חדו"א – פולינום, רציונלית ושורש – כל השאלות עם תשובות סופיות

פולינום, רציונלית ושורש – הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י"א (שאלון 571) • 35 שאלות

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{6(x-1)^2}{x^2+a}$.

a הוא פרמטר חיובי.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתון כי שיעור ה־y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $f(x)$ הוא 7.5.

ג. מצאו את הערך של a.

בעבור הערך של a שמצאתם ענו על הסעיפים ד–ה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת $g(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

ה. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־x בתחום $-a\le x\le 0$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

כל x.

סעיף א (2)

$y=6$ (אין אסימפטוטה אנכית).

סעיף ב

מקסימום $\left(-a,\ \frac{6(a+1)}{a}\right)$, מינימום $(1,0)$.

סעיף ג

$a=4$

סעיף ד

מקסימום $(-4,7.5)$, מינימום $(1,0)$, חיתוך עם ציר ה־y ב־$(0,1.5)$, אסימפטוטה $y=6$.

סקיצה של f: מקסימום (-4, 7.5), מינימום (1,0), אסימפטוטה y=6

סעיף ה (1)

כל x פרט ל־$x=1$.

סעיף ה (2)

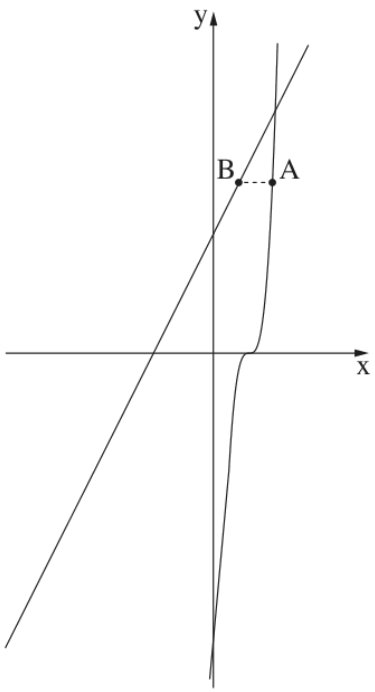
חיובית: $-4<x<1$

שלילית: $x<-4$ או $x>1$

סעיף ה (3)

$\frac{8}{15}$ יחידות שטח.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתוארים גרף הפונקצייה $f(x)=(4x-2)^3$ והישר $y=3x+b$.

b הוא פרמטר חיובי.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ כך ששיעור ה־x שלה קטן משיעור ה־x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה B נמצאת על הישר הנתון כך שהקטע AB מקביל לציר ה־x.

נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה A.

נתון: $0 \le t \le 0.7$.

א. הביעו באמצעות b ו־t את שיעור ה־x של הנקודה B.

ב. **(1)** מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.

(2) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

תשובות סופיות

סעיף א

$$x_B = \frac{(4t-2)^3-b}{3}$$

סעיף ב (1)

$$t = \frac{3}{8} = 0.375$$

סעיף ב (2)

$$t = 0$$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{ax}{(x-3)^2}$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

a הוא פרמטר חיובי.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x)+0.5$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

נתון כי לגרף הפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם ציר ה־x.

ג. מצאו את הערך של a.

הציבו בפונקצייה $g(x)$ את הערך של a שמצאתם, וענו על סעיף ד.

נתונה הפונקצייה $h(x)=g(x)\cdot g'(x)$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

ד. **(1)** רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $h(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$ ועל ידי ציר ה־x בתחום $-9\leq x\leq 0$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)
אסימפטוטות: $x=3,\ y=0$

סעיף א (2)
מינימום בנקודה $\left(-3,\ -\frac{a}{12}\right)$

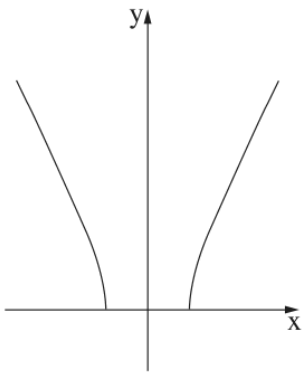
סעיף ב
סקיצה: עוברת בראשית, מינימום בנקודה $\left(-3,-\frac{a}{12}\right)$, אסימפטוטות $x=3,\ y=0$.

סעיף ג
$a=6$

סעיף ד (1)
חיוביות: $-3<x<3$; שליליות: $x<-3$ או $x>3$.

סעיף ד (2)
השטח: $\frac{17}{128}\approx 0.133$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=2\sqrt{x^2-1}$.

נתון הישר $y=3x-3$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב.

דרך הנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר המקביל לציר ה־y וחותך את הישר הנתון בנקודה B.

ישר המקביל לציר ה־x וחותך את הישר הנתון בנקודה C.

נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה A.

ג. **(1)** הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

(2) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC.

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו־AC הוא מקסימלי.

תשובות סופיות

סעיף א

תחום: $x \le -1$ או $x \ge 1$

סעיף ב

נקודות החיתוך: $(1,\,0)$ ו־$(2.6,\;4.8)$

סעיף ג (1)

$$AB = 2\sqrt{t^2-1} - 3t + 3$$

סעיף ג (2)

$$AC = \tfrac{2}{3}\sqrt{t^2-1} - t + 1$$

סעיף ד

$$t = \sqrt{1.8} = \tfrac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.34$$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{\sqrt{5x^2-kx}}{x^3}$, k הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות k את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=-f(x)$.

שיעור ה־ x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $h(x)$ הוא 1.6 .

ב. מצאו את הערך של k .

הציבו $k=8$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ו.

ג. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=(f(x))^2$ שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 2 .

ה. האם ערך הביטוי $\int_a^{a+1}g(x)dx$ שווה, גדול או קטן בהשוואה לערך הביטוי $\int_a^{a+1}f(x)dx$? נמקו את תשובתכם.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=2$ ו־ $x=6$.

תשובות סופיות

סעיף א

$x<0$ או $x\geq\frac{k}{5}$

סעיף ב

$k=8$

סעיף ג (1)

$x=0$, $y=0$

סעיף ג (2)

מינימום (קצה) $(1.6,\ 0)$; מקסימום $\left(2,\ \frac{1}{4}\right)$

סעיף ג (3)

ענף שמאלי, ב־$x<0$: שלילי ויורד, בין האסימפטוטות $y=0$ ו־$x=0$.
ענף ימני: מתחיל ב־$(1.6,0)$, עולה עד המקסימום $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ ויורד אל $y=0$.

סעיף ד

ענף שמאלי, ב־$x<0$: חיובי ועולה, בין האסימפטוטות $y=0$ ו־$x=0$.
ענף ימני: מתחיל ב־$(1.6,0)$, עולה עד המקסימום $\left(2,\frac{1}{16}\right)$ ויורד אל $y=0$.

סעיף ה

קטן, כי בקטע מתקיים $0<f(x)<1$, ולכן $g(x)=f^2(x)<f(x)$.

סעיף ו

$$S = \frac{25}{324} \approx 0.077$$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 8

8. נתונה הפונקצייה $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 8kx$, המוגדרת לכל x.

k הוא פרמטר שונה מ־ 0.

הנקודה A היא נקודת הפיתול של הפונקצייה $f(x)$.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A.

נתון כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ב. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k.

דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה־ x החותך אותו בנקודה B, ואנך לציר ה־ y החותך אותו בנקודה C.

נתון ריבוע I שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AB, וריבוע II שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AC.

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו סכום שטחי הריבועים I ו־ II הוא מינימלי (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

תשובות סופיות

סעיף א

$$A\left(\frac{1}{k},\ 8-\frac{2}{k^2}\right)$$

סעיף ב

$$k > \frac{1}{2}$$

סעיף ג

$$k = \sqrt{\frac{8}{31}} \approx 0.508$$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2ax}{(x^2-16)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$ שפונקציית הנגזרת שלה היא $g'(x)=f(x)+1$.

תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ושל פונקציית הנגזרת $g'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-2$.

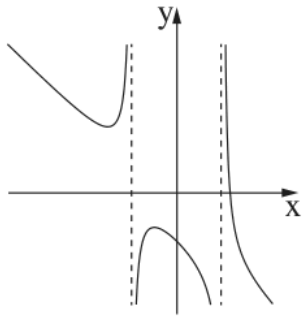
ב. מצאו את הערך של a .

הציבו את הערך של a שמצאתם בפונקצייה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג–ד.

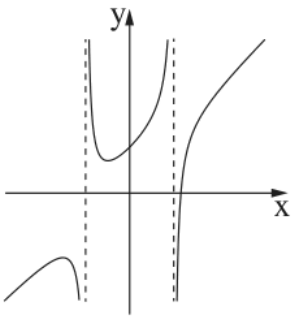
נתון כי הפונקצייה $g(x)$ עוברת בנקודה $(2\ ,\ 7)$.

ג. כתבו ביטוי אלגברי אפשרי לפונקצייה $g(x)$.

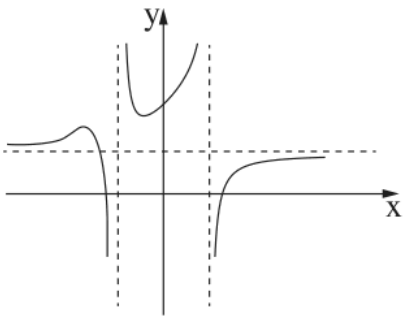
ד. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם הוא גרף אפשרי של הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.



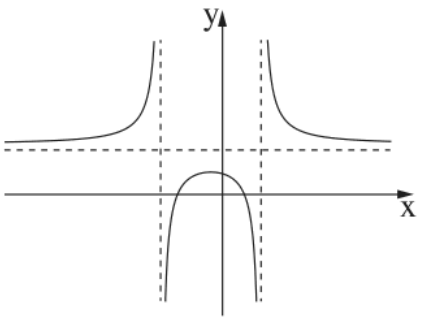
I



II



III



IV

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x \neq \pm 4$

סעיף א (2)

אנכיות: $x = 4$ ו־$x = -4$. אופקית: $y = 0$.

סעיף א (3)

עולה ב־$-4 < x < 4$. יורדת ב־$x < -4$ וגם ב־$x > 4$.

סעיף א (4)

שלושה ענפים, הגרף עובר בראשית, אסימפטוטות $x = \pm 4$ ו־$y = 0$, אין קיצון.

סקיצה של f: שלושה ענפים, אסימפטוטות x=±4 ו-y=0, עוברת בראשית

סעיף ב

$a = 36$

סעיף ג

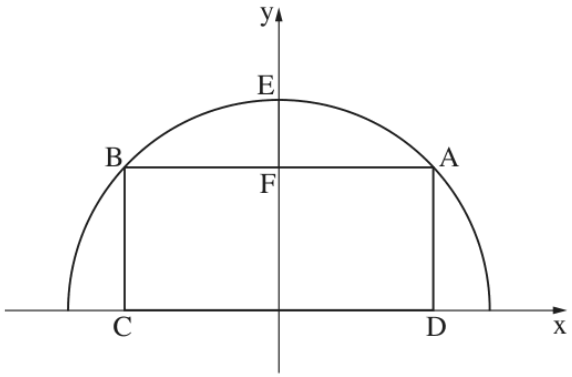
$g(x) = -\frac{36}{x^2-16} + x + 2$

סעיף ד

גרף II.

ל־g אין אסימפטוטה אופקית, ובין האסימפטוטות האנכיות יש לה מינימום.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$,

R הוא פרמטר חיובי.

פונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-R\le x\le R$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע הראשון.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה־x

וחותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה נוספת B.

הנקודות C ו־D נמצאות על ציר ה־x כך שנוצר מלבן $ABCD$.

הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה־y.

הנקודה E היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־y.

נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF.

נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה A.

א. **(1)** הביעו באמצעות R ו־t את אורך הקטע EF.

(2) הביעו באמצעות R ו־t את היקף המלבן $ABCD$.

ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן $ABCD$ לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$$EF=R-\sqrt{R^2-t^2}$$

סעיף א (2)

$$P_{ABCD}=4t+2\sqrt{R^2-t^2}$$

סעיף ב

$$t=\frac{2R}{\sqrt{13}}\approx 0.555R$$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על הסעיפים א–ו. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא אי־זוגית.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

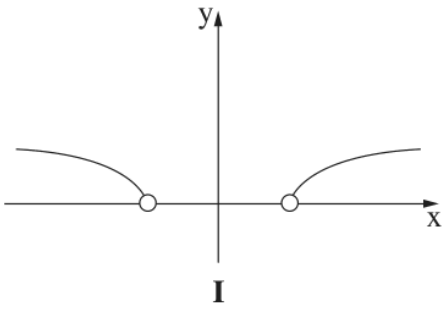
נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ה. **(1)** מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$.

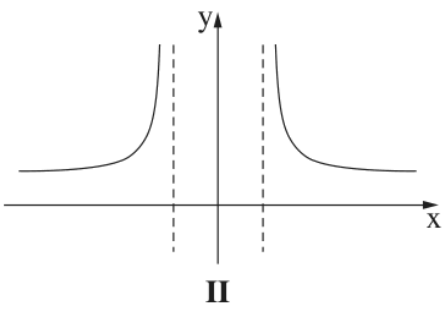
(2) קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=2a$ ו־ $x=3a$ הוא 7.5 .

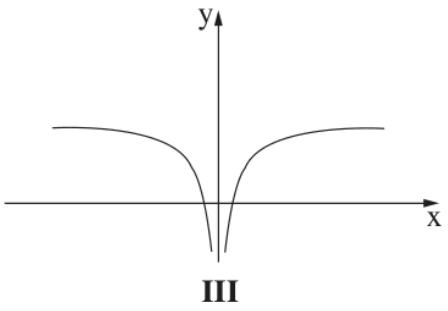
ו. מצאו את הערך של a .



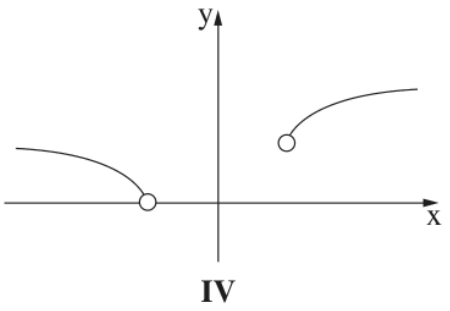
I



II



III



IV

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x>a$ או $x<-a$

סעיף א (2)

אסימפטוטות אנכיות $x=a$ ו־$x=-a$. אסימפטוטה אופקית $y=1$ מימין, ו־$y=-1$ משמאל.

סעיף ב

הוכחה: $f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2-a^2}}=-f(x)$ לכל x בתחום.

סעיף ג

יורדת ב־$x<-a$ וב־$x>a$; אין תחומי עלייה.

סעיף ד

סקיצה: שני ענפים יורדים, סימטריים ביחס לראשית; אסימפטוטות אנכיות $x=\pm a$, אופקית $y=1$ מימין ו־$y=-1$ משמאל.

סעיף ה (1)

יורדת ב־$x<-a$, עולה ב־$x>a$

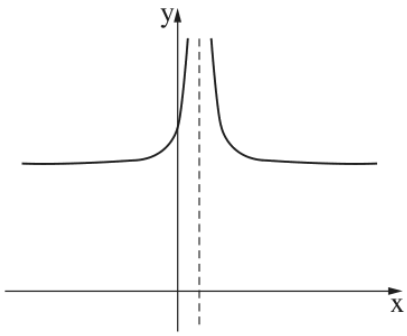
סעיף ה (2)

גרף I

סעיף ו

$a=9$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+9$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x\neq 1$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, ושיעור ה־x שלה הוא 2.

דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.

המשיק חותך את ציר ה־x בנקודה A ואת הישר $x=1$ בנקודה B.

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1,0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB.

ד. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

תשובות סופיות

סעיף א

$x=1,\ y=9$

סעיף ב

$y=-2ax+5a+9$

סעיף ג

$S_{ADB}=\frac{9(a+3)^2}{4a}$

סעיף ד

$a=3$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 6

6. נתון כי $f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-a^2)^3}$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$. a הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$ מוגדרות באותו התחום.

בסעיפים א–ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

ג. מצאו פונקצייה $f(x)$ המקיימת תנאים אלה.

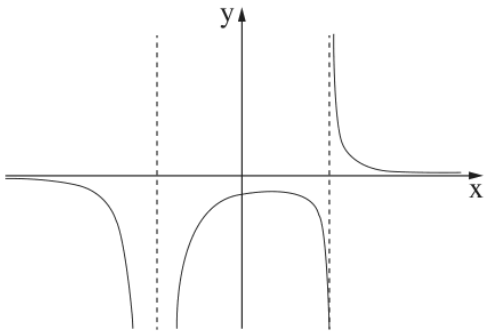
נתונות הפונקצייה $g(x)=\frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$ והפונקצייה $h(x)=\frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$.

הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו־ $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.

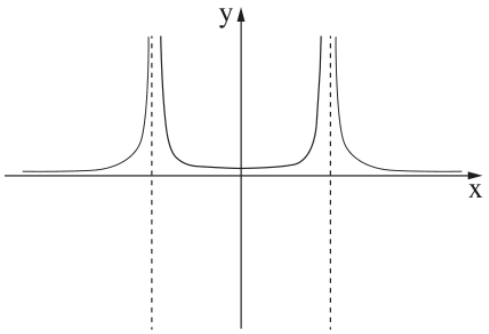
ד. התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו־ $h(x)$ גרף אפשרי המייצג אותה מבין הגרפים I–IV שבסוף השאלה.
נמקו את תשובותיכם.

נתון כי לפונקצייה $h(x-6)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה $x=0.25a$.

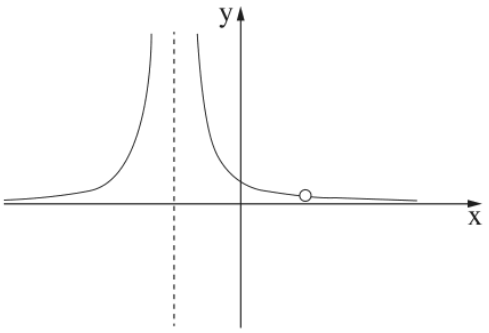
ה. מצאו את הערך של a .



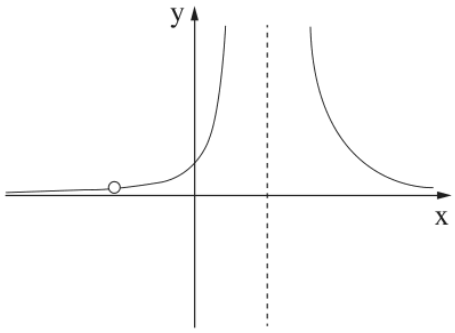
I



II



III



IV

תשובות סופיות

סעיף א

$x \neq a,\ x \neq -a$

סעיף ב

עלייה: $x < -a$ או $0 < x < a$

ירידה: $-a < x < 0$ או $x > a$

סעיף ג

$f(x) = \frac{1}{(x^2-a^2)^2}$

סעיף ד

f – גרף II

g – גרף I

h – גרף III

סעיף ה

$a = 4.8$

בגרות חורף תשפ״ה (2025) • שאלה 8

8. נתונה הפונקצייה $f(x)=x\sqrt{21-x}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת ואין לה נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם החלק החיובי של ציר ה־ x.

מן הנקודה A העבירו שני אנכים:

אנך אחד לציר ה־ x החותך אותו בנקודה B , ואנך נוסף לישר $x=21$ החותך אותו בנקודה D .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן $ABCD$ הוא מקסימלי.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x \leq 21$

סעיף א (2)

חיובית: $0 < x < 21$

שלילית: $x < 0$

סעיף ב

מקסימום $(14,\ 37.04) \approx (14, 14\sqrt{7})$; חיתוך עם הצירים ב־$(0,0)$ וב־$(21,0)$ (נקודת קצה); כאשר $x \to -\infty$ הגרף יורד ל־$-\infty$

סקיצה של f(x)=x√(21−x): עולה מ־מינוס אינסוף דרך הראשית למקסימום (14, 7√14) ויורדת ל־(21,0)

סעיף ג

$A(12, 36)$

בגרות קיץ תשפ״ד (2024) – מועד ב׳ • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x-1}{(x-a)^3}$, המוגדרת בתחום $x\neq a$, a הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ y .

ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה־ x , וקבעו את סוגה.

הגרפים 1–4 שבסוף השאלה מתארים את הפונקצייה $f(x)$ בעבור ערכים שונים של a .

ג. התאימו לכל אחד מן הערכים I–IV של a את הגרף המתאים לו, ונמקו את תשובותיכם.

I. $a=-1$ II. $a=0.5$ III. $a=1$ IV. $a=2$

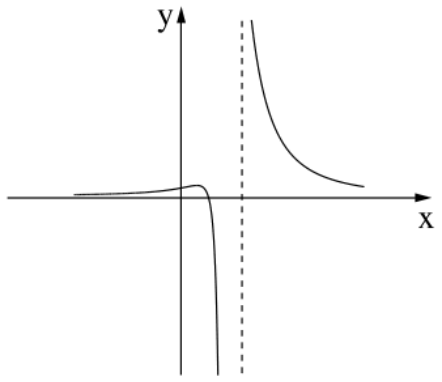
נתונה הפונקצייה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x)-b$ בעבור הערך של a המתאים לגרף 2 .

b הוא פרמטר חיובי.

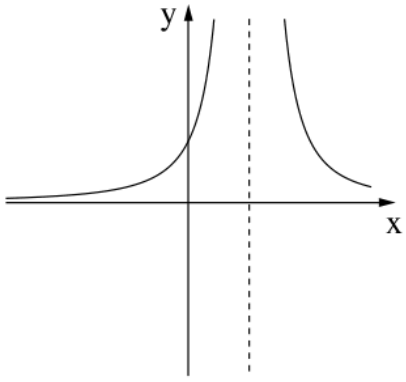
אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x היא $(t,0)$, $1<t<5$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $g(x)$, על ידי הישר $x=t$ ועל ידי הישר $x=5$ הוא 1.75 .

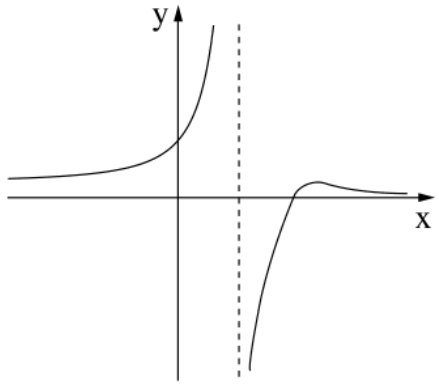
ד. מצאו את הערך של b .



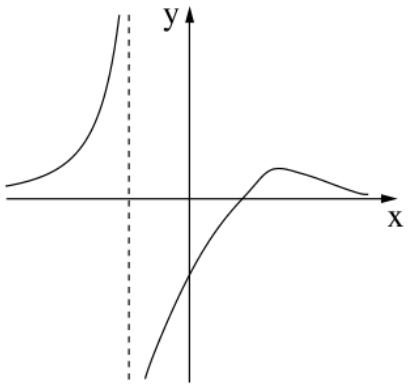
1



2



3



4

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x = a$ ו־$y = 0$

סעיף א (2)

$\left(0,\ \frac{1}{a^3}\right)$

סעיף ב

$a > 1$, והקיצון הוא מקסימום.

סעיף ג

I – גרף 4; II – גרף 3; III – גרף 2; IV – גרף 1.

סעיף ד

$b = 4$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 8

8. נתונה הפונקצייה $f(x)=\sqrt{x}$ המוגדרת בתחום $x\geq 0$, ונתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{16}{x^2+3}$ המוגדרת לכל x.

א. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$.

בנקודה $C(t,0)$ מעבירים אנך לציר ה־x, $t>0$.

האנך חותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקצייה $g(x)$ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו־BC.

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו־BC מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $k(x)=\frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2+3}$, המוגדרת בתחום $x\geq 4$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקצייה $k(x)$, וקבעו את סוגה.

נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

מקסימום $\left(0,\frac{16}{3}\right)$

סעיף א (2)

$(1,4)$ ו־$(-1,4)$

סעיף א (3)

סקיצה:

סקיצה של g(x)=16/(x^2+3) ושל f(x)=√x

סעיף ב

$$AC\cdot BC=\frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$$

סעיף ג

הוכחה: המכפלה מקסימלית ב־$t=1$, ואז $B=(1,4)$ – נקודת הפיתול.

סעיף ד

מקסימום $(5,2)$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{4x}{(x^2-a)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על סעיפים א–ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת $g'(x)=f(x)$. גרף הפונקצייה $g(x)$ עובר בנקודה $(0\ ,\ 0)$.

הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ג. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקצייה $g(x)$.

ד. **(1)** מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ שמצאתם בתת־סעיף ד(1).

$h(x)$ היא פונקצייה המוגדרת כך: $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.

הפונקציות $h(x)$ ו־$f(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ה. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקצייה $h(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקצייה $h(x)$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x\neq\pm\sqrt{a}$

סעיף א (2)

$x=\pm\sqrt{a},\ y=0$

סעיף א (3)

עלייה: $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$. ירידה: $x<-\sqrt{a}$ וגם $x>\sqrt{a}$

סעיף ב

סקיצה: עוברת בראשית, אין קיצון, אסימפטוטות $x=\pm\sqrt{a}$ ו־$y=0$

סעיף ג

קעורה כלפי מעלה: $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$. קעורה כלפי מטה: $x<-\sqrt{a}$ וגם $x>\sqrt{a}$

סעיף ד (1)

$g(x)=-\frac{2}{x^2-a}-\frac{2}{a}$

סעיף ד (2)

סקיצה: g זוגית, מינימום $(0,0)$, אסימפטוטות $x=\pm\sqrt{a}$ ו־$y=-\frac{2}{a}$

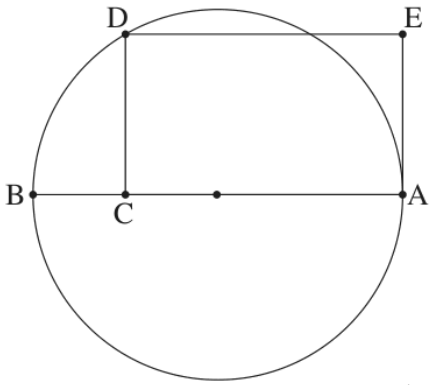
סעיף ה (1)

$x=\pm\sqrt{a},\ y=0$

סעיף ה (2)

חיובית: $x<-\sqrt{a}$ וגם $0<x<\sqrt{a}$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 8



8. הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R.

מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל מסמנים נקודה D,

כך שהקטע CD מאונך לקטע AB. הקטע AC גדול מ־R.

דרך הנקודה D מעבירים ישר שמקביל לקוטר AB.

דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל.

הישר המקביל והמשיק נחתכים בנקודה E.

נסמן: $AC = x$.

א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן ACDE מקסימלי.

הנקודה F נמצאת על הצלע DE.

ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו־AFE.

תשובות סופיות

סעיף א

$x=1.5R$

סעיף ב

$\frac{3\sqrt{3}}{8}R^2\approx 0.65R^2$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה: $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x}-2}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ג. הראו כי לכל $x>0$ בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים $f(x)=g'(x)$.

ד. לפניכם טענות I–II . קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. יש משיק לגרף הפונקצייה $g(x)$ ששיפועו הוא 2 .

II. לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

ה. חשבו את ערך הביטוי $\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot f(x)\,dx$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)
$x\geq 0$, $x\neq 4$

סעיף א (2)
$x=4$, $y=0$

סעיף א (3)
$(0,-1)$, $(16,0)$

סעיף א (4)
מקסימום $\left(36,\frac{1}{8}\right)$; מקסימום (קצה) $(0,-1)$

סעיף ב
ענף שמאלי: מ־$(0,-1)$ יורד אל $-\infty$ ליד $x=4$.
ענף ימני: עולה מ־$-\infty$ דרך $(16,0)$ עד המקסימום $\left(36,\frac{1}{8}\right)$, ויורד אל $y=0$.

סעיף ג
הוכחה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}=\frac{2(\sqrt{x}-2)-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)^2}=g'(x)$

סעיף ד
I – לא נכונה: לכל x בתחום $g'(x)=f(x)\leq\frac{1}{8}<2$.
II – נכונה: נקודת הפיתול היחידה היא ב־$x=36$.

סעיף ה

$$\frac{35}{18} = 1\frac{17}{18} \approx 1.944$$

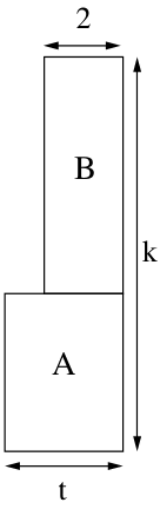
בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 8

8. נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B.

הרוחב של גינה A הוא t מטרים.

הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא $2t+2$ מ"ר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. k הוא קבוע.



א. הביעו באמצעות k ו־t את שטח הגינה A.

ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי. נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א

$$S_A = t(k-t-1)$$

סעיף ב

$$t = \sqrt{k} - 1$$

סעיף ג

$t = \sqrt{k} - 1$, כמו בסעיף ב

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x^2-a^2}{(x-4)^2}$, $0<a<4$ הוא פרמטר.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{x^2}{(x-4)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ב. **(1)** הוכיחו כי גרף הפונקצייה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$, על ידי הישר $x=1$ ועל ידי ציר ה־ y .

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x \neq 4$

סעיף א (2)

$x=4$

$y=1$

סעיף א (3)

$(a,0)$

$(-a,0)$

$\left(0,-\frac{a^2}{16}\right)$

סעיף א (4)

$x=\frac{a^2}{4}$ – מינימום

סעיף א (5)

שני ענפים.

אסימפטוטות: $x=4$, $y=1$.

מינימום בין 0 ל־a.

סקיצה של f: ענף שמאלי עם מינימום ושני חיתוכים עם ציר x, ענף ימני מעל y=1; אסימפטוטות x=4 ו-y=1

סעיף ב (1)

הוכחה: $g(x)-f(x)=\frac{a^2}{(x-4)^2}>0$

סעיף ב (2)

$S=\frac{a^2}{12}$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) האם גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.

(3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

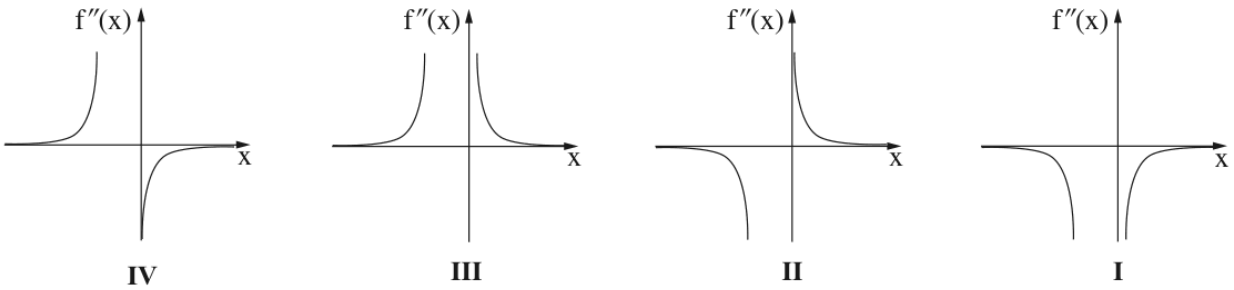
נתון כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ג. היעזרו בגרף הפונקצייה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.

נמקו את קביעתכם.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=1$ ו־ $x=2$.



תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x<-1$

או $x>0$

סעיף א (2)

לא. הנקודה היחידה האפשרית היא $x=0$, והיא אינה בתחום ההגדרה.

סעיף א (3)

$x=-1$

$y=2$

$y=-2$

סעיף א (4)

עולה: $x>0$

יורדת: $x<-1$

סעיף ב

ענף שמאלי: יורד מ־$y=-2$ אל $x=-1$.

ענף ימני: עולה מ־$(0,0)$, לא כולל, אל $y=2$.

סקיצה של f: ענף שמאלי יורד מ-y=-2 אל מינוס אינסוף ליד x=-1, ענף ימני עולה מהנקודה הריקה (0,0) אל y=2

סעיף ג

גרף I.

f קעורה כלפי מטה בשני הענפים, ולכן $f''(x) < 0$.

סעיף ד

$S = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{18} \approx 0.217$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=x+\sqrt{x^2-4}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־x (אם יש כאלה).

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(4) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ וכלפי מטה $(\cap)$ של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=-f(-x)$. הפונקציות $f(x)$ ו־$h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. באותה מערכת צירים שבה סרטטתם סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$, הוסיפו בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)$.

נתון: $a>4$ הוא פרמטר.

ד. סדרו את הביטויים **I–III** שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר (כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

I. $\int_{a}^{a+1}(f(x)-h(x))dx$ **II.** $\int_{a+1}^{a+2}(f(x)-h(x))dx$ **III.** $\int_{-a+1}^{-a+2}(f(x)-h(x))dx$

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x\le -2$ או $x\ge 2$

סעיף א (2)

אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

סעיף א (3)

הפונקציה יורדת בתחום $x\le -2$ ועולה בתחום $x\ge 2$.

סעיף א (4)

קעורה כלפי מטה $(\cap)$ בתחום $x<-2$ ובתחום $x>2$; אין תחומי קעירות כלפי מעלה.

סעיף ב

סקיצה: הענף השמאלי יורד מהאסימפטוטה $y=0$ עד הנקודה $(-2,-2)$; הענף הימני עולה מהנקודה $(2,2)$ לאין־סוף; הגרף קעור כלפי מטה.

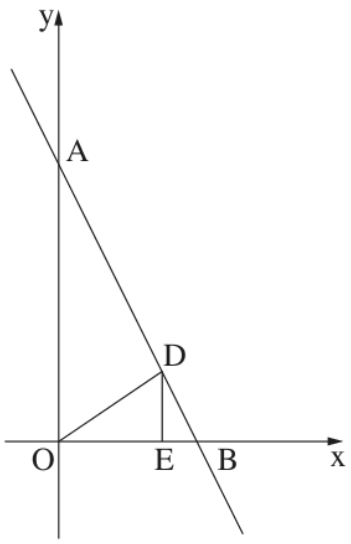
סעיף ג

סקיצה: h היא שיקוף של גרף f ביחס לראשית (בקו מקווקו).

סעיף ד

מהקטן לגדול: III, I, II.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 8



8. ישר ששיפועו -2 חותך את החלק החיובי של ציר ה־ x בנקודה B ,
ואת החלק החיובי של ציר ה־ y בנקודה A .
הנקודה D נמצאת על הישר AB ברביע הראשון.
הנקודה E נמצאת על ציר ה־ x כך שהקטע DE מקביל לציר ה־ y .
הנקודה O היא ראשית הצירים, כמתואר בסרטוט.
נסמן את אורך הקטע OE ב־ p .
נתון: שטח המשולש OED הוא $\frac{p}{2}$.

א. הביעו באמצעות p את משוואת הישר AB .

ב. מצאו את הערך של p שבעבורו היחס בין שטח המשולש OED
ובין שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.

תשובות סופיות

סעיף א

$$y = -2x + 2p + 1$$

סעיף ב

$$p = \frac{1}{2}$$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2a-x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x\neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

(2) הראו שהפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה אי־זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

(4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$, אם יש כאלה.

(5) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה ($\cup$) ואת תחום הקעירות כלפי מטה ($\cap$) של הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה גם הפונקצייה $g(x)=|f(x)|-b$, b הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ היא: $(-3,2)$.

ד. מצאו את הערכים של a ו־b.

נתונה גם הפונקצייה $s(x)=\int_1^x g(t)\,dt$, המוגדרת בתחום $x>1$.

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x=0$; אין אסימפטוטה אופקית

סעיף א (2)

$f(-x)=-f(x)$, ולכן f אי־זוגית.

סעיף א (3)

$(\sqrt{2a},0)$, $(-\sqrt{2a},0)$; אין חיתוך עם ציר ה־y

סעיף א (4)

ירידה: $x<0$ וגם $x>0$

אין תחומי עלייה

סעיף א (5)

קעורה כלפי מעלה: $x>0$

קעורה כלפי מטה: $x<0$

סעיף ב

שני ענפים יורדים, אסימפטוטה $x=0$, חיתוך ב־$(\pm\sqrt{2a},0)$; הענף הימני $\cup$ והשמאלי $\cap$, סימטריים ביחס לראשית

סקיצה של f: שני ענפים יורדים, אסימפטוטה x=0, חיתוך עם ציר x ב־±√(2a)

סעיף ג

גרף זוגי מעל $y=-b$, עם מינימום ב־$(\pm\sqrt{2a},-b)$ ואסימפטוטה $x=0$

סקיצה של g: גרף זוגי, מינימום ב־(±√(2a),−b), אסימפטוטה x=0

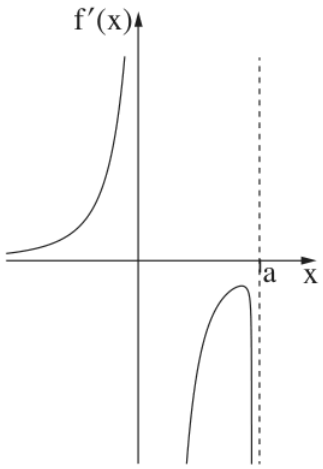
סעיף ד

$a=2$, $b=3$

סעיף ה

נקודת מינימום, ב־$x=4$.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 7



7. נתונה הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x \neq 0 \ , \ x \leq a$. a הוא פרמטר חיובי.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x < a \ , \ x \neq 0$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים שמשוואותיהן: $x = 0 \ , \ x = a \ , \ y = 0$.

בתחום $x < 0$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה.

הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקצייה $f(x)$.

$f(a) = 0$.

א. **(1)** מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(הביעו את תשובתכם באמצעות a, אם יש צורך). נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם בתת־סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים I–IV שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

I. $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ **II.** $\frac{\sqrt{x-a}}{x^2}$ **III.** $\frac{\sqrt{a-x}}{x}$ **IV.** $\frac{\sqrt{x-a}}{x}$

ג. איזה מן הביטויים I–IV מייצג את הפונקצייה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = (-2)$, הוא: $\frac{7}{16}$.

ד. מצאו את הערך של a.

ה. הציבו $a = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה־x ועל ידי הישר $x = 1$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

עלייה: $x < 0$

ירידה: $0 < x \leq a$

סעיף א (2)

נקודת פיתול אחת.

סעיף ב

ענף שמאלי: עולה מהאסימפטוטה $y = 0$ ל־$+\infty$ ליד $x = 0$

ענף ימני: יורד מ־$+\infty$ עד $(a, 0)$, עם נקודת פיתול אחת

סקיצה אפשרית של f: ענף שמאלי עולה מ־0 לאינסוף ליד x=0, ענף ימני יורד מאינסוף לנקודה (a,0) עם נקודת פיתול

סעיף ג

ביטוי I: $f(x) = \frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$

סעיף ד

$a = 2$

סעיף ה

$\frac{5}{24}$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 6

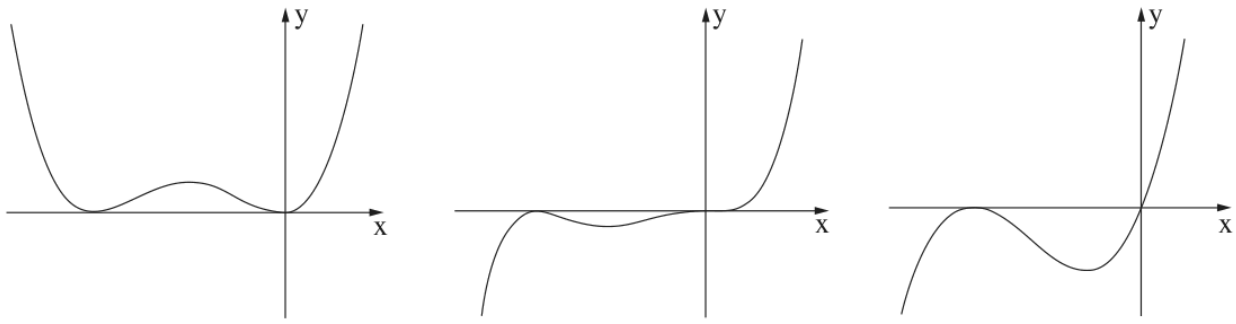
6. נתונה הפונקצייה $f(x)=x^n\cdot(x+1)^2$, $n>1$ הוא מספר טבעי. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה). הבחינו בין n זוגי ובין n אי־זוגי.

ג. מצאו את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות n , אם יש צורך. הבחינו בין n זוגי ובין n אי־זוגי.

לפניכם שלושה גרפים I–III . אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n>1$ ואי־זוגי.



III II I

ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n>1$ ואי־זוגי. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקצייה $g(x)=a\cdot f(x-2)$, a הוא פרמטר חיובי.

נסמן ב־ T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $g(x)$ ובין ציר ה־ x .

ה. הביעו באמצעות a ו־ T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין ציר ה־ x . נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א

$(0,0)$ ו־$(-1,0)$

סעיף ב

כאשר n זוגי:

חיובית לכל x פרט ל־0 ול־-1

אין תחום שלילי

כאשר n אי־זוגי:

חיובית: $x>0$

שלילית: $x<0,\ x\neq-1$

סעיף ג

כאשר n זוגי:

מינימום: $x=-1,\ x=0$

מקסימום: $x=-\frac{n}{n+2}$

כאשר n אי־זוגי:

מקסימום: $x=-1$

מינימום: $x=-\frac{n}{n+2}$

סעיף ד

כאשר n זוגי: גרף III

כאשר n אי־זוגי: גרף II

סעיף ה

$\frac{T}{a}$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 8

8. לפניכם שלוש פונקציות שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)} \quad , \quad h(x)=\frac{x^3}{x(x+2)} \quad , \quad k(x)=\frac{x^3-1}{x^2(x+2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקצייה מקיימת את כל התכונות האלה. נמקו את קביעתכם.

ענו על סעיפים ב–ד עבור הפונקצייה שקבעתם בסעיף א.

ב. **(1)** מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ואת המשוואה של האסימפטוטה האנכית של הפונקצייה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה עם הצירים.

נתון כי לפונקצייה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה.

נסמן נקודה A על גרף הפונקצייה, שעבורה $x=t$, $-1<t<1$.

מן הנקודה A מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה־x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקצייה, כך שנוצר מלבן על ידי שני הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה־x .

ד. מצאו את ערכו של t שבעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א

$g(x)$

סעיף ב (1)

אנכית: $x=-2$

אופקית: $y=1$

סעיף ב (2)

$(1,0)$ ו־$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

סעיף ג

סקיצה:

סעיף ד

$t=\sqrt{3}-2\approx-0.27$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. **(1)** מצאו את a .

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונות הפונקציות $g(x)=-f(x+2)$, $h(x)=|f(x)|$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) האם שיעור ה־ y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $g(x)$ גדול משיעור ה־ y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

נתון כי $\int_{-1}^{3}h(x)dx=\int_{-3}^{k}g(x)dx$, $k>-3$.

ד. מצאו את k . הסבירו את התשובה.

תשובות סופיות

סעיף א

$x>-a$

סעיף ב (1)

$a=3$

סעיף ב (2)

$(3,0)$ ו־$(0,-3\sqrt{3})$

סעיף ב (3)

מינימום: $(-1,-4\sqrt{2})$

סעיף ב (4)

סקיצה:

סקיצה של f: מתחילה ליד (-3,0), מינימום (-1,-4√2), חותכת ב-(0,-3√3) ו-(3,0)

סעיף ג (1)

תחום g: $x>-5$

תחום h: $x>-3$

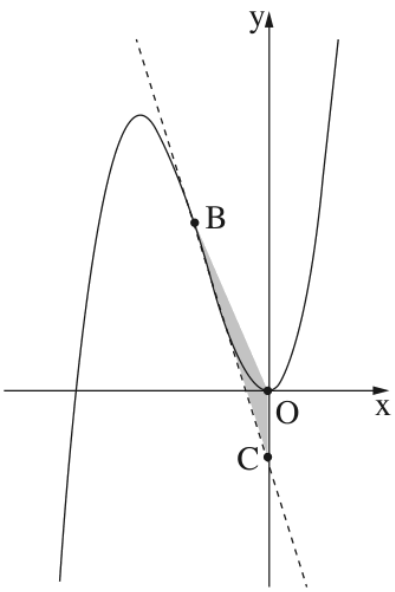
סעיף ג (2)

שווה – בשתיהן שיעור ה־y הוא $4\sqrt{2}$

סעיף ד

$k = 1$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 8



8. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^3 + 4x^2$, המוגדרת לכל x .

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט).

מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

המשיק חותך את ציר ה־ y בנקודה C .

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה B .

א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה B .

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה־ x .

ב. מהו תחום הערכים של t ?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC .

תשובות סופיות

סעיף א

$$y = (3t^2 + 8t)x - 2t^3 - 4t^2$$

סעיף ב

$$-2 < t < 0$$

סעיף ג

$$S_{max} = \frac{27}{16} = 1.6875$$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=2x+\frac{2}{x}$.

א. **(1)** מְצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? הוכיחו את התשובה.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

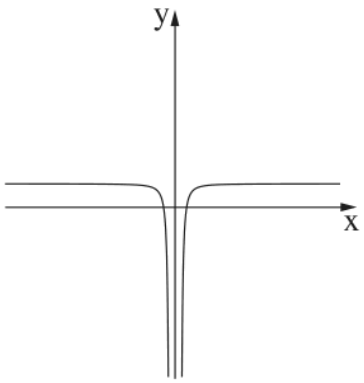
נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו־ $g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו־ $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

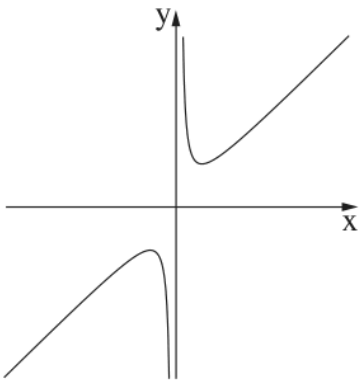
הפונקציות $f'(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים I–III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־ $g(x)$.

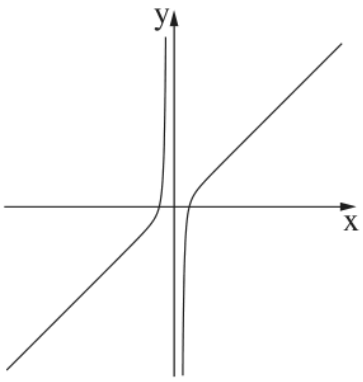
לכל אחת מן הפונקציות כִּתבו איזה גרף מתאר אותה. נַמקו את התשובה.



גרף III



גרף II



גרף I

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x.

ד. חַשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{4}$ ו־ $x=4$.

ה. נתון: $1<a$ הוא פרמטר. חשבו את $\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\,dx$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=\int_{1}^{x} f'(t)\,dt$. נתון כי הפונקצייה $h(x)$ מוגדרת בתחום $1\le x$.

ו. מְצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $h(x)$, וקִבעו את סוגה.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x\neq 0$

סעיף א (2)

אי־זוגית,

כי $f(-x)=-f(x)$

סעיף א (3)

עלייה: $x < -1$ או $x > 1$

ירידה: $-1 < x < 0$ או $0 < x < 1$

סעיף ב

גרף I – $g(x)$

גרף II – $f(x)$

גרף III – $f'(x)$

סעיף ג

$(1, 0)$, $(-1, 0)$

סעיף ד

$S = 56.25$

סעיף ה

$\int_{1/a}^{a} g(x)\,dx = 0$

סעיף ו

$(1, 0)$ – מינימום בקצה התחום

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 8

8. נתונות שתי פונקציות: $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. **(1)** מְצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מְצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה־ x .

נתון כי שיעור ה־ x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך של הפונקצייה $f(x)$ עם הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A . t הוא פרמטר.

ב. הַביעו באמצעות t את אורך הקטע AB .

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB .

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נַמקו את התשובה.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

הפונקציה f מוגדרת לכל x

הפונקציה g מוגדרת עבור $x \geq 0$

סעיף א (2)

$(0,0)$, $(1,1)$

סעיף ב

$AB = t - t^2$

סעיף ג

$S_{\max} = \frac{128}{3125} \approx 0.041$

מתקבל כאשר $t = 0.8$

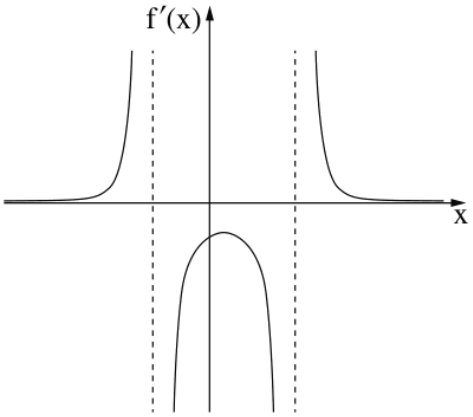
סעיף ד

לא.

AB מקסימלי עבור $t = \frac{1}{2}$

השטח מקסימלי עבור $t = \frac{4}{5}$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 6



6. נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x<b$, $b<x<c$, $c<x$ וגזירה בכל תחום הגדרתה.

בסרטוט שלפניך מתואר הגרף של <u>פונקציית הנגזרת</u> $f'(x)$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים: $y=0$, $x=b$, $x=c$.

שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא a.

a, b ו־ c הם פרמטרים.

א. הבע את תשובותיך באמצעות a, b ו־ c, אם יש צורך.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a,0)$.

ב. סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון גם כי $f(x)=\frac{18-36x}{(x^2-x-6)^2}$.

ג. מצא את a, b ו־ c.

ד. **(1)** הראה כי בתחום $b<x<c$ מתקיים: $f'(x)\cdot(f(x))^2\le 0$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)\cdot(f(x))^2$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=0$ ו־ $x=2a$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

עולה: $x<b$ וגם $x>c$

יורדת: $b<x<c$

סעיף א (2)

$\cup$: $x<b$ וגם $b<x<a$

$\cap$: $a<x<c$ וגם $x>c$

סעיף ב

שלושה ענפים, אסימפטוטות $x=b$ ו־$x=c$, נקודת פיתול $(a,0)$.

סקיצה אפשרית של f: שלושה ענפים, אסימפטוטות x=b, x=c, ונקודת פיתול (a,0)

סעיף ג

$a=\frac{1}{2}$, $b=-2$, $c=3$

סעיף ד (1)

הוכחה: בתחום זה $f'(x)<0$ וגם $f^2(x)\ge 0$.

סעיף ד (2)

$S=\frac{1}{12}$

בגרות חורף נבצרים תשפ״ב (2022) • שאלה 8

8. חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים.

מחֵלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה־צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל.

נסמן ב־ x את אורך צלע המשולש.

א. הבע באמצעות k את תחום ההגדרה של x.

ב. הבע באמצעות k את אורך צלע המשולש, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראה כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל בַּמעגל שהתקבל.

תשובות סופיות

סעיף א

$$0 < x < \frac{k}{3}$$

סעיף ב

$$x = \frac{3k}{\sqrt{3}\pi+9} \approx 0.208k$$

סעיף ג

הוכחה: רדיוס המעגל שהתקבל הוא חצי מרדיוס המעגל החוסם את המשולש.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 6

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{(x^3-m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את תשובותיך באמצעות m, אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=(-1)$.

ב. מצא את הערך של m.

הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאת, וענה על הסעיפים ג–ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה־x.

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־x הוא 1 (השטח שמימין לאנך).

מצא את הערך של k.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

כל x פרט ל־$x=\sqrt[3]{m}$

סעיף א (2)

אנכית $x=\sqrt[3]{m}$, ואופקית $y=0$

סעיף ב

$m=2$

סעיף ג

מקסימום $\left(-1,\frac{1}{9}\right)$, מינימום $(0,0)$

סעיף ד

סקיצה:

סקיצה של f(x): מקסימום ב-(–1, 1/9), מינימום ב-(0,0), אסימפטוטה אנכית x=∛2 שמשני צדיה הגרף עולה לאינסוף, ואסימפטוטה אופקית y=0

סעיף ה (1)

(שיקוף של גרף f ביחס לציר ה־x).

סקיצה של g(x)=k•f(x) עם k שלילי: מינימום ב-(–1, k/9), מקסימום ב-(0,0), הגרף יורד למינוס אינסוף משני צדי x=∛2; השטח בין x=–1 ל-x=0 מסומן

סעיף ה (2)

$k=-18$

בגרות חורף תשפ״ב (2022) • שאלה 7

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(4) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה־ x.

בתשובתך דייק שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

ב. **(1)** מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו $y = 4x + c$ (c פרמטר) יישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$x \leq 0$ או $x \geq 2$

סעיף א (2)

$x < 0$ או $x > 2$

סעיף א (3)

אנכיות: $x = 0$ וגם $x = 2$. אופקית $y = 5$ כאשר $x \to \infty$, ואופקית $y = 1$ כאשר $x \to -\infty$.

סעיף א (4)

$(-0.34,\ 0)$

סעיף א (5)

סקיצה:
סקיצה של f'(x): ענף שמאלי יורד מ-y=1 דרך (–0.34,0) למינוס אינסוף ליד x=0; ענף ימני יורד מפלוס אינסוף ליד x=2 אל y=5

סעיף ב (1)

מקסימום $(-0.34,\ 0.76)$, מינימום קצה $(0, 0)$, מינימום קצה $(2, 6)$

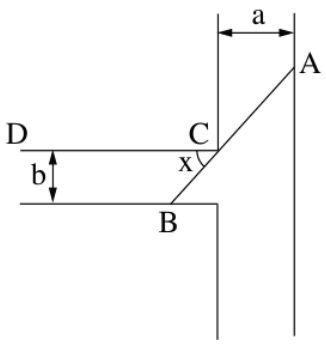
סעיף ב (2)

סקיצה:
סקיצה של f(x): ענף שמאלי עולה ממינוס אינסוף למקסימום (–0.34, 0.76) ויורד לנקודת הקצה (0,0); ענף ימני עולה מנקודת הקצה (2,6)

סעיף ג

לא. הנגזרת מקבלת רק ערכים קטנים מ־1 או גדולים מ־5, אף פעם לא 4.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 8



8. תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b.

הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית

ובין דופן של התעלה המשנית (ראה סרטוט).

מהנדֶסֶת מתכננת סכר ישר, שיֵצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית,

יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית.

הסכר ייצוֹר זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.

א. הבע באמצעות a, b ו־x את אורך הסכר AB.

נתון כי $a = 2b$.

ב. מצא את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצא את b.

תשובות סופיות

סעיף א

$AB = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$, עבור $0 < x < \frac{\pi}{2}$

סעיף ב

בערך $38.44°$, כלומר 0.671 רדיאנים

סעיף ג

$b \approx 1.92$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.