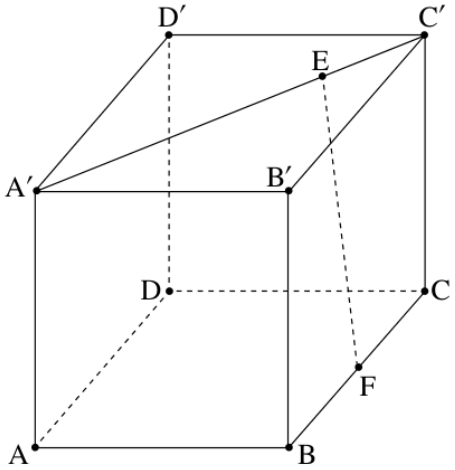
גאומטרייה במרחב (וקטורים) – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 4 יחידות, כיתה י״ב (שאלון 472) • 17 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 2



2. בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע.

הנקודה F היא אמצע המקצוע BC.

הנקודה E נמצאת על האלכסון $A'C'$, כך שמתקיים $\overrightarrow{A'E}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A'C'}$.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{A'E}$ ו־$\overrightarrow{FE}$.

נתון כי אורך מקצוע הבסיס הוא 4.

ב. חשבו את האורך של הווקטור $\overrightarrow{A'E}$.

נתון: $|\overrightarrow{A'E}|=|\overrightarrow{FE}|$.

ג. הראו כי התיבה היא קובייה.

ד. **(1)** הראו כי $\overrightarrow{FE}$ מאונך ל־$\overrightarrow{A'C'}$.

(2) חשבו את שטח המשולש $A'FC'$.

פתרון מלא

סעיף א

בבסיס הריבועי $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ ו־$\overrightarrow{BC}=\underline{v}$, לכן $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BC}=\underline{v}$:

$$\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=\underline{u}+\underline{v}$$

$$\overrightarrow{A'E}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A'C'}=\frac{3}{4}\underline{u}+\frac{3}{4}\underline{v}$$

כדי להגיע מ־F ל־E נעבור דרך B ו־A' (F אמצע BC, לכן $\overrightarrow{FB}=-\frac{1}{2}\underline{v}$):

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'E}$$

$$\overrightarrow{FE}=-\frac{1}{2}\underline{v}-\underline{u}+\underline{w}+\frac{3}{4}\underline{u}+\frac{3}{4}\underline{v}$$

$$\overrightarrow{FE}=-\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}+\underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{A'E}=\frac{3}{4}\underline{u}+\frac{3}{4}\underline{v}$

$\overrightarrow{FE}=-\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}+\underline{w}$

סעיף ב

הבסיס ריבוע שאורך צלעו 4, לכן $\underline{u}\perp\underline{v}$ ו־$|\underline{u}|=|\underline{v}|=4$, כלומר $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$.

$$|\overrightarrow{A'C'}|^2=(\underline{u}+\underline{v})^2$$

$$=|\underline{u}|^2+2\,\underline{u}\cdot\underline{v}+|\underline{v}|^2$$

$$=16+0+16=32$$

$$|\overrightarrow{A'C'}|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{A'E}| = \frac{3}{4} \cdot 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \approx 4.24$$

תשובה: $|\overrightarrow{A'E}| = 3\sqrt{2} \approx 4.24$

סעיף ג

בתיבה כל המקצועות היוצאים מקודקוד מאונכים זה לזה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$. נסמן את אורך המקצוע הצדדי $|\underline{w}| = h$.

$$|\overrightarrow{FE}|^2 = \left(-\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \underline{w}\right)^2$$
$$= \frac{1}{16}|\underline{u}|^2 + \frac{1}{16}|\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2$$
$$|\overrightarrow{FE}|^2 = \frac{16}{16} + \frac{16}{16} + h^2 = 2 + h^2$$

נתון $|\overrightarrow{FE}| = |\overrightarrow{A'E}| = 3\sqrt{2}$, ולכן:

$$2 + h^2 = 18 \;\Rightarrow\; h^2 = 16 \;\Rightarrow\; h = 4$$

גם המקצוע הצדדי שווה ל־4, כלומר כל המקצועות של התיבה שווים – התיבה היא קובייה.

תשובה: אורך המקצוע הצדדי הוא 4, כמו מקצוע הבסיס – לכן התיבה היא קובייה.

סעיף ד (1)

נחשב את המכפלה הסקלרית (המכפלות של וקטורים מאונכים שוות ל־0):

$$\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{A'C'} =$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \underline{w}\right) \cdot (\underline{u} + \underline{v})$$
$$= -\frac{1}{4}|\underline{u}|^2 + \frac{1}{4}|\underline{v}|^2$$
$$= -\frac{1}{4} \cdot 16 + \frac{1}{4} \cdot 16 = 0$$

המכפלה הסקלרית שווה ל־0, לכן $\overrightarrow{FE}$ מאונך ל־$\overrightarrow{A'C'}$.

תשובה: $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0$ **, ולכן הווקטורים מאונכים.**

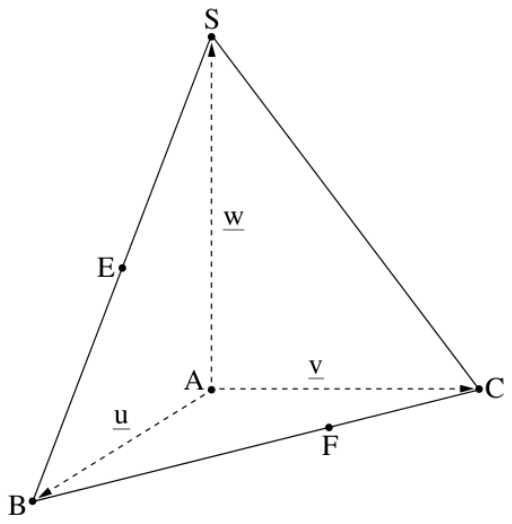
סעיף ד (2)

הנקודה E נמצאת על הצלע C'A' של המשולש FC'A', ו־FE מאונך ל־C'A' (סעיף ד (1)). לכן FE הוא הגובה לצלע C'A'.

$$S_{A'FC'} = \frac{|\overrightarrow{A'C'}| \cdot |\overrightarrow{FE}|}{2}$$
$$S_{A'FC'} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

תשובה: השטח הוא 12 יח"ר.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 2



2. בסרטוט שלפניכם פירמידה $ABCS$.

המקצוע AS מאונך למישור הבסיס ABC.

הנקודה E היא אמצע המקצוע BS.

הנקודה F נמצאת על המקצוע BC כך ש־ $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־ $\underline{w}$ את הווקטורים האלה:

$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$.

נתון: $|\underline{w}|=8$, $|\underline{u}|=|\underline{v}|=6$, $\sphericalangle BAC=120^\circ$.

ב. חשבו את נפח הפירמידה.

ג. **(1)** מצאו את הערך של $\underline{u}\cdot\underline{v}$.

(2) הוכיחו כי $\overrightarrow{AE}$ מאונך ל־ $\overrightarrow{AF}$.

ד. **(1)** מצאו את הערך של $|\overrightarrow{AF}|$.

(2) חשבו את שטח המשולש EAF.

פתרון מלא

סעיף א

נעבור בדרכים לאורך המקצועות (חיבור וקטורים):

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\underline{u}+\underline{v}$$
$$\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS}=-\underline{u}+\underline{w}$$

הנקודה E היא אמצע BS, לכן נעבור מ־A ל־B ומשם חצי מ־$\overrightarrow{BS}$:

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BS}=\underline{u}+\tfrac{1}{2}(-\underline{u}+\underline{w})$$
$$=\tfrac{1}{2}\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{w}$$

לפי הנתון $BF=\frac{2}{3}BC$, ולכן:

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\underline{u}+\tfrac{2}{3}(-\underline{u}+\underline{v})$$
$$=\tfrac{1}{3}\underline{u}+\tfrac{2}{3}\underline{v}$$

תשובה: $\overrightarrow{BC}=-\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{BS}=-\underline{u}+\underline{w}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}$

סעיף ב

AS מאונך למישור הבסיס, לכן AS הוא גובה הפירמידה: $h=|\underline{w}|=8$.

שטח הבסיס – המשולש ABC (שתי צלעות והזווית שביניהן):

$$S_{ABC}=\frac{6\cdot 6\cdot \sin 120^\circ}{2}$$
$$=18\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$$

נפח הפירמידה:

$$V = \frac{S \cdot h}{3} = \frac{9\sqrt{3} \cdot 8}{3} = 24\sqrt{3} \approx 41.57$$

תשובה: $V = 24\sqrt{3} \approx 41.57$ **יחידות נפח**

סעיף ג (1)

הזווית בין $\underline{u}$ ל־$\underline{v}$ היא $\sphericalangle BAC = 120^\circ$:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 120^\circ$$
$$= 6 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -18$$

תשובה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = -18$

סעיף ג (2)

AS מאונך למישור הבסיס, ולכן מאונך לכל ישר במישור זה. מכאן $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$ וגם $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.

כמו כן $|\underline{u}|^2 = \underline{u} \cdot \underline{u} = 36$ (ומסעיף ג (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = -18$).

נחשב את המכפלה הסקלרית:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= \left(\tfrac{1}{2}\underline{u} + \tfrac{1}{2}\underline{w}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{3}\underline{u} + \tfrac{2}{3}\underline{v}\right) \\ &= \tfrac{1}{6}\underline{u}^2 + \tfrac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{v} + \tfrac{1}{6}\underline{w} \cdot \underline{u} + \tfrac{1}{3}\underline{w} \cdot \underline{v} \\ &= \tfrac{1}{6} \cdot 36 + \tfrac{1}{3} \cdot (-18) + 0 + 0 \\ &= 6 - 6 = 0\end{aligned}$$

המכפלה הסקלרית שווה ל־0 (והווקטורים אינם וקטורי אפס), לכן $\overrightarrow{AE}$ מאונך ל־$\overrightarrow{AF}$.

תשובה: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$**, לכן הם מאונכים.**

סעיף ד (1)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AF}|^2 &= \left(\tfrac{1}{3}\underline{u} + \tfrac{2}{3}\underline{v}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{9}\underline{u}^2 + \tfrac{4}{9}\underline{u} \cdot \underline{v} + \tfrac{4}{9}\underline{v}^2 \\ &= \tfrac{1}{9} \cdot 36 + \tfrac{4}{9} \cdot (-18) + \tfrac{4}{9} \cdot 36 \\ &= 4 - 8 + 16 = 12\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$$

תשובה: $|\overrightarrow{AF}| = 2\sqrt{3} \approx 3.46$

סעיף ד (2)

מסעיף ג (2) המשולש EAF ישר־זווית ב־A, ולכן שטחו הוא חצי מכפלת הניצבים AE ו־AF.

נחשב את AE (נזכור ש־$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$):

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AE}|^2 &= \tfrac{1}{4}\underline{u}^2 + \tfrac{1}{2}\underline{u} \cdot \underline{w} + \tfrac{1}{4}\underline{w}^2 \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot 36 + 0 + \tfrac{1}{4} \cdot 64 = 25\end{aligned}$$

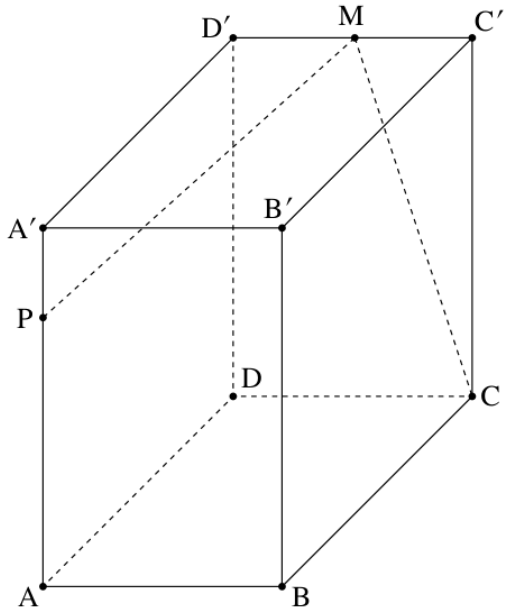
$$|\overrightarrow{AE}| = 5$$

$$S_{EAF} = \frac{AE \cdot AF}{2}$$

$$= \frac{5 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \approx 8.66$$

תשובה: $S_{EAF} = 5\sqrt{3} \approx 8.66$ **יחידות שטח**

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 2



2. בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה $ABCDA'B'C'D'$

שבסיסה $ABCD$ הוא מקבילית.

הנקודה M היא אמצע המקצוע $C'D'$,

והנקודה P מקיימת $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{CM}$ ו־$\overrightarrow{PM}$.

נתון: $|\underline{u}|=8$, $|\underline{v}|=10$, $\sphericalangle DAB=60^\circ$.

ב. מצאו את הערך של כל אחת מן המכפלות הסקלריות האלה:

$\underline{u}\cdot\underline{v}$, $\underline{v}\cdot\underline{w}$, $\underline{u}\cdot\underline{w}$.

נתון: נפח המנסרה הוא $480\sqrt{3}$.

ג. מצאו את הערך של $|\underline{w}|$.

ד. הוכיחו כי $\overrightarrow{PM}$ מאונך ל־$\overrightarrow{CM}$.

ה. **(1)** הראו כי $|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{165}$.

(2) חשבו את שטח המשולש PMC.

פתרון מלא

סעיף א

במנסרה ישרה המקצועות הצדדיים שווים ומקבילים, ולכן $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$. הבסיס העליון חופף ומקביל לבסיס $ABCD$ (מקבילית), ולכן $\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ ו־$\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AD}=\underline{v}$.

נלך מ־C ל־M דרך C'. M אמצע $C'D'$, לכן $\overrightarrow{C'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C'D'}=-\frac{1}{2}\underline{u}$.

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'M}=\underline{w}-\frac{1}{2}\underline{u}$$

נלך מ־P ל־M דרך A' ו־D': $\overrightarrow{PA'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{4}\underline{w}$ (כי $AP=\frac{3}{4}AA'$), $\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{D'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D'C'}=\frac{1}{2}\underline{u}$.

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'M}$$
$$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{v}+\frac{1}{4}\underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{w}$, $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{v}+\frac{1}{4}\underline{w}$

סעיף ב

המנסרה ישרה, לכן המקצוע הצדדי AA' מאונך למישור הבסיס, ובפרט ל־AB ול־AD. וקטורים מאונכים – המכפלה הסקלרית שלהם 0:

$$\underline{u}\cdot\underline{w}=0,\qquad \underline{v}\cdot\underline{w}=0$$

הזווית בין $\underline{u}$ ל־$\underline{v}$ היא $\angle DAB=60^\circ$:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos 60^\circ=8\cdot 10\cdot\frac{1}{2}$$
$$=40$$

תשובה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=40$**,** $\underline{u}\cdot\underline{w}=0$ **,** $\underline{v}\cdot\underline{w}=0$

סעיף ג

נפח מנסרה = שטח הבסיס • גובה. הבסיס $ABCD$ מקבילית, ושטחה:

$$S_{ABCD}=AB\cdot AD\cdot\sin 60^\circ$$
$$=8\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=40\sqrt{3}$$

המנסרה ישרה, לכן הגובה הוא אורך המקצוע הצדדי $|\underline{w}|$:

$$40\sqrt{3}\cdot|\underline{w}|=480\sqrt{3}\ \Rightarrow\ |\underline{w}|=12$$

תשובה: $|\underline{w}|=12$

סעיף ד

נחשב את המכפלה הסקלרית בעזרת הביטויים מסעיף א והערכים מסעיפים ב, ג:

$$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{CM}=$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\underline{u}+\underline{v}+\tfrac{1}{4}\underline{w}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\underline{u}+\underline{w}\right)$$

נפתח סוגריים:

$$=-\tfrac{1}{4}|\underline{u}|^2+\tfrac{1}{2}\underline{u}\cdot\underline{w}-\tfrac{1}{2}\underline{u}\cdot\underline{v}$$
$$+\underline{v}\cdot\underline{w}-\tfrac{1}{8}\underline{u}\cdot\underline{w}+\tfrac{1}{4}|\underline{w}|^2$$
$$=-\tfrac{1}{4}\cdot 64+0-\tfrac{1}{2}\cdot 40$$
$$+0-0+\tfrac{1}{4}\cdot 144$$
$$=-16-20+36=0$$

המכפלה הסקלרית שווה 0, ולכן $\overrightarrow{PM}$ מאונך ל-$\overrightarrow{CM}$.

תשובה: $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{CM}=0$**, לכן הם מאונכים.**

סעיף ה (1)

לפי $|\underline{a}|=\sqrt{\underline{a}\cdot\underline{a}}$:

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\left(\tfrac{1}{2}\underline{u}+\underline{v}+\tfrac{1}{4}\underline{w}\right)^2$$
$$=\tfrac{1}{4}|\underline{u}|^2+|\underline{v}|^2+\tfrac{1}{16}|\underline{w}|^2$$
$$+\underline{u}\cdot\underline{v}+\tfrac{1}{4}\underline{u}\cdot\underline{w}+\tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{w}$$
$$=\tfrac{1}{4}\cdot 64+100+\tfrac{1}{16}\cdot 144+40$$
$$=16+100+9+40=165$$

לכן $|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{165}$, כנדרש.

תשובה: $|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{165}$ **(הוכחה)**

סעיף ה (2)

לפי סעיף ד, $PM \perp CM$, כלומר המשולש PMC ישר־זווית ב־M, ושטחו חצי מכפלת הניצבים.

נחשב את אורך CM:

$$|\overrightarrow{CM}|^2 = \left(-\tfrac{1}{2}\underline{u} + \underline{w}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{4}|\underline{u}|^2 - \underline{u}\cdot\underline{w} + |\underline{w}|^2$$

$$= 16 - 0 + 144 = 160$$

$$\Rightarrow\ |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{160}$$

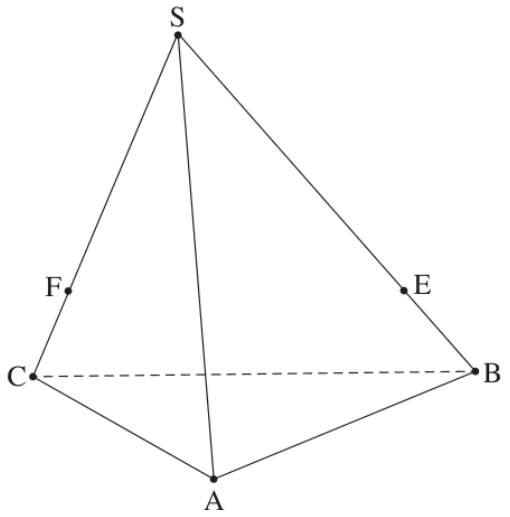
$$S_{PMC} = \frac{PM \cdot CM}{2} = \frac{\sqrt{165}\cdot\sqrt{160}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{26400}}{2}$$

$$S_{PMC} = \frac{20\sqrt{66}}{2} = 10\sqrt{66} \approx 81.24$$

תשובה: $10\sqrt{66} \approx 81.24$ **יחידות שטח**

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 2



2. בסרטוט שלפניכם פירמידה משולשת $SABC$.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.

הנקודה E נמצאת על המקצוע SB, והנקודה F נמצאת על המקצוע SC.

נתון: $\overrightarrow{SE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SC}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SF}$ ו־$\overrightarrow{SE}$.

ב. **(1)** הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{EF}$.

(2) הסבירו מדוע EF מקביל ל־BC.

נתון: $B(1,-1,3)$, $C(13,15,3)$.

ג. מצאו את ההצגה האלגברית של הווקטור $\overrightarrow{BC}$ ושל הווקטור $\overrightarrow{EF}$.

נתון: $E(5,1,6)$.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה F.

נתון: $A(4,12,3)$.

ה. **(1)** מצאו את גודל הזווית EAF.

(2) חשבו את שטח המשולש EAF.

פתרון מלא

סעיף א

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\underline{u}+\underline{v}$$

לפי הנתון $\overrightarrow{SF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SC}$ ו־$\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}=-\underline{w}+\underline{v}$, לכן:

$$\overrightarrow{SF}=\frac{3}{4}(-\underline{w}+\underline{v})=\frac{3}{4}\underline{v}-\frac{3}{4}\underline{w}$$

באותו אופן $\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}=-\underline{w}+\underline{u}$, לכן:

$$\overrightarrow{SE}=\frac{3}{4}(-\underline{w}+\underline{u})=\frac{3}{4}\underline{u}-\frac{3}{4}\underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{BC}=-\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{SF}=\frac{3}{4}\underline{v}-\frac{3}{4}\underline{w}$, $\overrightarrow{SE}=\frac{3}{4}\underline{u}-\frac{3}{4}\underline{w}$

סעיף ב (1)

נעבור מ־E ל־S ומשם ל־F:

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ES}+\overrightarrow{SF}=-\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{SF}$$

$$\overrightarrow{EF}=-\tfrac{3}{4}\underline{u}+\tfrac{3}{4}\underline{w}+\tfrac{3}{4}\underline{v}-\tfrac{3}{4}\underline{w}$$

$$=-\tfrac{3}{4}\underline{u}+\tfrac{3}{4}\underline{v}$$

תשובה: $\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{4}\underline{u}+\frac{3}{4}\underline{v}$

סעיף ב (2)

מסעיפים א ו־ב (1):

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}(-\underline{u} + \underline{v}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

הווקטור $\overrightarrow{EF}$ הוא כפולה של הווקטור $\overrightarrow{BC}$ במספר, ולכן הם באותו כיוון, כלומר $EF \parallel BC$ (הישרים אינם מתלכדים, כי E אינה על BC).

תשובה: $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ **– כפולה במספר, לכן מקבילים.**

סעיף ג

$$\overrightarrow{BC} = C - B$$
$$= (13-1,\ 15-(-1),\ 3-3)$$
$$= (12, 16, 0)$$

מסעיף ב (2):

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}(12, 16, 0)$$
$$= (9, 12, 0)$$

תשובה: $\overrightarrow{EF} = (9,12,0)$**,** $\overrightarrow{BC} = (12,16,0)$

סעיף ד

$$F = E + \overrightarrow{EF} = (5,1,6) + (9,12,0)$$
$$= (14, 13, 6)$$

תשובה: $F(14,13,6)$

סעיף ה (1)

הזווית EAF היא הזווית בין הווקטורים $\overrightarrow{AE}$ ו־$\overrightarrow{AF}$:

$$\overrightarrow{AE} = E - A = (1, -11, 3)$$
$$\overrightarrow{AF} = F - A = (10, 1, 3)$$
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 10 - 11 + 9 = 8$$
$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{1 + 121 + 9} = \sqrt{131}$$
$$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{100 + 1 + 9} = \sqrt{110}$$
$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{131} \cdot \sqrt{110}} \approx 0.0666$$
$$\alpha \approx 86.18^\circ$$

תשובה: $\sphericalangle EAF \approx 86.18^\circ$

סעיף ה (2)

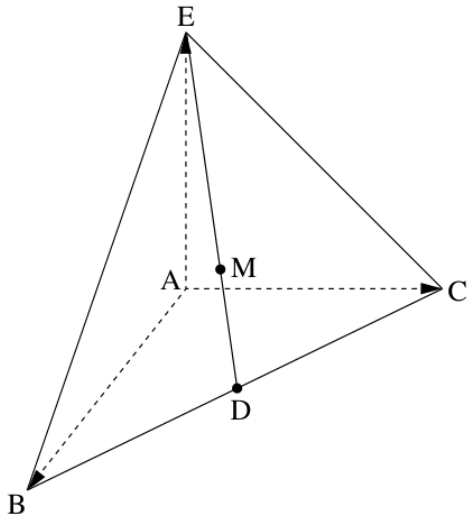
שטח משולש לפי שתי צלעות והזווית שביניהן:

$$S_{EAF} = \frac{AE \cdot AF \cdot \sin\alpha}{2}$$
$$S_{EAF} = \frac{\sqrt{131} \cdot \sqrt{110} \cdot \sin 86.18^\circ}{2}$$

≈ 59.887

תשובה: $S_{EAF} \approx 59.89$ **יחידות שטח**

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 2



2. בסרטוט שלפניכם פירמידה $ABCE$.

הנקודה D היא אמצע המקצוע BC.

הנקודה M נמצאת על ED כך ש־ $\overrightarrow{EM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{ED}$.

המקצוע AE הוא גובה בפירמידה.

נתון: $\sphericalangle BAC=90^o$.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AE}=\underline{w}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־ $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$ ו־ $\overrightarrow{AM}$.

נתון: $|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|=12$.

ב. **(1)** הוכיחו כי $\overrightarrow{AM}$ מאונך ל־ $\overrightarrow{ED}$.

(2) הוכיחו כי $\overrightarrow{AM}$ מאונך למישור BEC.

נתון: $A(0\,,0\,,0)$.

הקודקוד B נמצא על החלק החיובי של ציר ה־ x, הקודקוד C נמצא על החלק החיובי של ציר ה־ y,

והקודקוד E נמצא על החלק החיובי של ציר ה־ z.

ג. **(1)** מה הם שיעורי הנקודות $C\,,B$ ו־ E?

(2) מצאו את שיעורי הנקודות D ו־ M.

ד. חשבו את שטח המשולש AMD.

פתרון מלא

סעיף א

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\underline{u}+\underline{v}$$

D אמצע BC, לכן $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$
$$=\underline{u}+\tfrac{1}{2}(-\underline{u}+\underline{v})$$
$$=\tfrac{1}{2}\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}$$

ומכאן:

$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=-\underline{w}+\tfrac{1}{2}\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}$$

M על ED ו־$\overrightarrow{EM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{ED}$:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}$$
$$=\underline{w}+\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}-\underline{w}\right)$$
$$\overrightarrow{AM}=\tfrac{1}{3}\underline{u}+\tfrac{1}{3}\underline{v}+\tfrac{1}{3}\underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{BC}=-\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}-\underline{w}$, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}$

סעיף ב (1)

$\angle BAC = 90°$, ולכן $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$. AE גובה הפירמידה, ולכן הוא מאונך לבסיס ABC ובפרט ל־AB ול־AC: $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.

כמו כן $|\underline{u}|^2 = |\underline{v}|^2 = |\underline{w}|^2 = 144$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ED} =$$
$$= \tfrac{1}{3}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) \cdot$$
$$\cdot \left(\tfrac{1}{2}\underline{u} + \tfrac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}\right)$$

כל המכפלות של שני וקטורים שונים מתאפסות, ונשארות רק הריבועים:

$$= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2} \cdot 144 + \tfrac{1}{2} \cdot 144 - 144\right)$$
$$= 0$$

המכפלה הסקלרית 0, לכן $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ED}$.

תשובה: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$, לכן הם מאונכים.

סעיף ב (2)

נבדוק שגם $\overrightarrow{AM}$ מאונך ל־$\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \tfrac{1}{3}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) \cdot (-\underline{u} + \underline{v})$$
$$= \tfrac{1}{3}\left(-144 + 144\right) = 0$$

הישרים ED ו־BC נמצאים במישור BEC ונחתכים (בנקודה D). ישר המאונך לשני ישרים נחתכים במישור – מאונך למישור. לכן $\overrightarrow{AM}$ מאונך למישור BEC.

תשובה: $\overrightarrow{AM}$ מאונך ל־ED ול־BC (נחתכים במישור), לכן מאונך למישור BEC.

סעיף ג (1)

אורכי AB, AC, AE הם 12, והם נמצאים על החלקים החיוביים של הצירים x, y, z בהתאמה:

תשובה: $B(12,0,0)$, $C(0,12,0)$, $E(0,0,12)$

סעיף ג (2)

D אמצע BC:

$$D = \left(\frac{12+0}{2}, \frac{0+12}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$
$$= (6,6,0)$$

לפי סעיף א, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$, ו־$A$ בראשית:

$$M = \tfrac{1}{3}\left[(12,0,0) + (0,12,0)\right.$$
$$\left.+(0,0,12)\right]$$
$$M = \tfrac{1}{3}(12,12,12) = (4,4,4)$$

תשובה: $D(6,6,0)$, $M(4,4,4)$

סעיף ד

הנקודות M ו־D נמצאות על הישר ED, ולפי סעיף ב (1) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ED}$. לכן המשולש AMD ישר־זווית ב־M.

$$AM = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{MD} = (6-4,\ 6-4,\ 0-4)$$

$$= (2, 2, -4)$$

$$MD = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

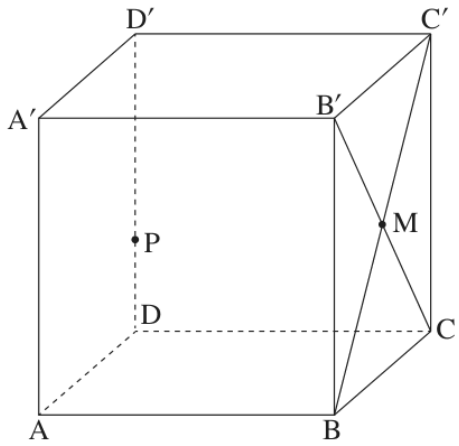
$$S_{AMD} = \frac{AM \cdot MD}{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{18}$$

$$= 12\sqrt{2} \approx 16.97$$

תשובה: $12\sqrt{2} \approx 16.97$ **יחידות שטח**

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 2



2. בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCDA'B'C'D'$.

הנקודה M היא מפגש האלכסונים בפאה $BCC'B'$.

נקודה P נמצאת על המקצוע DD' ומקיימת $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DD'}$.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו־$\overrightarrow{MP}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$.

נתון: $|\underline{u}|=|\underline{w}|=18$, $|\underline{v}|=6$.

ב. **(1)** הוכיחו כי הווקטור $\overrightarrow{AP}$ מאונך לווקטור $\overrightarrow{MP}$.

(2) חשבו את שטח המשולש APM.

נתון: $D(0,0,0)$.

הקודקוד A נמצא על החלק החיובי של ציר ה־x,

הקודקוד C נמצא על החלק החיובי של ציר ה־y והקודקוד D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה־z.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי הקודקודים C, B, C'.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה M.

ד. מצאו את גודל הזווית PMB.

פתרון מלא

סעיף א

בתיבה $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\underline{v}$ ו־$\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$. לפי הנתון $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{3}\underline{w}$:

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\underline{v}+\tfrac{1}{3}\underline{w}$$

M היא מפגש האלכסונים במלבן $BCC'B'$, ולכן אמצע האלכסון BC':

$$\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\underline{v}+\underline{w}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC'}=\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{w}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}&=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}\\&=\underline{v}+\tfrac{1}{3}\underline{w}-\underline{u}-\tfrac{1}{2}\underline{v}-\tfrac{1}{2}\underline{w}\\&=-\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}-\tfrac{1}{6}\underline{w}\end{aligned}$$

תשובה: $\overrightarrow{AP}=\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}$, $\overrightarrow{MP}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{6}\underline{w}$

סעיף ב (1)

בתיבה המקצועות היוצאים מקודקוד מאונכים זה לזה, לכן $\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$.

כמו כן $\underline{v}^2=36$ ו־$\underline{w}^2=324$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MP}&=\left(\underline{v}+\tfrac{1}{3}\underline{w}\right)\cdot\left(-\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}-\tfrac{1}{6}\underline{w}\right)\\&=\tfrac{1}{2}\underline{v}^2-\tfrac{1}{18}\underline{w}^2\\&=\tfrac{1}{2}\cdot 36-\tfrac{1}{18}\cdot 324=18-18=0\end{aligned}$$

(כל שאר המכפלות שוות ל־0.) המכפלה הסקלרית היא 0, ולכן $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{MP}$.

תשובה: $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MP}=0$, **לכן הווקטורים מאונכים.**

סעיף ב (2)

מסעיף ב (1) המשולש APM ישר־זווית ב־P, לכן שטחו חצי מכפלת הניצבים AP ו־MP.

$$|\overrightarrow{AP}|^2=\underline{v}^2+\tfrac{1}{9}\underline{w}^2=36+36=72$$
$$\Rightarrow\ AP=6\sqrt{2}$$
$$|\overrightarrow{MP}|^2=\underline{u}^2+\tfrac{1}{4}\underline{v}^2+\tfrac{1}{36}\underline{w}^2$$
$$=324+9+9=342$$
$$MP=\sqrt{342}=3\sqrt{38}$$
$$S_{APM}=\frac{6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{38}}{2}$$
$$=9\sqrt{76}=18\sqrt{19}$$
$$\approx 78.46$$

תשובה: $S_{APM}=18\sqrt{19}\approx 78.46$

סעיף ג (1)

$DA=BC=6$, $DC=AB=18$, $DD'=AA'=18$. לפי מיקום הקודקודים על הצירים:

$$A(6,0,0)$$
$$C(0,18,0)$$
$$D'(0,0,18)$$

הקודקוד B מתקבל מ־A בתזוזה של 18 בכיוון ציר ה־y, והקודקוד C' מ־C בתזוזה של 18 בכיוון ציר ה־z:

$$B(6,18,0)\qquad C'(0,18,18)$$

תשובה: $C(0,18,0)$, $B(6,18,0)$, $C'(0,18,18)$

סעיף ג (2)

M אמצע הקטע BC':

$$M=\left(\frac{6+0}{2},\frac{18+18}{2},\frac{0+18}{2}\right)$$
$$=(3,18,9)$$

תשובה: $M(3,18,9)$

סעיף ד

P על DD' ו־$DP=\frac{1}{3}\cdot 18=6$, לכן $P(0,0,6)$. הזווית PMB היא הזווית בין $\overrightarrow{MP}$ ל־$\overrightarrow{MB}$:

$$\overrightarrow{MP}=P-M=(-3,-18,-3)$$
$$\overrightarrow{MB}=B-M=(3,0,-9)$$
$$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MB}=-9+0+27=18$$
$$|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{342}$$

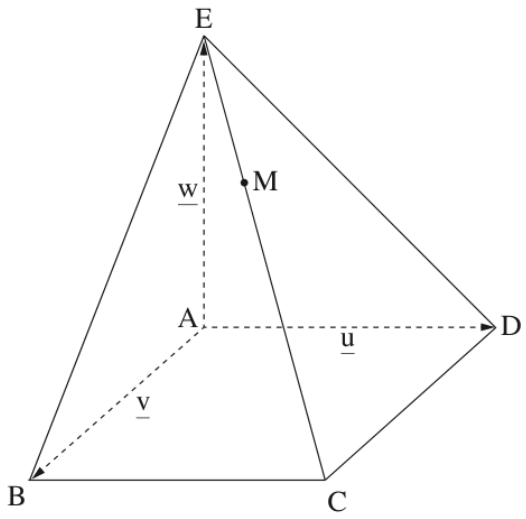
$|\overrightarrow{MB}| = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$

$\cos\alpha = \dfrac{18}{\sqrt{342}\cdot\sqrt{90}} \approx 0.1026$

$\alpha \approx 84.11^\circ$

תשובה: $\sphericalangle PMB \approx 84.11^\circ$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 2



2. בסרטוט שלפניכם פירמידה ABCDE שבסיסה ABCD הוא ריבוע.

הנקודה M נמצאת על המקצוע EC כך שמתקיים $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$.

AE מאונך לבסיס הפירמידה.

נסמן: $\overrightarrow{AE}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{v}$.

נתון: $|\underline{w}|=|\underline{u}|$.

א. **(1)** הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AM}$ באמצעות $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו־ $\underline{w}$.

(2) הוכיחו כי $\overrightarrow{AM}$ מאונך ל־ $\overrightarrow{CE}$.

נתון: האורך של צלע הריבוע ABCD הוא 6 , $A(0,0,0)$.

הקודקוד B נמצא על החלק החיובי של ציר ה־ x.

הקודקוד D נמצא על החלק החיובי של ציר ה־ y.

הקודקוד E נמצא על החלק החיובי של ציר ה־ z.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי הקודקודים E ו־ C.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה M.

ג. חשבו את שטח המשולש AMC.

פתרון מלא

סעיף א (1)

$ABCD$ ריבוע, לכן $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\underline{v}+\underline{u}$ (כי $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$).

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=-\underline{u}-\underline{v}+\underline{w}$$

M על CE ו־$\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$$
$$=\underline{u}+\underline{v}+\tfrac{2}{3}\left(-\underline{u}-\underline{v}+\underline{w}\right)$$
$$\overrightarrow{AM}=\tfrac{1}{3}\underline{u}+\tfrac{1}{3}\underline{v}+\tfrac{2}{3}\underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{CE}=-\underline{u}-\underline{v}+\underline{w}$, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{2}{3}\underline{w}$

סעיף א (2)

$ABCD$ ריבוע, לכן $\underline{v}\perp\underline{u}$, כלומר $\underline{v}\cdot\underline{u}=0$. AE מאונך לבסיס, לכן $\underline{w}\cdot\underline{u}=0$ ו־$\underline{w}\cdot\underline{v}=0$.

בריבוע $|\underline{u}|=|\underline{v}|$, ונתון $|\underline{u}|=|\underline{w}|$; נסמן את האורך המשותף ב־a.

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CE}$$
$$=\left(\tfrac{1}{3}\underline{u}+\tfrac{1}{3}\underline{v}+\tfrac{2}{3}\underline{w}\right)\cdot\left(-\underline{u}-\underline{v}+\underline{w}\right)$$

כל המכפלות של שני וקטורים שונים מתאפסות, ונשאר:

$$=-\tfrac{1}{3}a^2-\tfrac{1}{3}a^2+\tfrac{2}{3}a^2=0$$

לכן $\overrightarrow{AM}$ מאונך ל־$\overrightarrow{CE}$.

תשובה: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$**, לכן הם מאונכים.**

סעיף ב (1)

$6 = |\underline{u}| = |\underline{w}|$, ו־$E$ על החלק החיובי של ציר ה־z, לכן $E(0,0,6)$.

$B(6,0,0)$ ו־$D(0,6,0)$, ו־C הוא הקודקוד הרביעי של הריבוע:

$$C = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (6,6,0)$$

תשובה: $E(0,0,6)$**,** $C(6,6,0)$

סעיף ב (2)

$$\overrightarrow{CE} = E - C = (-6,-6,6)$$

$$M = C + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{CE}$$

$$= (6,6,0) + (-4,-4,4)$$

$$M = (2,2,4)$$

(בדיקה לפי סעיף א: $\frac{1}{3}(0,6,0) + \frac{1}{3}(6,0,0) + \frac{2}{3}(0,0,6) = (2,2,4)$ ✓.)

תשובה: $M(2,2,4)$

סעיף ג

הנקודות M ו־C על הישר CE, ולפי סעיף א (2) $AM \perp CE$. לכן המשולש AMC ישר־זווית ב־M.

$$AM = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24}$$

$$\overrightarrow{MC} = (6-2,\ 6-2,\ 0-4)$$

$$= (4,4,-4)$$

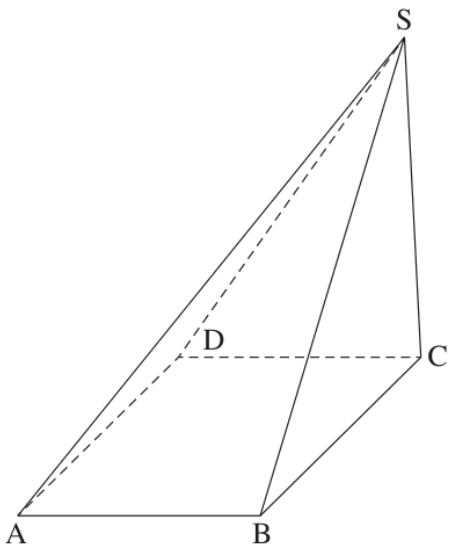
$$MC = \sqrt{16+16+16} = \sqrt{48}$$

$$S_{AMC} = \frac{AM \cdot MC}{2} = \frac{\sqrt{24} \cdot \sqrt{48}}{2}$$

$$S_{AMC} = \frac{\sqrt{1152}}{2} = 12\sqrt{2} \approx 16.97$$

תשובה: $12\sqrt{2} \approx 16.97$ **יחידות שטח**

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 2



2. בסרטוט שלפניכם פירמידה $SABCD$.

הבסיס $ABCD$ הוא ריבוע שאורך צלעו הוא 4.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$, אם יש צורך, את הווקטור $\overrightarrow{SD}$.

נתון: $\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

ב. מצאו את הערך של $\underline{w}\cdot\underline{v}$.

נתון: $\underline{w}\cdot\underline{u}=\underline{w}\cdot\underline{v}$, $|\overrightarrow{SC}|=\sqrt{17}$.

ג. מצאו את הערך של $|\underline{w}|$.

ד. **(1)** הוכיחו כי SC מאונך ל־BC ול־DC.

(2) מצאו את נפח הפירמידה $SABCD$.

פתרון מלא

סעיף א

$$\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}=-\underline{w}+\underline{v}$$

תשובה: $\overrightarrow{SD}=\underline{v}-\underline{w}$

סעיף ב

$\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ ו־$|\underline{v}|=4$ (צלע הריבוע), לכן $\underline{v}\cdot\underline{v}=16$:

$$\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{AD}=(\underline{v}-\underline{w})\cdot\underline{v}=\underline{v}^2-\underline{w}\cdot\underline{v}$$
$$=16-\underline{w}\cdot\underline{v}$$
$$16-\underline{w}\cdot\underline{v}=0\ \Rightarrow\ \underline{w}\cdot\underline{v}=16$$

תשובה: $\underline{w}\cdot\underline{v}=16$

סעיף ג

נבטא את $\overrightarrow{SC}$:

$$\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\underline{w}+\underline{u}+\underline{v}$$

הבסיס ריבוע, לכן $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$, $|\underline{v}|=|\underline{u}|=4$. נתון $\underline{w}\cdot\underline{u}=\underline{w}\cdot\underline{v}=16$.

$$|\overrightarrow{SC}|^2=(\underline{u}+\underline{v}-\underline{w})^2$$
$$=\underline{u}^2+\underline{v}^2+\underline{w}^2$$
$$+2\underline{u}\cdot\underline{v}-2\underline{u}\cdot\underline{w}-2\underline{v}\cdot\underline{w}$$
$$=16+16+|\underline{w}|^2+0-32-32$$
$$=|\underline{w}|^2-32$$
$$|\underline{w}|^2-32=17$$
$$\Rightarrow\ |\underline{w}|^2=49\ \Rightarrow\ |\underline{w}|$$
$$=7$$

תשובה: $|\underline{w}| = 7$

סעיף ד (1)

$\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ ו־$\overrightarrow{DC} = \underline{u}$.

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{v}$$
$$= 0 + 16 - 16 = 0$$
$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = (\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{u}$$
$$= 16 + 0 - 16 = 0$$

שתי המכפלות הסקלריות שוות ל־0 (והווקטורים אינם וקטורי אפס), לכן $SC \perp BC$ וגם $SC \perp DC$.

תשובה: $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ **ו־**$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$**.**

סעיף ד (2)

SC מאונך לשני ישרים נחתכים במישור הבסיס (BC ו־DC), ולכן הוא מאונך למישור הבסיס – הוא גובה הפירמידה: $h = \sqrt{17}$.

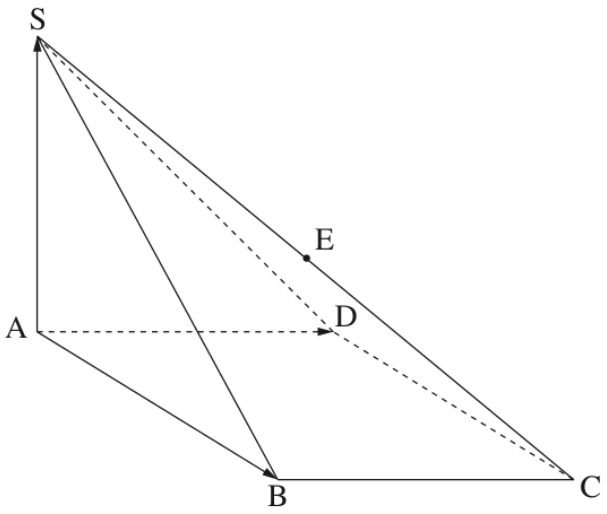
שטח הבסיס: $S = 4^2 = 16$.

$$V = \frac{S \cdot h}{3} = \frac{16\sqrt{17}}{3} \approx 21.99$$

תשובה: $V = \frac{16\sqrt{17}}{3} \approx 21.99$ **יחידות נפח**

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 2

2. בסרטוט שלפניכם פירמידה מרובעת SABCD שבסיסה ABCD הוא מעוין.



הנקודה E היא אמצע המקצוע SC.

AS מאונך לבסיס הפירמידה.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, ו־$\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{EB}$ ו־$\overrightarrow{ED}$.

נתון: $|\underline{u}|=|\underline{w}|$, $\sphericalangle BAD=60^o$.

ב. הוכיחו כי $\overrightarrow{EB}$ מאונך ל־$\overrightarrow{ED}$.

נתון: $A(0,0,0)$, $B(2\sqrt{3},2,0)$.

הקודקוד D נמצא על החלק החיובי של ציר ה־y.

שיעור ה־z של הקודקוד S הוא חיובי.

ג. **(1)** מצאו את אורך המקצוע AB ואת שיעורי הקודקוד S.

(2) חשבו את נפח הפירמידה SABCD.

פתרון מלא

סעיף א

$ABCD$ מעוין (מקבילית), לכן $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\underline{v}$. E אמצע SC, לכן:

$$\overrightarrow{AE}=\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AC}\right)=\tfrac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$$

עכשיו:

$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\underline{u}-\tfrac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$$
$$\overrightarrow{EB}=\tfrac{1}{2}\underline{u}-\tfrac{1}{2}\underline{v}-\tfrac{1}{2}\underline{w}$$
$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\underline{v}-\tfrac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$$
$$\overrightarrow{ED}=-\tfrac{1}{2}\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}-\tfrac{1}{2}\underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{EB}=\tfrac{1}{2}\underline{u}-\tfrac{1}{2}\underline{v}-\tfrac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{ED}=-\tfrac{1}{2}\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}-\tfrac{1}{2}\underline{w}$

סעיף ב

נסמן $|\underline{u}|=a$. במעוין כל הצלעות שוות, לכן $|\underline{v}|=a$, ונתון $|\underline{w}|=a$.

AS מאונך לבסיס, לכן $\underline{w}\cdot\underline{u}=0$ ו־$\underline{w}\cdot\underline{v}=0$. הזווית בין $\underline{u}$ ל־$\underline{v}$ היא 60°:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\tfrac{1}{2}a^2$$

נחשב (נוציא $\frac{1}{2}$ מכל סוגריים):

$$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=$$
$$=\tfrac{1}{4}(\underline{u}-\underline{v}-\underline{w})\cdot$$
$$\cdot(-\underline{u}+\underline{v}-\underline{w})$$
$$=\tfrac{1}{4}\left(-|\underline{u}|^2+2\underline{u}\cdot\underline{v}-|\underline{v}|^2+|\underline{w}|^2\right)$$

(המכפלות עם $\underline{w}$ של $\underline{u}$ ושל $\underline{v}$ מתאפסות.)

$$= \frac{1}{4}\left(-a^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}a^2 - a^2 + a^2\right)$$
$$= 0$$

המכפלה הסקלרית 0, לכן $\overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{ED}$.

תשובה: $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$**, לכן הם מאונכים.**

סעיף ג (1)

$$AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 + 0^2}$$
$$= \sqrt{12 + 4} = 4$$

$|\underline{u}| = |\underline{w}| = 4$, ו־$AS$ מאונך לבסיס (שנמצא במישור xy, כי A, B ו־D במישור זה), עם שיעור z חיובי:

$$S(0, 0, 4)$$

תשובה: $AB = 4$**,** $S(0, 0, 4)$

סעיף ג (2)

שטח הבסיס – מעוין עם צלע 4 וזווית $60°$. האלכסון BD מחלק את המעוין לשני משולשים חופפים (ABD ו־CBD, לפי צ.צ.צ.), ולפי נוסחת שטח משולש $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot \sin 60°}{2}$$
$$= 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

הגובה הוא $AS = 4$:

$$V = \frac{S_{ABCD} \cdot h}{3} = \frac{8\sqrt{3} \cdot 4}{3}$$
$$V = \frac{32\sqrt{3}}{3} = \frac{32}{\sqrt{3}} \approx 18.48$$

תשובה: $V = \frac{32}{\sqrt{3}} \approx 18.48$ **יחידות נפח**

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 1

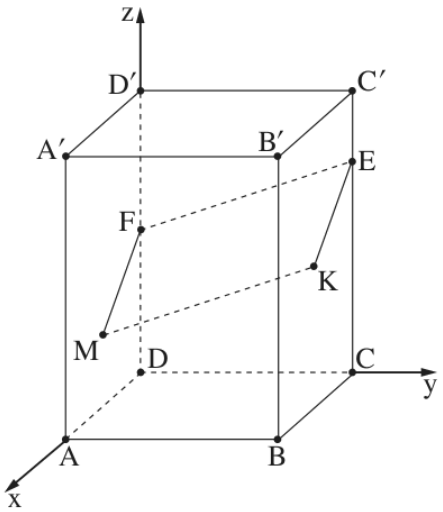
1. תיבה ממוקמת במערכת צירים כך שהקודקוד D נמצא בראשית הצירים.

הקודקודים A, C, D' נמצאים על החלקים החיוביים של ציר ה־ x, של ציר ה־ y ושל ציר ה־ z בהתאמה (ראו סרטוט).

נתון: $AD = 2$, $DC = 5$, נפח התיבה הוא 80.

א. **(1)** מצאו את שיעורי הקודקוד D'.

(2) כתבו את השיעורים של הקודקודים A, B, C, C'.



נתון: הנקודה E נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$.

הנקודה F היא אמצע המקצוע DD',

הנקודה K היא נקודת החיתוך של אלכסוני הפאה $BB'C'C$,

הנקודה M נמצאת על הפאה $AA'D'D$ ומקיימת:

המרובע FEKM הוא מקבילית.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות E, F, K.

ג. **(1)** חשבו את גודל הזווית FEK.

(2) חשבו את שטח המקבילית $FEKM$.

ד. **(1)** מצאו את שיעורי הנקודה M.

(2) הסבירו מדוע הנקודות A, M, F נמצאות על אותו ישר.

(3) חשבו פי כמה שטח המקבילית $FEKM$ גדול משטח המשולש AMK.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נפח התיבה הוא מכפלת שלושת המקצועות היוצאים מ־D:

$$V = AD \cdot DC \cdot DD'$$
$$= 2 \cdot 5 \cdot DD' = 80$$
$$\Rightarrow \ DD' = 8$$

D' על החלק החיובי של ציר ה־z, לכן:

$$D'(0,0,8)$$

תשובה: $D'(0,0,8)$

סעיף א (2)

A על ציר ה־x במרחק $AD = 2$ מהראשית, ו־C על ציר ה־y במרחק $DC = 5$:

$$A(2,0,0) \qquad C(0,5,0)$$

B מתקבל מ־A בתזוזה של 5 בכיוון ציר ה־y, ו־C' מתקבל מ־C בתזוזה של 8 בכיוון ציר ה־z:

$$B(2,5,0) \qquad C'(0,5,8)$$

תשובה: $A(2,0,0)$, $B(2,5,0)$, $C(0,5,0)$, $C'(0,5,8)$

סעיף ב

$$\overrightarrow{CC'} = C' - C = (0,0,8)$$

$$E = C + \frac{3}{4}\overrightarrow{CC'} = (0,5,0) + (0,0,6)$$
$$= (0,5,6)$$

F אמצע DD':

$$F = \left(0,0,\tfrac{0+8}{2}\right) = (0,0,4)$$

K מפגש האלכסונים במלבן $BB'C'C$, ולכן אמצע האלכסון BC':

$$K = \left(\tfrac{2+0}{2}, \tfrac{5+5}{2}, \tfrac{0+8}{2}\right)$$
$$= (1,5,4)$$

תשובה: $E(0,5,6)$, $F(0,0,4)$, $K(1,5,4)$

סעיף ג (1)

הזווית FEK היא הזווית בין $\overrightarrow{EF}$ ל-$\overrightarrow{EK}$:

$$\overrightarrow{EF} = F - E = (0,-5,-2)$$
$$\overrightarrow{EK} = K - E = (1,0,-2)$$
$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EK} = 0 + 0 + 4 = 4$$
$$|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$
$$|\overrightarrow{EK}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{5}} \approx 0.3322$$
$$\Rightarrow\ \alpha \approx 70.6^\circ$$

תשובה: $\sphericalangle FEK \approx 70.6^\circ$

סעיף ג (2)

שטח מקבילית = מכפלת שתי צלעות סמוכות בסינוס הזווית שביניהן:

$$S = EF \cdot EK \cdot \sin\alpha$$
$$= \sqrt{29}\cdot\sqrt{5}\cdot\sin 70.6^\circ$$
$$S \approx 11.36$$

תשובה: $S_{FEKM} \approx 11.36$ **יחידות שטח**

סעיף ד (1)

במקבילית $FEKM$ הצלעות הנגדיות שוות ומקבילות, לכן $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{EK}$:

$$M = F + \overrightarrow{EK} = (0,0,4) + (1,0,-2)$$
$$= (1,0,2)$$

(ואכן $y=0$ – הנקודה על הפאה $AA'D'D$ שנמצאת במישור xz.)

תשובה: $M(1,0,2)$

סעיף ד (2)

$$\overrightarrow{AM} = M - A = (-1,0,2)$$

$\overrightarrow{AF} = F - A = (-2, 0, 4)$

מתקיים $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AM}$: שני הווקטורים מקבילים ויוצאים מאותה נקודה A, לכן A, M ו־F נמצאות על ישר אחד.

(יותר מזה: M היא אמצע הקטע AF.)

תשובה: $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AM}$ – וקטורים מקבילים עם נקודה משותפת.

סעיף ד (3)

מסעיף ד (2), M אמצע AF, לכן $AM = MF$.

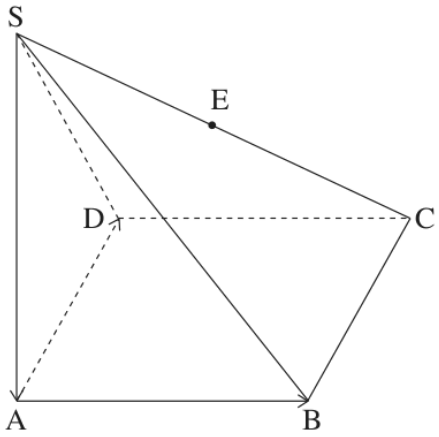
נסמן ב־h את המרחק של הנקודה K מהישר AF. זהו גם הגובה של המקבילית לצלע MF, וגם הגובה של המשולש AMK לצלע AM:

$$\frac{S_{FEKM}}{S_{AMK}} = \frac{MF \cdot h}{\frac{AM \cdot h}{2}}$$
$$= \frac{MF \cdot h}{\frac{MF \cdot h}{2}} = 2$$

(בדיקה במספרים: $S_{AMK} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AK}| \sin \sphericalangle MAK \approx 5.68$, ו־$11.36 : 5.68 = 2$.)

תשובה: פי 2

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 1



1. נתונה פירמידה $SABCD$ שבסיסה $ABCD$ הוא מלבן.

המקצוע SA מאונך לבסיס הפירמידה.

הנקודה E היא אמצע המקצוע SC (ראו סרטוט).

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ ו־ $\overrightarrow{SA}=\underline{w}$.

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{EB}$ ו־ $\overrightarrow{ED}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־ $\underline{w}$.

נתון: $\overrightarrow{EB}$ מאונך ל־ $\overrightarrow{ED}$,

$|\underline{v}|=3$, $|\underline{u}|=4$.

ב. מצאו את $|\underline{w}|$.

נתון: $D(0\,,0\,,0)$,

הצלע AD מונחת על החלק החיובי של ציר ה־ x ,

הצלע DC מונחת על החלק החיובי של ציר ה־ y ,

שיעור ה־ z של הנקודה S הוא חיובי.

ג. מצאו את שיעורי הנקודות $C\,,A$ ו־ S .

ד. חשבו את שטח המשולש DEB .

פתרון מלא

סעיף א

הבסיס מלבן, לכן $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

$$\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{SC}=\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$$

E אמצע SC, לכן $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

נלך מ־E ל־B דרך C. $ABCD$ מלבן, ולכן צלעותיו הנגדיות שוות ומקבילות: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}=-\underline{v}$.

$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}$$
$$=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}-\underline{v}$$
$$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$$

נלך מ־E ל־D דרך C ($\overrightarrow{CD}=-\underline{u}$):

$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}-\underline{u}$$
$$\overrightarrow{ED}=-\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{SC} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$
$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$
$\overrightarrow{ED} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$

סעיף ב

הבסיס מלבן, לכן $\underline{v} \perp \underline{u}$. SA מאונך לבסיס, לכן $\underline{u} \perp \underline{w}$ ו־$\underline{v} \perp \underline{w}$. כלומר:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

נתון $\overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{ED}$, לכן המכפלה הסקלרית שלהם היא 0:

$$\left(\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(-\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}\right) = 0$$

כל המכפלות המעורבות מתאפסות, ונשאר:

$$-\frac{1}{4}|\underline{u}|^2 - \frac{1}{4}|\underline{v}|^2 + \frac{1}{4}|\underline{w}|^2 = 0$$
$$-\frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{4} \cdot 9 + \frac{1}{4}|\underline{w}|^2 = 0$$
$$|\underline{w}|^2 = 16 + 9 = 25$$
$$|\underline{w}| = 5$$

תשובה: $|\underline{w}| = 5$

סעיף ג

$D(0,0,0)$ ראשית הצירים.

AD מונחת על החלק החיובי של ציר ה־x ואורכה $|\underline{v}| = 3$, לכן $A(3,0,0)$.

DC מונחת על החלק החיובי של ציר ה־y ואורכה $DC = AB = |\underline{u}| = 4$, לכן $C(0,4,0)$.

הבסיס נמצא במישור $z = 0$. SA מאונך לבסיס, לכן S נמצאת „מעל" A: אותם שיעורי x ו־y כמו A, ושיעור z שווה לאורך SA, כלומר 5 (חיובי).

$$S(3,0,5)$$

תשובה: $A(3,0,0)$
$C(0,4,0)$
$S(3,0,5)$

סעיף ד

נמצא את השיעורים של B ו־E:

$$B = A + \overrightarrow{DC} = (3,4,0)$$

E אמצע SC:

$$E\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = (1.5$$
$$2$$
$$2.5)$$
$$\overrightarrow{EB} = (1.5,\ 2,\ -2.5)$$
$$\overrightarrow{ED} = (-1.5,\ -2,\ -2.5)$$

בדיקה: $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=-2.25-4+6.25=0$, כלומר המשולש DEB ישר־זווית ב־E (כנתון בסעיף ב).

$$|\overrightarrow{EB}|=\sqrt{1.5^2+2^2+2.5^2}=\sqrt{12.5}$$

$$|\overrightarrow{ED}|=\sqrt{12.5}$$

שטח משולש ישר־זווית = מכפלת הניצבים חלקי 2:

$$S_{DEB}=\frac{EB\cdot ED}{2}=\frac{\sqrt{12.5}\cdot\sqrt{12.5}}{2}$$

$$S_{DEB}=\frac{12.5}{2}=6.25$$

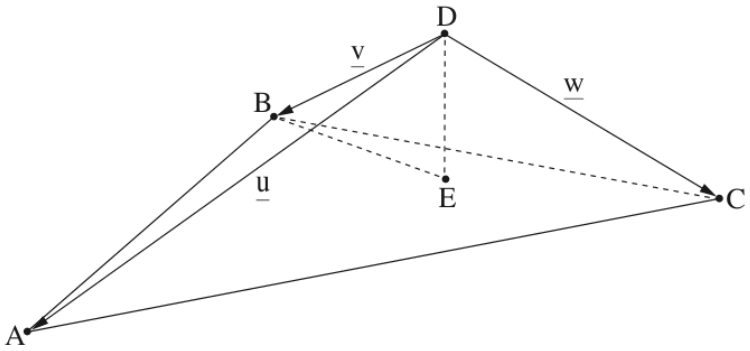
תשובה: $S_{DEB}=6.25$ **יחידות שטח**

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 1

1. בפירמידה המשולשת $ABCD$ המקצועות AD, BD ו־CD מאונכים זה לזה (ראו סרטוט).

הנקודה E נמצאת על המישור ABC, ומתקיים:

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{9}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{9}\overrightarrow{BC}$.



נסמן: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{w}$.

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$.

נתון: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = 1$, $|\underline{u}| = 2$.

ב. **(1)** חשבו את אורכי המקצועות BA ו־BC.

(2) חשבו את גודל הזווית ABC.

(3) חשבו את שטח המשולש ABC.

ג. הוכיחו כי הווקטור $\overrightarrow{DE}$ מאונך למישור ABC.

ד. חשבו את נפח הפירמידה $ABCD$.

פתרון מלא

סעיף א

נבטא את הווקטורים של צלעות המשולש:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \underline{u} - \underline{v}$$
$$\overrightarrow{BC} = \underline{w} - \underline{v}$$

נלך מ־D ל־E דרך B:

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \underline{v} + \tfrac{1}{9}\overrightarrow{BA} + \tfrac{4}{9}\overrightarrow{BC}$$
$$= \underline{v} + \tfrac{1}{9}(\underline{u} - \underline{v}) + \tfrac{4}{9}(\underline{w} - \underline{v})$$
$$\overrightarrow{DE} = \tfrac{1}{9}\underline{u} + \tfrac{4}{9}\underline{v} + \tfrac{4}{9}\underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{BA} = \underline{u} - \underline{v}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{w} - \underline{v}$, $\overrightarrow{DE} = \tfrac{1}{9}\underline{u} + \tfrac{4}{9}\underline{v} + \tfrac{4}{9}\underline{w}$

סעיף ב (1)

הזוויות בקודקוד D ישרות, לכן $\underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{u}\cdot\underline{w} = \underline{v}\cdot\underline{w} = 0$, ונתון $|\underline{u}| = 2$, $|\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(\underline{u} - \underline{v})^2}$$
$$= \sqrt{|\underline{u}|^2 - 2\underline{u}\cdot\underline{v} + |\underline{v}|^2}$$
$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4 - 0 + 1} = \sqrt{5}$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(\underline{w} - \underline{v})^2}$$
$$= \sqrt{1 - 0 + 1} = \sqrt{2}$$

(אפשר גם לפי משפט פיתגורס במשולשים ישרי־הזווית BDA ו־BDC.)

תשובה: $BA = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{2}$

סעיף ב (2)

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\underline{u}-\underline{v})\cdot(\underline{w}-\underline{v})$$
$$=|\underline{v}|^2=1$$

(שאר המכפלות מתאפסות.)

$$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$\angle ABC\approx 71.57^\circ$$

תשובה: $\angle ABC\approx 71.57^\circ$

סעיף ב (3)

$$S_{ABC}=\frac{BA\cdot BC\cdot\sin\angle ABC}{2}$$
$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 71.57^\circ}{2}=1.5$$

(בדיוק: $\sin\angle ABC=\frac{3}{\sqrt{10}}$, ולכן $S=\frac{\sqrt{10}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}}{2}=1.5$.)

תשובה: 1.5 **יחידות שטח**

סעיף ג

כדי להראות ש־DE מאונך למישור ABC מספיק להראות שהוא מאונך לשני ישרים נחתכים במישור – BA ו־BC:

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BA}=\left(\tfrac{1}{9}\underline{u}+\tfrac{4}{9}\underline{v}+\tfrac{4}{9}\underline{w}\right)\cdot(\underline{u}-\underline{v})$$
$$=\tfrac{1}{9}\cdot 4-\tfrac{4}{9}\cdot 1=0$$
$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\tfrac{1}{9}\underline{u}+\tfrac{4}{9}\underline{v}+\tfrac{4}{9}\underline{w}\right)\cdot(\underline{w}-\underline{v})$$
$$=\tfrac{4}{9}\cdot 1-\tfrac{4}{9}\cdot 1=0$$

$\overrightarrow{DE}$ מאונך ל־$\overrightarrow{BA}$ ול־$\overrightarrow{BC}$, שהם שני ישרים נחתכים במישור ABC, ולכן DE מאונך למישור ABC.

תשובה: $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ **ו־**$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}=0$**, לכן** DE **מאונך למישור.**

סעיף ד

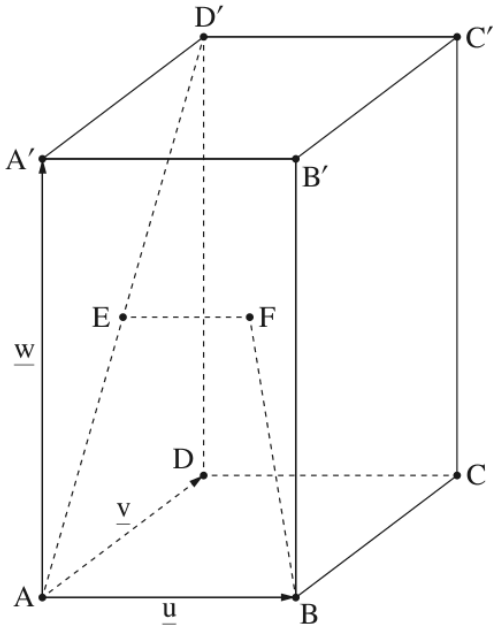
לפי סעיף ג, DE הוא הגובה מ־D לבסיס ABC.

$$|\overrightarrow{DE}|^2=\tfrac{1}{81}|\underline{u}|^2+\tfrac{16}{81}|\underline{v}|^2$$
$$+\tfrac{16}{81}|\underline{w}|^2$$
$$=\tfrac{4+16+16}{81}=\tfrac{36}{81}$$
$$\Rightarrow\ |\overrightarrow{DE}|=\tfrac{2}{3}$$
$$V=\frac{S_{ABC}\cdot DE}{3}=\frac{1.5\cdot\frac{2}{3}}{3}=\frac{1}{3}$$

(בדיקה: אפשר לראות את הפירמידה גם כבעלת בסיס BDC וגובה DA: $V=\frac{\frac{1\cdot 1}{2}\cdot 2}{3}=\frac{1}{3}$ ✓.)

תשובה: $V=\frac{1}{3}$ יחידות נפח

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 1



1. בסרטוט שלפניכם מתוארת תיבה $ABCDA'B'C'D'$.

הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $AA'D'D$.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

הנקודה F מקיימת: $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\underline{u}$.

א. **(1)** הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{BD'}$ ו־$\overrightarrow{AE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$.

(2) הוכיחו: $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD'}$.

ב. **(1)** הסבירו מדוע EF מקביל ל־AB.

(2) הוכיחו: $\overrightarrow{AB}$ מאונך ל־$\overrightarrow{AE}$.

נתון: בסיס התיבה $ABCD$ הוא ריבוע שאורך צלעו הוא 2.

נפח התיבה הוא 16.

ג. **(1)** חשבו את אורך המקצוע הצדדי של התיבה.

(2) חשבו את אורך הווקטור $\overrightarrow{BF}$.

ד. **(1)** חשבו את גודל הזווית ABF.

(2) מצאו את הגדלים של שאר הזוויות של המרובע $AEFB$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

E מפגש האלכסונים של המלבן $AA'D'D$, ולכן אמצע האלכסון AD':

$$\overrightarrow{AE}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD'}=\tfrac{1}{2}(\underline{v}+\underline{w})$$
$$=\tfrac{1}{2}\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{w}$$

נלך מ־B ל־D' דרך A ו־D:

$$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$$
$$=-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{AE}=\tfrac{1}{2}\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{BD'}=-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$

סעיף א (2)

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}$$
$$=-\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{w}+\tfrac{1}{2}\underline{u}$$
$$=-\tfrac{1}{2}\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{w}$$
$$\overrightarrow{BF}=\tfrac{1}{2}(-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD'}$$

תשובה: $\overrightarrow{BF}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD'}$ **(הוכחה)**

סעיף ב (1)

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\underline{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ – וקטור $\overrightarrow{EF}$ הוא כפולה בסקלר של $\overrightarrow{AB}$, ולכן הם מקבילים (ו־E אינו על AB, לכן אלה שני ישרים מקבילים שונים).

תשובה: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, כלומר כפולה של $\overrightarrow{AB}$.

סעיף ב (2)

בתיבה כל המקצועות היוצאים מקודקוד מאונכים זה לזה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$, $\underline{u}\cdot\underline{w}=0$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = \underline{u}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{w}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\underline{u}\cdot\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{u}\cdot\underline{w} = 0$$

לכן $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$.

תשובה: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=0$, לכן הם מאונכים.

סעיף ג (1)

נפח תיבה = שטח הבסיס • גובה. שטח הבסיס $2\cdot 2 = 4$, ונסמן ב־h את אורך המקצוע הצדדי:

$$4h = 16 \;\Rightarrow\; h = 4$$

תשובה: 4

סעיף ג (2)

לפי סעיף א (2), $|\overrightarrow{BF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD'}|$. נחשב (המקצועות מאונכים זה לזה):

$$|\overrightarrow{BD'}| = \sqrt{|\underline{u}|^2+|\underline{v}|^2+|\underline{w}|^2}$$
$$= \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24}$$
$$|\overrightarrow{BF}| = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6} \approx 2.45$$

תשובה: $|\overrightarrow{BF}| = \sqrt{6} \approx 2.45$

סעיף ד (1)

הזווית ABF היא הזווית בין הווקטורים $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$ ו־$\overrightarrow{BF}$:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF} = (-\underline{u})\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{w}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}|\underline{u}|^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 4 = 2$$
$$\cos\angle ABF = \frac{2}{2\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$
$$\angle ABF \approx 65.91^\circ$$

תשובה: $\angle ABF \approx 65.91^\circ$

סעיף ד (2)

$\angle EAB = 90^\circ$ – לפי סעיף ב (2).

$EF \parallel AB$ (סעיף ב (1)), ולכן $\angle AEF + \angle EAB = 180^\circ$ (זוויות חד־צדדיות בין ישרים מקבילים), כלומר $\angle AEF = 90^\circ$.

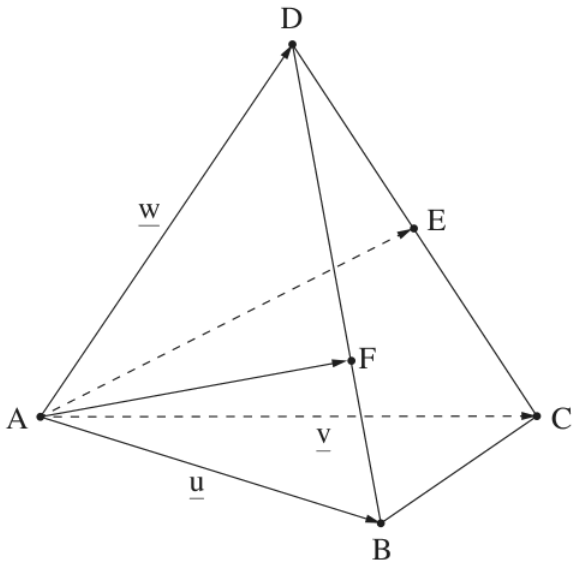
סכום הזוויות במרובע 360°:

$\angle EFB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 65.91^\circ$

$= 114.09^\circ$

תשובה: $\angle EAB = 90^\circ$,$\angle AEF = 90^\circ$, $\angle EFB \approx 114.09^\circ$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 1



1. בפירמידה המשולשת ABCD

הפאות ABD ו־ACD הן משולשים שווי צלעות

(ראו סרטוט).

הנקודה E היא אמצע המקצוע CD.

הנקודה F נמצאת על המקצוע BD

ומחלקת אותו ביחס של $BF:FD=1:2$.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{w}$.

נתון: $|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|=6$, $\sphericalangle BAC=45^o$.

א. חשבו את המכפלות הסקלריות שלפניכם:

$\underline{u}\cdot\underline{v}$, $\underline{u}\cdot\underline{w}$, $\underline{v}\cdot\underline{w}$.

ב. **(1)** הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{CD}$ ו־$\overrightarrow{BD}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, ו־$\underline{w}$ (אם יש צורך).

(2) הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AE}$ ו־$\overrightarrow{AF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, ו־$\underline{w}$ (אם יש צורך).

ג. לפניכם שלוש טענות, **(1)**–**(3)**. קבעו אילו מן הטענות נכונות ואילו אינן נכונות. נמקו את כל תשובותיכם.

(1) $\overrightarrow{CD}$ מאונך ל־$\overrightarrow{AE}$.

(2) $\overrightarrow{CD}$ מאונך ל־$\overrightarrow{AF}$.

(3) $\overrightarrow{CD}$ מאונך למישור EAF.

פתרון מלא

סעיף א

כל המקצועות שווים ל־6. הפאות ABD ו־ACD הן משולשים שווי צלעות, לכן $\sphericalangle DAB=\sphericalangle DAC=60^\circ$, ונתון $\sphericalangle BAC=45^\circ$.

$$\underline{v}\cdot\underline{w}=6\cdot6\cdot\cos60^\circ=36\cdot\frac{1}{2}=18$$

$$\underline{u}\cdot\underline{w}=6\cdot6\cdot\cos60^\circ=18$$

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=6\cdot6\cdot\cos45^\circ$$

$$=36\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=18\sqrt{2}$$

תשובה: $\underline{v}\cdot\underline{w}=18$, $\underline{u}\cdot\underline{w}=18$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=18\sqrt{2}$

סעיף ב (1)

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=-\underline{v}+\underline{w}$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\underline{u}+\underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{CD}=-\underline{v}+\underline{w}$, $\overrightarrow{BD}=-\underline{u}+\underline{w}$

סעיף ב (2)

E אמצע CD:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \underline{v} + \tfrac{1}{2}(-\underline{v} + \underline{w}) \\ &= \tfrac{1}{2}\underline{v} + \tfrac{1}{2}\underline{w}\end{aligned}$$

$BF : FD = 1:2$, לכן $BF = \tfrac{1}{3}BD$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \underline{u} + \tfrac{1}{3}(-\underline{u} + \underline{w}) \\ &= \tfrac{2}{3}\underline{u} + \tfrac{1}{3}\underline{w}\end{aligned}$$

תשובה: $\overrightarrow{AE} = \tfrac{1}{2}\underline{v} + \tfrac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{AF} = \tfrac{2}{3}\underline{u} + \tfrac{1}{3}\underline{w}$

סעיף ג

(1) נחשב מכפלה סקלרית (נזכור $|\underline{v}|^2 = |\underline{w}|^2 = 36$):

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} &= \tfrac{1}{2}(\underline{v} + \underline{w}) \cdot (\underline{w} - \underline{v}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\underline{w}^2 - \underline{v}^2\right) = \tfrac{1}{2}(36 - 36) = 0\end{aligned}$$

המכפלה 0, לכן $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{CD}$ – הטענה **נכונה**. (גם בלי חישוב: במשולש שווה הצלעות ACD התיכון AE הוא גם גובה.)

(2)

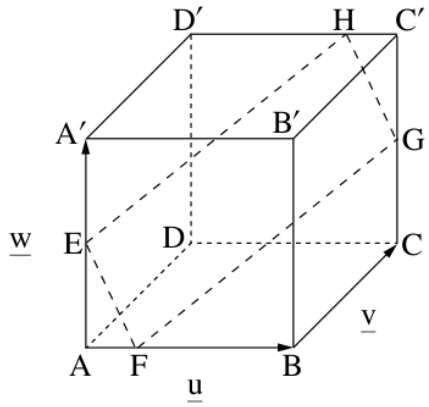
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} &= \left(\tfrac{2}{3}\underline{u} + \tfrac{1}{3}\underline{w}\right) \cdot (\underline{w} - \underline{v}) \\ &= \tfrac{2}{3}\underline{u} \cdot \underline{w} - \tfrac{2}{3}\underline{u} \cdot \underline{v} + \tfrac{1}{3}\underline{w}^2 - \tfrac{1}{3}\underline{w} \cdot \underline{v} \\ &= 12 - 12\sqrt{2} + 12 - 6 \\ &= 18 - 12\sqrt{2} \approx 1.03 \neq 0\end{aligned}$$

המכפלה שונה מ־0, לכן $\overrightarrow{AF}$ אינו מאונך ל־$\overrightarrow{CD}$ – הטענה **אינה נכונה**.

(3) אם ישר מאונך למישור, הוא מאונך לכל ישר במישור. הישר AF נמצא במישור EAF, ולפי (2) CD אינו מאונך ל־AF. לכן CD אינו מאונך למישור EAF – הטענה **אינה נכונה**.

תשובה: (1) נכונה, (2) לא נכונה, (3) לא נכונה.

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 1



1. נתונה הקובייה $ABCDA'B'C'D'$ (ראו ציור).

הנקודות E ו־G הן אמצעי המקצועות AA' ו־CC' בהתאמה.

הנקודה F מקיימת: $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

הנקודה H מקיימת: $\overrightarrow{D'H}=\frac{3}{4}\overrightarrow{D'C'}$.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

א. **(1)** הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{HG}$ ו־$\overrightarrow{EH}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$.

(2) האם המרובע EFGH הוא מקבילית? נמקו.

הנפח של הקובייה הנתונה הוא 512.

ב. **(1)** מצאו את אורך המקצוע של הקובייה.

(2) מצאו את אורכי הווקטורים $\overrightarrow{EF}$ ו־$\overrightarrow{EH}$.

ג. **(1)** מצאו את גודל הזווית HEF.

(2) מצאו את שטח המרובע EFGH.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נבטא כל נקודה בעזרת הקודקוד A והווקטורים (אורך המקצוע מבוטל בינתיים):

E אמצע AA', לכן $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\underline{w}$. נתון $AF=\frac{1}{4}AB$, לכן $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\underline{u}$.

G אמצע CC', לכן $\overrightarrow{AG}=\underline{u}+\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

$D'H=\frac{3}{4}D'C'$, לכן $\overrightarrow{AH}=\underline{v}+\underline{w}+\frac{3}{4}\underline{u}$.

עכשיו:

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}$$
$$=-\tfrac{1}{2}\underline{w}+\tfrac{1}{4}\underline{u}=\tfrac{1}{4}\underline{u}-\tfrac{1}{2}\underline{w}$$
$$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$$
$$=\tfrac{3}{4}\underline{u}+\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{w}$$
$$\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HC'}+\overrightarrow{C'G}$$
$$=\tfrac{1}{4}\underline{u}-\tfrac{1}{2}\underline{w}$$
$$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'H}$$
$$=\tfrac{1}{2}\underline{w}+\underline{v}+\tfrac{3}{4}\underline{u}$$

תשובה: $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{w}$

$\overrightarrow{FG}=\frac{3}{4}\underline{u}+\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$

$$\overrightarrow{HG} = \frac{1}{4}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{w}$$
$$\overrightarrow{EH} = \frac{3}{4}\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$$

סעיף א (2)

מצאנו ש־$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ (וגם $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$).

וקטורים שווים הם מקבילים ושווים באורכם, לכן הצלעות הנגדיות EF ו־HG מקבילות ושוות.

מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות הוא מקבילית – לכן $EFGH$ **הוא מקבילית**.

תשובה: כן, $EFGH$ מקבילית ($\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$).

סעיף ב (1)

נפח קובייה שאורך מקצועה a הוא a^3:

$$a^3 = 512 \;\Rightarrow\; a = \sqrt[3]{512} = 8$$

תשובה: אורך המקצוע: 8

סעיף ב (2)

הווקטורים $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ מאונכים זה לזה ואורך כל אחד 8, לכן:

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{u}\cdot\underline{w} = \underline{v}\cdot\underline{w} = 0$$
$$\underline{u}^2 = \underline{v}^2 = \underline{w}^2 = 64$$

אורך $\overrightarrow{EF}$:

$$|\overrightarrow{EF}|^2 = \left(\frac{1}{4}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{w}\right)^2$$
$$= \frac{1}{16}\underline{u}^2 + \frac{1}{4}\underline{w}^2$$
$$= \frac{1}{16}\cdot 64 + \frac{1}{4}\cdot 64 = 4 + 16 = 20$$
$$|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{20} \approx 4.47$$

אורך $\overrightarrow{EH}$:

$$|\overrightarrow{EH}|^2 = \left(\frac{3}{4}\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}\right)^2$$
$$= \frac{9}{16}\underline{u}^2 + \underline{v}^2 + \frac{1}{4}\underline{w}^2$$
$$= 36 + 64 + 16 = 116$$
$$|\overrightarrow{EH}| = \sqrt{116} \approx 10.77$$

(המכפלות המעורבות מתאפסות כי הווקטורים מאונכים.)

תשובה: $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{20} \approx 4.47$
$|\overrightarrow{EH}| = \sqrt{116} \approx 10.77$

סעיף ג (1)

הזווית HEF היא הזווית בין $\overrightarrow{EH}$ ל־$\overrightarrow{EF}$. נחשב מכפלה סקלרית:

$$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EF} =$$
$$\left(\frac{3}{4}\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{w}\right)$$
$$= \frac{3}{16}\underline{u}^2 - \frac{1}{4}\underline{w}^2$$

$= \frac{3}{16} \cdot 64 - \frac{1}{4} \cdot 64 = 12 - 16 = -4$

$\cos \sphericalangle HEF = \frac{-4}{\sqrt{116} \cdot \sqrt{20}} \approx -0.0830$

$\sphericalangle HEF \approx 94.76^\circ$

תשובה: $\sphericalangle HEF \approx 94.76^\circ$

סעיף ג (2)

שטח מקבילית = מכפלת שתי צלעות סמוכות בסינוס הזווית שביניהן:

$S_{EFGH} = EF \cdot EH \cdot \sin \sphericalangle HEF$

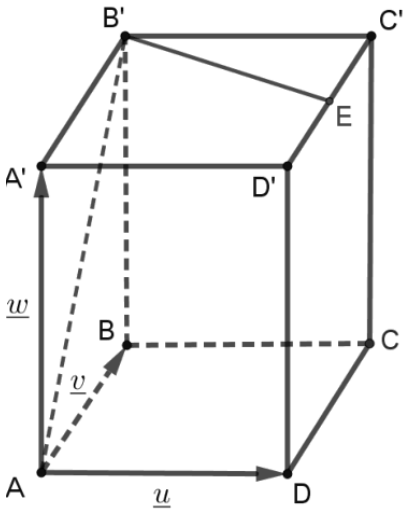
$= \sqrt{20} \cdot \sqrt{116} \cdot \sin 94.76^\circ$

≈ 48

תשובה: שטח המקבילית: 48

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 1

1. במנסרה ישרה $ABCDA'B'C'D'$ הבסיס $ABCD$ הוא מעוין.



נתון: אורך צלע המעוין הוא 2, $\measuredangle BAD = 60°$, נפח המנסרה הוא $8\sqrt{3}$.

הנקודה E היא אמצע המקצוע $C'D'$.

נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. הבע את הווקטורים $\overrightarrow{B'E}$ ו- $\overrightarrow{B'A}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. לפניך שלוש טענות (1–3). קבע אלו מהטענות נכונות. נמק.

(1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

(2) $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$

(3) $\overrightarrow{B'A}$ מאונך ל- $\overrightarrow{B'E}$.

ג. חשב את אורך הגובה של המנסרה.

ד. (1) חשב את אורך הווקטור $\overrightarrow{B'E}$.

(2) חשב את שטח המשולש $AB'E$.

פתרון מלא

סעיף א

E אמצע $C'D'$, ו־$\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{BA} = -\underline{v}$, לכן $\overrightarrow{C'E} = -\frac{1}{2}\underline{v}$. כמו כן $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD} = \underline{u}$.

$$\overrightarrow{B'E} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'E}$$
$$\overrightarrow{B'E} = \underline{u} - \tfrac{1}{2}\underline{v}$$
$$\overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{B'A} = -\underline{w} - \underline{v}$$

תשובה: $\overrightarrow{B'E} = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$

$\overrightarrow{B'A} = -\underline{v} - \underline{w}$

סעיף ב

נתון: צלע המעוין 2, לכן $|\underline{v}| = |\underline{u}| = 2$, והזווית בין $\underline{u}$ ל־$\underline{v}$ היא $\measuredangle BAD = 60°$.

(1)

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 4 \cdot \tfrac{1}{2} = 2$$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 2 \neq 0$, לכן הטענה **אינה נכונה**.

(2) במנסרה ישרה המקצועות הצדדיים מאונכים לבסיס, לכן $\underline{u} \perp \underline{w}$ ומכאן $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$. הטענה **נכונה**.
(מאותה סיבה גם $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$.)

(3) נחשב את המכפלה הסקלרית:

$$\overrightarrow{B'A} \cdot \overrightarrow{B'E} =$$
$$(-\underline{v} - \underline{w}) \cdot \left(\underline{u} - \tfrac{1}{2}\underline{v}\right)$$
$$= -\underline{u} \cdot \underline{v} + \tfrac{1}{2}\underline{v}^2 - \underline{u} \cdot \underline{w} + \tfrac{1}{2}\underline{v} \cdot \underline{w}$$

$= -2 + \frac{1}{2} \cdot 4 - 0 + 0 = 0$

המכפלה הסקלרית 0, לכן $\overrightarrow{B'A} \perp \overrightarrow{B'E}$ – הטענה **נכונה**.

תשובה: (1) לא נכונה ($\underline{u} \cdot \underline{v} = 2$)
(2) נכונה
(3) נכונה

סעיף ג

נפח מנסרה = שטח הבסיס • גובה. שטח המעוין:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$
$$V = S_{ABCD} \cdot h \;\Rightarrow\; 8\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot h$$
$$h = 4$$

תשובה: גובה המנסרה: 4

סעיף ד (1)

$$|\overrightarrow{B'E}|^2 = \left(\underline{u} - \tfrac{1}{2}\underline{v}\right)^2$$
$$= \underline{u}^2 - \underline{u} \cdot \underline{v} + \tfrac{1}{4}\underline{v}^2$$
$$= 4 - 2 + \tfrac{1}{4} \cdot 4 = 3$$
$$|\overrightarrow{B'E}| = \sqrt{3} \approx 1.73$$

תשובה: $|\overrightarrow{B'E}| = \sqrt{3} \approx 1.73$

סעיף ד (2)

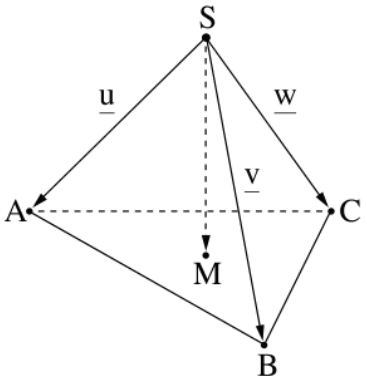
לפי ב (3) $B'A \perp B'E$, כלומר המשולש $AB'E$ ישר זווית ב־B', והצלעות $B'A$ ו־$B'E$ הן הניצבים.
אורך $B'A$ (עם $|\underline{w}| = h = 4$ ו־$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$):

$$|\overrightarrow{B'A}|^2 = (\underline{v} + \underline{w})^2 = \underline{v}^2 + \underline{w}^2$$
$$= 4 + 16 = 20 \;\Rightarrow\; |\overrightarrow{B'A}| = \sqrt{20}$$
$$S_{AB'E} = \frac{B'A \cdot B'E}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{3}}{2}$$
$$= \sqrt{15} \approx 3.87$$

תשובה: $S_{AB'E} = \sqrt{15} \approx 3.87$

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 1

1. נתונה פירמידה ישרה $SABC$ שבסיסה משולש ABC (ראה סרטוט).



אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה הוא 3.

נתון: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle ASC = 30^\circ$.

נסמן: $\overrightarrow{SA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{SB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{SC} = \underline{w}$.

הנקודה M נמצאת במישור ABC.

ידוע כי $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$.

א. חשב את המכפלות הסקלריות:

$\underline{u} \cdot \underline{v}$, $\underline{v} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{w}$.

ב. **(1)** הבע את הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו־ $\overrightarrow{AC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־ $\underline{w}$.

(2) חשב את אורכי הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו־ $\overrightarrow{AC}$.

(3) מצא את גודל הזווית BAC.

ג. הראה כי $\overrightarrow{SM}$ מאונך למישור ABC.

נסמן: $\left|\overrightarrow{SM}\right| = m$.

ד. הבע את נפח הפירמידה $SABC$ באמצעות m.

פתרון מלא

סעיף א

הפירמידה ישרה, לכן כל המקצועות הצדדיים שווים: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}| = 3$, והזווית בין כל שני וקטורים היא 30°.

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 30^\circ$$
$$= 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.5\sqrt{3} \approx 7.79$$

באותו אופן:

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} = 4.5\sqrt{3}$$

תשובה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} = 4.5\sqrt{3} \approx 7.79$

סעיף ב (1)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = -\underline{u} + \underline{v}$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} = -\underline{u} + \underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{AB} = \underline{v} - \underline{u}$
$\overrightarrow{AC} = \underline{w} - \underline{u}$

סעיף ב (2)

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (\underline{v} - \underline{u})^2$$
$$= |\underline{v}|^2 - 2\,\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{u}|^2$$

$$= 9 - 2 \cdot 4.5\sqrt{3} + 9 = 18 - 9\sqrt{3}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18 - 9\sqrt{3}} \approx 1.553$$

באותו אופן (עם $\underline{w}$ במקום $\underline{v}$):

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{18 - 9\sqrt{3}} \approx 1.553$$

תשובה: $AB = AC = \sqrt{18 - 9\sqrt{3}} \approx 1.553$

סעיף ב (3)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\underline{v} - \underline{u}) \cdot (\underline{w} - \underline{u})$$
$$= \underline{v} \cdot \underline{w} - \underline{v} \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot \underline{w} + |\underline{u}|^2$$
$$= 4.5\sqrt{3} - 4.5\sqrt{3} - 4.5\sqrt{3} + 9$$
$$= 9 - 4.5\sqrt{3}$$
$$\cos \angle BAC = \frac{9 - 4.5\sqrt{3}}{\left(\sqrt{18 - 9\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$= \frac{9 - 4.5\sqrt{3}}{18 - 9\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$
$$\angle BAC = 60^\circ$$

(מתאים לכך שבסיס הפירמידה הישרה הוא משולש שווה־צלעות.)

תשובה: $\angle BAC = 60^\circ$

סעיף ג

כדי להראות ש־SM מאונך למישור ABC מספיק להראות שהוא מאונך לשני וקטורים לא מקבילים במישור – $\overrightarrow{AB}$ ו־$\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{3}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) \cdot (\underline{v} - \underline{u})$$
$$= \tfrac{1}{3}\big(\underline{u} \cdot \underline{v} - |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2$$
$$-\underline{v} \cdot \underline{u} + \underline{w} \cdot \underline{v} - \underline{w} \cdot \underline{u}\big)$$
$$= \tfrac{1}{3}(4.5\sqrt{3} - 9 + 9 - 4.5\sqrt{3}$$
$$+4.5\sqrt{3} - 4.5\sqrt{3}) = 0$$

באותו אופן (בהחלפת $\underline{v}$ ב־$\underline{w}$) מקבלים $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$\overrightarrow{SM}$ מאונך לשני וקטורים לא מקבילים במישור ABC, ולכן SM מאונך למישור ABC.

תשובה: $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

לכן SM מאונך למישור ABC.

סעיף ד

לפי סעיף ג, SM הוא גובה הפירמידה, $SM = m$. שטח הבסיס (לפי סעיף ב: $AB = AC$, $\angle BAC = 60^\circ$):

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2}$$
$$= \frac{(18 - 9\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$
$$= \frac{18\sqrt{3} - 27}{4} \approx 1.044$$
$$V = \frac{S_{ABC} \cdot m}{3} = \frac{18\sqrt{3} - 27}{12}\, m$$
$$V = \frac{6\sqrt{3} - 9}{4}\, m \approx 0.348\, m$$

תשובה: $V = \frac{6\sqrt{3}-9}{4}\, m \approx 0.348\, m$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.