=c, ונקודת פיתול (a,0)

סעיף ג

האסימפטוטות האנכיות הן נקודות האיפוס של המכנה:

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x - 3)(x + 2) = 0$$
$$x = 3 \quad \text{או} \quad x = -2$$

נתון $b < c$, ולכן $b = -2$ ו־$c = 3$.

הנקודה $(a, 0)$ על הגרף, ולכן $f(a) = 0$:

$$18 - 36a = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2}$$

תשובה: $a = \frac{1}{2}$**,** $b = -2$**,** $c = 3$

סעיף ד (1)

בתחום $b < x < c$ הפונקציה יורדת (סעיף א), ולכן $f'(x) < 0$.

כמו כן $f^2(x) \geq 0$ לכל x. מכפלה של מספר שלילי במספר אי־שלילי היא אי־חיובית:

$$f'(x) \cdot f^2(x) \leq 0$$

תשובה: הוכחה: בתחום זה $f'(x) < 0$ וגם $f^2(x) \geq 0$.

סעיף ד (2)

מתקיים $2a = 1$, ולכן התחום הוא $0 \leq x \leq 1$, והוא נמצא בתוך $-2 < x < 3$. לפי ד (1) הגרף שם אינו מעל ציר ה־x, ולכן:

$$S = -\int_0^1 f'(x) f^2(x)\, dx$$

הפונקציה $\frac{f^3(x)}{3}$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)f^2(x)$ (כלל השרשרת):

$$S = -\left[\frac{f^3(x)}{3}\right]_0^1 = \frac{f^3(0) - f^3(1)}{3}$$

נחשב:

$$f(0) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$
$$f(1) = \frac{18 - 36}{(1-1-6)^2} = \frac{-18}{36} = -\frac{1}{2}$$
$$S = \frac{\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right)}{3} = \frac{1}{12}$$

תשובה: $S = \frac{1}{12}$

בגרות חורף נבצרים תשפ״ב (2022) • שאלה 8

8. חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים.

מחֵלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה־צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל.

נסמן ב־ x את אורך צלע המשולש.

א. הבע באמצעות k את תחום ההגדרה של x .

ב. הבע באמצעות k את אורך צלע המשולש, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראה כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל בֵּמעגל שהתקבל.

פתרון מלא

סעיף א

המשולש שווה־צלעות, ולכן היקפו $3x$. מהחלק האחר, שאורכו $k-3x$, יוצרים מעגל.

שני החלקים צריכים להיות באורך חיובי:

$$x>0, \qquad k-3x>0$$

$$0<x<\frac{k}{3}$$

תשובה: $0<x<\frac{k}{3}$

סעיף ב

רדיוס המעגל: היקף המעגל הוא $k-3x$:

$$2\pi r=k-3x \;\Rightarrow\; r=\frac{k-3x}{2\pi}$$

סכום השטחים:

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\pi r^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{(k-3x)^2}{4\pi}$$

נגזרת:

$$S'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{6(k-3x)}{4\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3(k-3x)}{2\pi}$$

נשווה לאפס ונכפיל ב־2π:

$$\sqrt{3}\pi x=3k-9x$$

$$x(\sqrt{3}\pi+9)=3k$$

$$x=\frac{3k}{\sqrt{3}\pi+9}\approx 0.208k$$

סוג הקיצון:

$$S''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2\pi} > 0$$

לכן זו נקודת מינימום (והיחידה בתחום, ולכן מינימום מוחלט).

תשובה: $x = \frac{3k}{\sqrt{3}\pi+9} \approx 0.208k$

סעיף ג

מהשוואת הנגזרת לאפס בסעיף ב:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{3(k-3x)}{2\pi}$$

נחלק ב־3:

$$\frac{k-3x}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

אגף שמאל הוא רדיוס המעגל, ולכן כאשר הסכום מינימלי:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

רדיוס המעגל החוסם משולש שווה־צלעות שצלעו x, לפי משפט הסינוסים:

$$2R = \frac{x}{\sin 60^\circ}$$

$$R = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

כלומר $r = \frac{R}{2}$: רדיוס המעגל שהתקבל הוא רק חצי מהרדיוס הדרוש. לכן **אי אפשר** לחסום את המשולש במעגל שהתקבל.

(למעשה r הוא בדיוק רדיוס המעגל החסום *בתוך* המשולש.)

תשובה: הוכחה: רדיוס המעגל שהתקבל הוא חצי מרדיוס המעגל החוסם את המשולש.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 6

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{(x^3-m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=(-1)$.

ב. מצא את הערך של m .

הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאת, וענה על הסעיפים ג–ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה־ x .

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x הוא 1 (השטח שמימין לאנך).

מצא את הערך של k .

פתרון מלא

סעיף א (1)

הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה שונה מאפס:

$$(x^3-m)^2\neq 0$$
$$x^3\neq m \;\Rightarrow\; x\neq\sqrt[3]{m}$$

תשובה: כל x פרט ל־$x=\sqrt[3]{m}$

סעיף א (2)

אסימפטוטה אנכית: עבור $x=\sqrt[3]{m}$ המכנה מתאפס, והמונה $x^2=\sqrt[3]{m^2}\neq 0$ (כי $m>0$). לכן:

$$x=\sqrt[3]{m}$$

אסימפטוטה אופקית: במונה פולינום ממעלה 2 ובמכנה פולינום ממעלה 6. המעלה במכנה גדולה יותר, ולכן:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \;\Rightarrow\; y=0$$

תשובה: אנכית $x=\sqrt[3]{m}$, ואופקית $y=0$

סעיף ב

נגזור לפי כלל המנה:

$$f'(x)=\frac{2x(x^3-m)^2-x^2\cdot 2(x^3-m)\cdot 3x^2}{(x^3-m)^4}$$

נוציא גורם משותף $2x(x^3-m)$ ונצמצם:

$$f'(x)=\frac{2x\left[(x^3-m)-3x^3\right]}{(x^3-m)^3}$$
$$=\frac{-2x(2x^3+m)}{(x^3-m)^3}$$

בנקודת קיצון הנגזרת מתאפסת. נציב $x=-1$:

$$f'(-1)=\frac{2(-2+m)}{(-1-m)^3}=0$$
$$m-2=0\ \Rightarrow\ m=2$$

תשובה: $m=2$

סעיף ג

עבור $m=2$:

$$f(x)=\frac{x^2}{(x^3-2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{-4x(x^3+1)}{(x^3-2)^3}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=0$ או $x^3=-1$, כלומר $x=-1$.

נציב בנגזרת נקודה מכל תחום (למשל $x=-2$) ונקבל את טבלת הסימנים:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<-1$	$+$	↗
-1	0	מקס'
$-1<x<0$	$-$	↘
0	0	מינ'
$0<x<\sqrt[3]{2}$	$+$	↗
$\sqrt[3]{2}$	לא מוגדרת	אסימפטוטה
$x>\sqrt[3]{2}$	$-$	↘

נחשב את ערכי הפונקציה:

$$f(-1)=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$$
$$f(0)=0$$

תשובה: מקסימום $\left(-1,\frac{1}{9}\right)$**, מינימום** $(0,0)$

סעיף ד

נשתמש במה שמצאנו: אסימפטוטה אנכית $x=\sqrt[3]{2}\approx 1.26$, אסימפטוטה אופקית $y=0$, מקסימום $\left(-1,\frac{1}{9}\right)$ ומינימום $(0,0)$.

הפונקציה אינה שלילית לכל x בתחום (מונה ומכנה ריבועיים), ולכן משני צדי האסימפטוטה האנכית הגרף שואף ל־$+\infty$.

סקיצה של f(x): מקסימום ב-(−1, 1/9), מינימום ב-(0,0), אסימפטוטה אנכית x=∛2 שמשני צדיה הגרף עולה לאינסוף, ואסימפטוטה אופקית y=0

תשובה: סקיצה:
סקיצה של f(x): מקסימום ב-(–1, 1/9), מינימום ב-(0,0), אסימפטוטה אנכית x=∛2 שמשני צדיה הגרף עולה לאינסוף, ואסימפטוטה אופקית y=0

סעיף ה (1)

$g(x) = k \cdot f(x)$ עם $k < 0$: כל ערך של f מוכפל במספר שלילי, ולכן הגרף מתהפך ביחס לציר ה־x (ומתכווץ או נמתח אנכית).

המקסימום $\left(-1, \frac{1}{9}\right)$ הופך למינימום $\left(-1, \frac{k}{9}\right)$, הנקודה $(0, 0)$ הופכת למקסימום, והאסימפטוטות לא משתנות. משני צדי $x = \sqrt[3]{2}$ הגרף שואף ל־$-\infty$.

סקיצה של g(x)=k•f(x) עם k שלילי: מינימום ב-(–1, k/9), מקסימום ב-(0,0), הגרף יורד למינוס אינסוף משני צדי x=∛2; השטח בין x=–1 ל-x=0 מסומן

תשובה: (שיקוף של גרף f ביחס לציר ה־x).

סקיצה של g(x)=k•f(x) עם k שלילי: מינימום ב-(–1, k/9), מקסימום ב-(0,0), הגרף יורד למינוס אינסוף משני צדי x=∛2; השטח בין x=–1 ל-x=0 מסומן

סעיף ה (2)

נקודת הקיצון השמאלית של g היא ב־$x = -1$. מימין לאנך, הגרף חוזר לציר ה־x בנקודה $(0, 0)$, ולכן השטח הוא בין $x = -1$ ל־$x = 0$. בתחום הזה $g(x) \le 0$:

$$S = -\int_{-1}^{0} k\, f(x)\, dx = -k \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{(x^3 - 2)^2}\, dx$$

נמצא פונקציה קדומה. הנגזרת של $x^3 - 2$ היא $3x^2$, ולכן:

$$\int \frac{x^2}{(x^3 - 2)^2}\, dx = -\frac{1}{3(x^3 - 2)} + C$$

נחשב:

$$\left[-\frac{1}{3(x^3 - 2)}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

השטח נתון כ־1:

$$-k \cdot \frac{1}{18} = 1$$
$$k = -18$$

תשובה: $k = -18$

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 7

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של <u>פונקציית הנגזרת</u> $f'(x)$.

(4) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה־ x.

בתשובתך דייק שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

ב. **(1)** מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו $y = 4x + c$ (c פרמטר) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הביטוי שבתוך השורש חייב להיות אי־שלילי:

$$x^2 - 2x \geq 0$$
$$x(x-2) \geq 0$$

פרבולה צוחקת שהשורשים שלה 0 ו־2, ולכן:

$$x \leq 0 \quad \text{או} \quad x \geq 2$$

תשובה: $x \leq 0$ **או** $x \geq 2$

סעיף א (2)

נגזור:

$$f'(x) = 3 + 2 \cdot \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}$$
$$= 3 + \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$$

הנגזרת מוגדרת כאשר הביטוי בשורש חיובי ממש (השורש במכנה):

$$x^2 - 2x > 0$$
$$x < 0 \quad \text{או} \quad x > 2$$

תשובה: $x < 0$ **או** $x > 2$

סעיף א (3)

אסימפטוטות אנכיות: המכנה מתאפס ב־$x = 0$ וב־$x = 2$, והמונה $2x - 2$ שונה שם מאפס:

$$x \to 0^- : \quad \frac{-2}{0^+} \to -\infty$$
$$x \to 2^+ : \quad \frac{2}{0^+} \to +\infty$$

לכן $x=0$ ו־$x=2$ הן אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטות אופקיות: נחלק מונה ומכנה ב־$|x|$. כאשר $x \to \infty$:

$$\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \to 2$$

$$f'(x) \to 3 + 2 = 5$$

כאשר $x \to -\infty$ מתקיים $|x| = -x$, ולכן:

$$\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{-2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \to -2$$

$$f'(x) \to 3 - 2 = 1$$

תשובה: אנכיות: $x=0$ וגם $x=2$. אופקית $y=5$ כאשר $x \to \infty$, ואופקית $y=1$ כאשר $x \to -\infty$.

סעיף א (4)

נשווה את הנגזרת לאפס:

$$\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}} = -3$$

אגף ימין שלילי, ולכן צריך $2x-2<0$, כלומר $x<1$. בתחום ההגדרה זה אומר $x<0$.

נכפול במכנה ונעלה בריבוע:

$$(2x-2)^2 = 9(x^2-2x)$$

$$4x^2 - 8x + 4 = 9x^2 - 18x$$

$$5x^2 - 10x - 4 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{180}}{10} = 1 \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$$

רק הפתרון השלילי מתאים:

$$x = 1 - \frac{3}{\sqrt{5}} \approx -0.34$$

תשובה: $(-0.34,\ 0)$

סעיף א (5)

נאסוף את מה שמצאנו: בענף השמאלי $x<0$ הגרף מתחיל ליד האסימפטוטה $y=1$, חותך את ציר ה־x ב־$(-0.34, 0)$ ויורד ל־$-\infty$ ליד $x=0$.

בענף הימני $x>2$ הגרף יורד מ־$+\infty$ ליד $x=2$ ומתקרב לאסימפטוטה $y=5$. אין נקודות קיצון, ולכן בכל ענף הגרף יורד כל הזמן.

סקיצה של f'(x): ענף שמאלי יורד מ-y=1 דרך (−0.34,0) למינוס אינסוף ליד x=0; ענף ימני יורד מפלוס אינסוף ליד x=2 אל y=5

תשובה: סקיצה:

סקיצה של f'(x): ענף שמאלי יורד מ-y=1 דרך (−0.34,0) למינוס אינסוף ליד x=0; ענף ימני יורד מפלוס אינסוף ליד x=2 אל y=5

סעיף ב (1)

לפי גרף הנגזרת: בענף השמאלי $f' > 0$ משמאל ל־$x_0 \approx -0.34$ ו־$f' < 0$ מימינו. בענף הימני $f' > 5 > 0$. נבדוק גם את נקודות הקצה $x = 0$ ו־$x = 2$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < x_0$	$+$	↗
$x_0 \approx -0.34$	0	מקס'
$x_0 < x < 0$	$-$	↘
0		מינ' קצה
2		מינ' קצה
$x > 2$	$+$	↗

נחשב ערכים:

$$f(-0.34) \approx 0.76$$
$$f(0) = 0$$
$$f(2) = 6 + 2 \cdot 0 = 6$$

שימו לב: הערך המדויק במקסימום הוא $f(x_0) = 3 - \sqrt{5}$.

תשובה: מקסימום $(-0.34,\ 0.76)$, מינימום קצה $(0, 0)$, מינימום קצה $(2, 6)$

סעיף ב (2)

בענף השמאלי הגרף עולה עד המקסימום $(-0.34,\ 0.76)$ ויורד עד נקודת הקצה $(0, 0)$. כאשר $x \to -\infty$ הפונקציה שואפת ל־$-\infty$.

בענף הימני הגרף מתחיל בנקודת הקצה $(2, 6)$ ועולה כל הזמן.

סקיצה של f(x): ענף שמאלי עולה ממינוס אינסוף למקסימום (–0.34, 0.76) ויורד לנקודת הקצה (0,0); ענף ימני עולה מנקודת הקצה (2,6)

תשובה: סקיצה:

סקיצה של f(x): ענף שמאלי עולה ממינוס אינסוף למקסימום (–0.34, 0.76) ויורד לנקודת הקצה (0,0); ענף ימני עולה מנקודת הקצה (2,6)

סעיף ג

שיפוע הישר הוא 4. ישר כזה משיק לגרף רק אם יש x שעבורו $f'(x) = 4$.

מגרף הנגזרת, ובגלל שבכל ענף הנגזרת יורדת:

- בענף $x < 0$ הנגזרת מקבלת רק ערכים קטנים מ־1.
- בענף $x > 2$ הנגזרת מקבלת רק ערכים גדולים מ־5.

לכן אין x שעבורו $f'(x) = 4$, ואין ישר כזה שמשיק לגרף.

תשובה: לא. הנגזרת מקבלת רק ערכים קטנים מ־1 או גדולים מ־5, אף פעם לא 4.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 8

8. תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b.

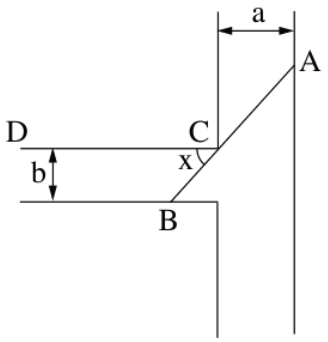
הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית

ובין דופן של התעלה המשנית (ראה סרטוט).

מהנדֶסת מתכננת סכר ישר, שיֵצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית,

יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית.

הסכר ייצוֹר זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.



א. הבע באמצעות a, b ו־x את אורך הסכר AB.

נתון כי $a = 2b$.

ב. מצא את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצא את b.

פתרון מלא

סעיף א

נחלק את הסכר בנקודה C לשני קטעים: CA בתוך התעלה הראשית ו־CB בתוך התעלה המשנית.

הקטע CA: רוחב התעלה הראשית a הוא הניצב שליד הזווית x במשולש ישר זווית שהיתר שלו CA:

$$\cos x = \frac{a}{CA} \;\Rightarrow\; CA = \frac{a}{\cos x}$$

הקטע CB: רוחב התעלה המשנית b הוא הניצב שמול הזווית x (זוויות מתחלפות בין מקבילים) במשולש ישר זווית שהיתר שלו CB:

$$\sin x = \frac{b}{CB} \;\Rightarrow\; CB = \frac{b}{\sin x}$$

לכן:

$$AB = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$$

תשובה: $AB = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$, **עבור** $0 < x < \frac{\pi}{2}$

סעיף ב

נציב $a = 2b$:

$$AB(x) = \frac{2b}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$$

נגזור:

$$AB'(x) = \frac{2b\sin x}{\cos^2 x} - \frac{b\cos x}{\sin^2 x}$$

נשווה לאפס ונכפול ב־$\sin^2 x \cos^2 x$:

$$2\sin^3 x = \cos^3 x$$

$$\tan^3 x = \frac{1}{2}$$

$$\tan x = \sqrt[3]{0.5} \approx 0.794$$

$x \approx 38.44^\circ$

ברדיאנים:

$x \approx 0.671$

נבדוק שזה מינימום. הנגזרת שלילית לפני הנקודה (למשל ב־$x = 0.3$) וחיובית אחריה (למשל ב־$x = 1$):

x	$AB'(x)$	$AB(x)$
$0 < x < 0.671$	$-$	↘
0.671	0	מינ'
$0.671 < x < \frac{\pi}{2}$	$+$	↗

תשובה: בערך 38.44°, כלומר 0.671 רדיאנים

סעיף ג

נציב את $x \approx 0.671$ בביטוי לאורך הסכר:

$$AB_{\min} = b\left(\frac{2}{\cos 0.671} + \frac{1}{\sin 0.671}\right)$$

$$\approx b\,(2.553 + 1.609) = 4.162\,b$$

האורך המינימלי הוא 8:

$$4.162\,b = 8$$

$$b \approx 1.92$$

תשובה: $b \approx 1.92$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.