פונקציות לוגריתמיות – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 4 יחידות, כיתה י״ב (שאלון 472) • 18 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x^2}{-6+4\ell n(x)}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה־ x של הפונקצייה $f(x)$.

ב. האם גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x ? נמקו את תשובתכם.

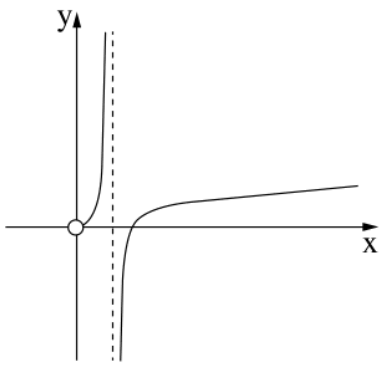
ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

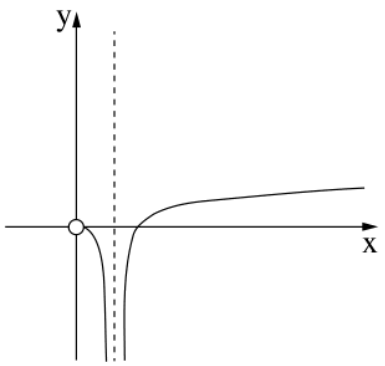
תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. **(1)** קבעו איזה מן הגרפים $I-IV$ שלפניכם מתאר את הפונקצייה $f(x)$, ואיזה מהם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמקו את קביעותיכם.

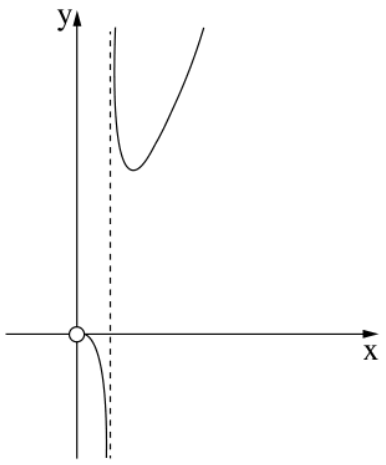
(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x=e^3$.



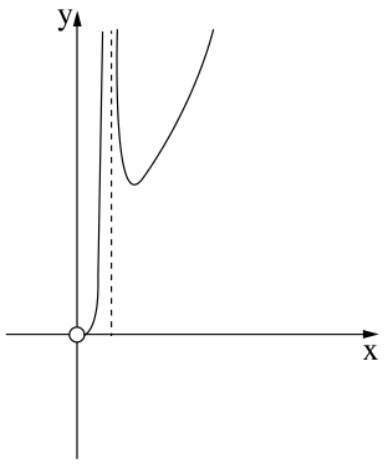
I



II



III



IV

פתרון מלא

סעיף א (1)

שני תנאים:

• הביטוי $\ell n\, x$ מוגדר רק עבור $x > 0$.

• המכנה שונה מאפס:

$$-6 + 4\,\ell n\, x \neq 0$$
$$\ell n\, x \neq 1.5 \;\Rightarrow\; x \neq e^{1.5}$$

תשובה: $x > 0$ **,** $x \neq e^{1.5}$

סעיף א (2)

ב־$x = e^{1.5}$ המכנה מתאפס והמונה $x^2 = e^3 \neq 0$. לכן כאשר x מתקרב ל־$e^{1.5}$ הפונקציה שואפת לאינסוף (או למינוס אינסוף) – יש אסימפטוטה אנכית.

תשובה: $x = e^{1.5} \approx 4.48$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y: $x = 0$ אינו בתחום ההגדרה – אין חיתוך.

חיתוך עם ציר ה־x: $f(x) = 0$ רק אם המונה מתאפס, כלומר $x^2 = 0$, $x = 0$ – גם זה לא בתחום.

לכן אין לגרף נקודות חיתוך עם הצירים.

תשובה: אין – הנקודה היחידה שמאפסת את המונה היא $x = 0$, והיא לא בתחום ההגדרה.

סעיף ג (1)

נגזור לפי כלל המנה $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{2x\left(-6 + 4\,\ell n\, x\right) - x^2 \cdot \frac{4}{x}}{\left(-6 + 4\,\ell n\, x\right)^2}$$
$$f'(x) = \frac{8x\,\ell n\, x - 16x}{\left(-6 + 4\,\ell n\, x\right)^2}$$
$$f'(x) = \frac{8x\left(\ell n\, x - 2\right)}{\left(-6 + 4\,\ell n\, x\right)^2}$$

המכנה חיובי והגורם $8x$ חיובי בתחום, לכן:

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ell n\, x = 2 \;\Rightarrow\; x = e^2$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$0 < x < e^{1.5}$	–	יורדת ↘
$x = e^{1.5}$	לא מוגדרת	אסימפטוטה
$e^{1.5} < x < e^2$	–	יורדת ↘
$x = e^2$	0	מינימום
$x > e^2$	+	עולה ↗

$$f\left(e^2\right) = \frac{e^4}{-6 + 4 \cdot 2} = \frac{e^4}{2} \approx 27.3$$

תשובה: מינימום: $\left(e^2,\ \frac{e^4}{2}\right) \approx (7.39,\ 27.3)$

סעיף ג (2)

לפי טבלת הסימנים של $f'(x)$ מסעיף ג (1):

תשובה: ירידה: $0 < x < e^{1.5}$, $e^{1.5} < x < e^2$
עלייה: $x > e^2$

סעיף ד (1)
הגרף של $f(x)$**:** עבור $0 < x < e^{1.5}$ המכנה שלילי והמונה חיובי, לכן $f(x) < 0$ – הגרף מתחת לציר ה־x ויורד לכיוון האסימפטוטה. מימין לאסימפטוטה $f(x) > 0$, עם מינימום ב־$\left(e^2, \frac{e^4}{2}\right)$. זה גרף III.
הגרף של $f'(x)$**:** עבור $0 < x < e^2$ (פרט לאסימפטוטה) $f'(x) < 0$ – שני הענפים שמשמאל ל־e^2 נמצאים מתחת לציר ה־x (שניהם שואפים ל־$-\infty$ ליד האסימפטוטה). ב־$x = e^2$ הנגזרת מתאפסת, ומימין לה היא חיובית. זה גרף II.
תשובה: $f(x)$ **– גרף III ;** $f'(x)$ **– גרף II.**

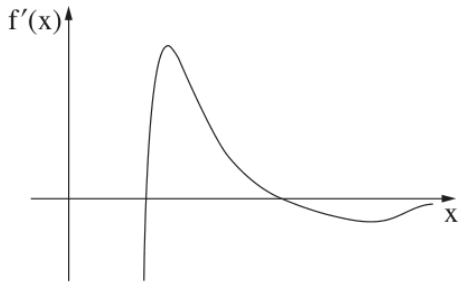
סעיף ד (2)
הנגזרת מתאפסת ב־$x = e^2$ וחיובית עבור $x > e^2$. השטח המוגבל על ידי גרף $f'(x)$, ציר ה־x והישר $x = e^3$ נמצא בין $x = e^2$ ל־$x = e^3$, מעל ציר ה־x:
השטח בין גרף הנגזרת, ציר x והישר x=e^3
הפונקציה הקדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$, לכן:

$$S = \int_{e^2}^{e^3} f'(x)\,dx$$
$$= f\left(e^3\right) - f\left(e^2\right)$$
$$f\left(e^3\right) = \frac{e^6}{-6 + 4 \cdot 3} = \frac{e^6}{6}$$
$$S = \frac{e^6}{6} - \frac{e^4}{2} \approx 39.94$$

תשובה: $S = \frac{e^6}{6} - \frac{e^4}{2} \approx 39.94$ **יח"ר**

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ המוגדרות בתחום $x > 0$.



בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

כל נקודות הקיצון ונקודות החיתוך עם ציר ה־ x של גרף הנגזרת $f'(x)$ מופיעות בסרטוט.

א. לפניכם שני היגדים I–II.

קבעו בעבור כל היגד אם הוא נכון או לא נכון. נמקו את קביעותיכם.

I. לפונקצייה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות קיצון.

II. שיעור ה־ x של נקודת המינימום של הפונקצייה $f(x)$ גדול משיעור ה־ x של נקודת המקסימום שלה.

נתון כי $f(x)=\frac{14(\ell nx)^2}{x^2}$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x-4)$.

ד. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$?

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

פתרון מלא

סעיף א

נקודות הקיצון של $f(x)$ הן הנקודות שבהן $f'(x)=0$ ו־$f'(x)$ מחליפה סימן – כלומר נקודות החיתוך של גרף הנגזרת עם ציר ה־x (ולא נקודות הקיצון של גרף הנגזרת).

בסרטוט גרף $f'(x)$ חותך את ציר ה־x בשתי נקודות. נסמן אותן $x_1 < x_2$:

- ב־x_1 הנגזרת עוברת משלילית לחיובית – $f(x)$ עוברת מירידה לעלייה: נקודת מינימום.
- ב־x_2 הנגזרת עוברת מחיובית לשלילית – $f(x)$ עוברת מעלייה לירידה: נקודת מקסימום.

I. לא נכון – לפונקציה $f(x)$ יש בדיוק שתי נקודות קיצון (שלוש נקודות הקיצון בסרטוט הן של גרף הנגזרת).

II. לא נכון – נקודת המינימום היא ב־x_1 ונקודת המקסימום ב־x_2, ו־$x_1 < x_2$. כלומר שיעור ה־x של המינימום קטן משיעור ה־x של המקסימום.

תשובה: I – לא נכון (יש 2 נקודות קיצון). II – לא נכון (המינימום משמאל למקסימום).

סעיף ב (1)

תחום ההגדרה הוא $x > 0$, לכן אין חיתוך עם ציר ה־y.

חיתוך עם ציר ה־x:

$$\frac{14(\ell n\, x)^2}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; \ell n\, x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$$

תשובה: $(1,\,0)$ בלבד (אין חיתוך עם ציר ה־y).

סעיף ב (2)

נגזור לפי כלל המנה. הנגזרת של $(\ell n\, x)^2$ היא $2\ell n\, x \cdot \frac{1}{x}$:

$$f'(x) = 14 \cdot \frac{2x\, \ell n\, x - 2x(\ell n\, x)^2}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{28\, \ell n\, x\, (1 - \ell n\, x)}{x^3}$$

נשווה לאפס ($x^3 > 0$ בתחום):

$$\ell n\, x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$$

$$1 - \ell n\, x = 0 \;\Rightarrow\; x = e$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$0 < x < 1$	$-$	↘
1	0	מינימום
$1 < x < e$	$+$	↗
e	0	מקסימום
$x > e$	$-$	↘

(למשל $f'(0.5) < 0$, $f'(2) > 0$, $f'(4) < 0$.)

$$f(1) = 0$$

$$f(e) = \frac{14 \cdot 1^2}{e^2} = \frac{14}{e^2} \approx 1.89$$

תשובה: מינימום $(1,\ 0)$**, מקסימום** $\left(e,\ \frac{14}{e^2}\right)$

סעיף ב (3)

לפי טבלת הסימנים בסעיף ב (2):

עלייה: $1 < x < e$.

ירידה: $0 < x < 1$ וגם $x > e$.

(זה מתאים לסרטוט של $f'(x)$: הנגזרת חיובית רק בין שתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה־x.)

תשובה: עולה: $1 < x < e$

יורדת: $0 < x < 1$**,** $x > e$**.**

סעיף ג

נשתמש בסעיפים הקודמים: הפונקציה מוגדרת עבור $x > 0$, אינה שלילית (ריבוע חלקי ריבוע), יורדת עד המינימום $(1, 0)$ שעל ציר ה־x, עולה עד המקסימום $\left(e, \frac{14}{e^2}\right)$ ואחר כך יורדת.

כאשר x מתקרב ל־0 מימין, $f(x)$ שואפת לאינסוף, וכאשר x גדל מאוד $f(x)$ מתקרבת ל־0.

סקיצה של f(x)

תשובה:

סקיצה של f(x)

סעיף ד (1)

$g(x) = f(x-4)$ מוגדרת כאשר הביטוי $x - 4$ נמצא בתחום ההגדרה של f:

$$x - 4 > 0 \;\Rightarrow\; x > 4$$

(גרף g הוא גרף f מוזז 4 יחידות ימינה.)

תשובה: $x > 4$

סעיף ד (2)

גרף $g(x)$ מתקבל מגרף $f(x)$ על ידי הזזה של 4 יחידות ימינה. הזזה אופקית לא משנה את סוג נקודות הקיצון ולא את שיעורי ה־y שלהן – רק מוסיפה 4 לשיעורי ה־x:

$$(1,0) \;\rightarrow\; (5,0)$$
$$\left(e, \tfrac{14}{e^2}\right) \;\rightarrow\; \left(e+4, \tfrac{14}{e^2}\right)$$

תשובה: מינימום $(5,\ 0)$**, מקסימום** $\left(e+4,\ \frac{14}{e^2}\right)$

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = ax \cdot (2 - \ell nx)$, a הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

נתון כי בנקודה שבה $x = e^3$, שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ הוא -8 .

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 4$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ד.

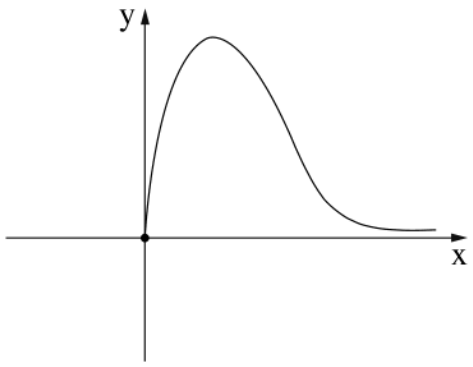
ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

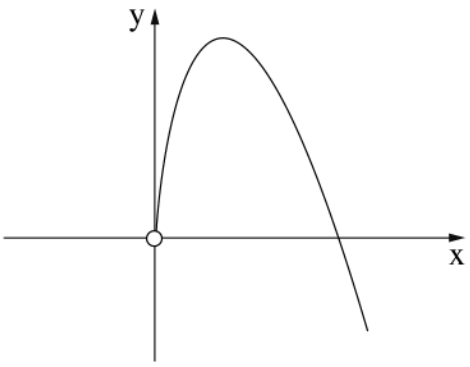
נתונה הפונקצייה $g(x) = -2f(x) + 37$.

ד. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

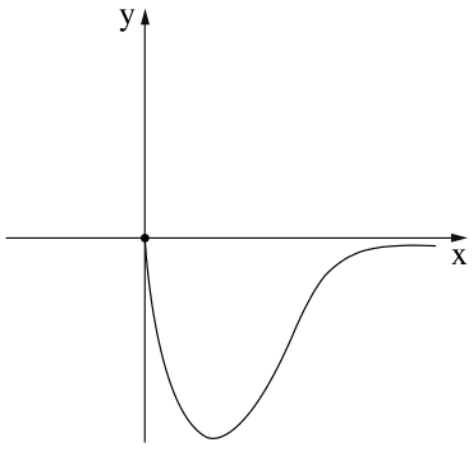
(2) האם גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את גרף הפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.



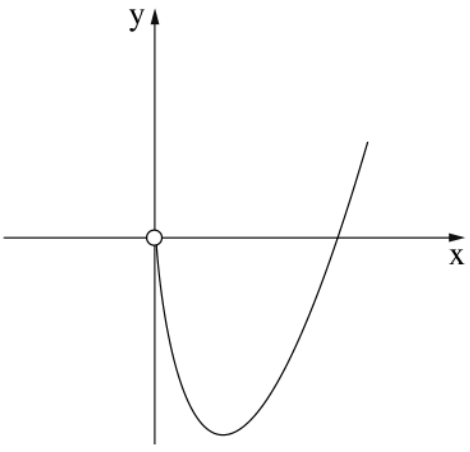
I



II



III



IV

פתרון מלא

סעיף א (1)

הביטוי $\ell n\, x$ מוגדר רק עבור $x > 0$ (ושאר הביטויים מוגדרים לכל x).

תשובה: $x > 0$

סעיף א (2)

חיתוך עם ציר ה־x: $f(x) = 0$.

$$ax\,(2 - \ell n\, x) = 0$$

$a \neq 0$, ו־$x = 0$ לא בתחום ההגדרה, לכן:

$$2 - \ell n\, x = 0 \;\Rightarrow\; \ell n\, x = 2 \;\Rightarrow\; x = e^2$$

תשובה: $(e^2,\, 0)$

סעיף ב

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = a(2 - \ell n\, x) + ax \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 2a - a\,\ell n\, x - a = a(1 - \ell n\, x)$$

שיפוע המשיק בנקודה $x = e^3$ הוא -8:

$$f'(e^3) = a(1 - 3)$$

$$= -2a = -8 \;\Rightarrow\; a = 4$$

תשובה: $a = 4$

סעיף ג (1)

עם $a = 4$: $f(x) = 4x(2 - \ell n\, x)$, $f'(x) = 4(1 - \ell n\, x)$.

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ell n\, x = 1 \;\Rightarrow\; x = e$$

x	$0 < x < e$	e	$x > e$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	מקסימום	↘

(למשל $f'(1) = 4 > 0$, $f'(e^2) = -4 < 0$.)

$$f(e) = 4e\,(2 - 1) = 4e \approx 10.87$$

תשובה: $\max(e,\, 4e)$

סעיף ג (2)

נבדוק את התכונות שמצאנו:

• לפונקציה יש מקסימום אחד (ואין מינימום) – גרפים III ו־IV נפסלים (יש בהם מינימום).

• הגרף חותך את ציר ה־x ב־$x = e^2$, ואחרי נקודת המקסימום הוא יורד ועובר לערכים שליליים (למשל $f(e^3) = 4e^3(2 - 3) < 0$) – גרף I נפסל, כי בו הגרף נשאר מעל ציר ה־x ואינו חותך אותו.

• $x = 0$ לא בתחום ההגדרה – בגרף II יש עיגול ריק בראשית.

תשובה: גרף II.

סעיף ד (1)

$g(x) = -2f(x) + 37$, לכן:

$$g'(x) = -2f'(x)$$

$g'(x) = 0$ בדיוק כאשר $f'(x) = 0$, כלומר ב־$x = e$. הכפלה ב־-2 הופכת את הסימן: לפני $x = e$ $g'(x) < 0$ ואחריו $g'(x) > 0$, ולכן זו נקודת מינימום.

$$g(e) = -2 \cdot 4e + 37$$
$$= 37 - 8e \approx 15.25$$

תשובה: $\min(e,\ 37 - 8e)$

סעיף ד (2)

נקודת חיתוך מקיימת $f(x) = g(x)$:

$$f(x) = -2f(x) + 37 \ \Rightarrow \ 3f(x) = 37$$
$$\Rightarrow \ f(x) = \frac{37}{3} \approx 12.33$$

אבל הערך הגדול ביותר של $f(x)$ הוא ערך המקסימום $4e \approx 10.87$, שקטן מ־12.33. לכן אין x שבו $f(x) = \frac{37}{3}$.

(אפשר גם כך: ערך המינימום של g הוא $37 - 8e \approx 15.25$, והוא גדול מהערך המקסימלי של f, לכן הגרף של g תמיד מעל הגרף של f.)

תשובה: לא – $f(x) \le 4e < \frac{37}{3}$, לכן אין פתרון ל־$f(x) = g(x)$.

בגרות קיץ תשפ״ה (2025) – מועד ב׳ • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^2 \cdot (-2 + \ell nx)$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ד. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקצייה $g(x) = a \cdot f(x)$. a הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

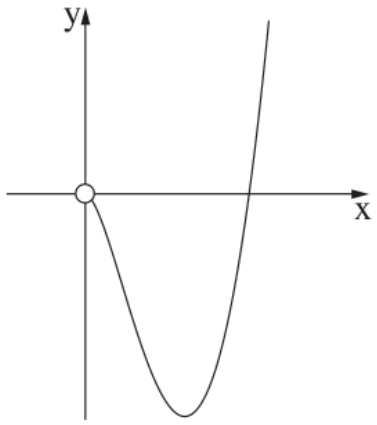
הפונקציות $g(x)$ ו־ $f(x)$ מוגדרות באותו התחום.

נתון כי שיעור ה־ y של נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ הוא $0.6 \cdot e^3$.

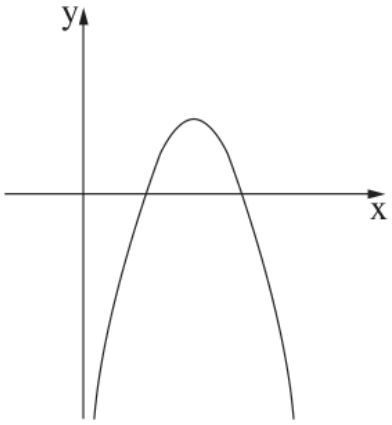
ה. **(1)** מצאו את הערך של a .

(2) מהו סוג נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

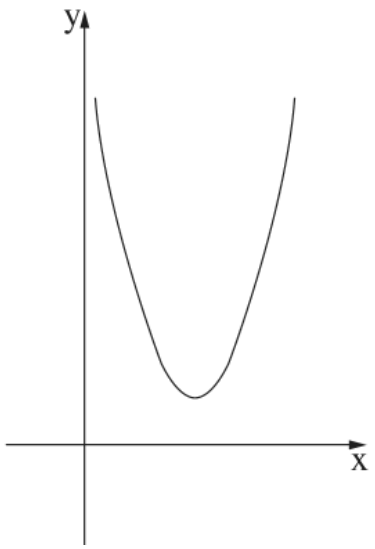
(3) קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

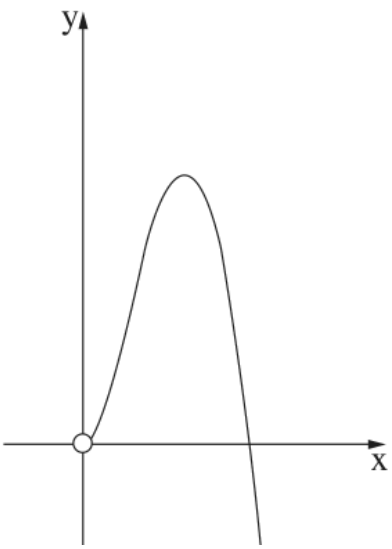


I



II





IV		III

פתרון מלא

סעיף א

הביטוי $\ell n\, x$ מוגדר רק עבור מספרים חיוביים:

$$x > 0$$

תשובה: $x > 0$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y: $x = 0$ אינו בתחום ההגדרה, לכן אין חיתוך עם ציר ה־y.

חיתוך עם ציר ה־x:

$$x^2(-2 + \ell n\, x) = 0$$

$x^2 \neq 0$ בתחום, לכן:

$$-2 + \ell n\, x = 0 \;\Rightarrow\; \ell n\, x = 2$$
$$\Rightarrow\; x = e^2$$

תשובה: $(e^2,\, 0)$ **בלבד**

סעיף ג

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = 2x(-2 + \ell n\, x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = -4x + 2x\, \ell n\, x + x$$
$$= x(2\ell n\, x - 3)$$

נשווה לאפס ($x > 0$):

$$2\ell n\, x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow\; \ell n\, x = 1.5 \;\Rightarrow\; x = e^{1.5}$$
$$\approx 4.48$$

x	$0 < x < e^{1.5}$	$e^{1.5}$	$x > e^{1.5}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	מינימום	↗

(למשל $f'(1) = -3 < 0$, $f'(e^2) = e^2 > 0$.)

$$f(e^{1.5}) = e^3(-2 + 1.5)$$
$$= -\frac{1}{2}e^3 \approx -10.04$$

תשובה: $\left(e^{1.5},\, -\frac{1}{2}e^3\right)$ **– מינימום**

סעיף ד

נבדוק את התכונות שמצאנו:

- תחום $x > 0$ ונקודת חיתוך אחת עם ציר ה־x ($x = e^2$).
- הפונקציה יורדת עד נקודת מינימום ואחר כך עולה.
- כאשר x מתקרב ל־0 מימין, $f(x)$ מתקרבת ל־0 (כי $x^2 \to 0$), ולכן הגרף מתחיל ליד ראשית הצירים (נקודה ריקה, כי $x = 0$ לא בתחום).

גרף I מתאים לכל התכונות. גרף III לא חותך את ציר ה־x, ובגרפים II ו־IV יש מקסימום ולא מינימום.

תשובה: גרף I

סעיף ה (1)

$g(x) = a \cdot f(x)$, לכן $g'(x) = a \cdot f'(x)$, ונקודת הקיצון של g היא באותו x: $x = e^{1.5}$.

$$g(e^{1.5}) = a \cdot f(e^{1.5})$$
$$= a \cdot \left(-\frac{1}{2}e^3\right)$$
$$-\frac{1}{2}e^3 \cdot a = 0.6e^3 \;\Rightarrow\; a = -1.2$$

תשובה: $a = -1.2$

סעיף ה (2)

$g(x) = -1.2 \cdot f(x)$: הכפלה במספר שלילי הופכת את הגרף (שיקוף ביחס לציר ה־x ומתיחה).

לכן $g'(x) = -1.2f'(x)$ – הסימנים של הנגזרת מתהפכים: g עולה כאשר f יורדת ויורדת כאשר f עולה. נקודת המינימום של f הופכת לנקודת מקסימום של g.

(וגם: $0.6e^3 > 0$, נקודה מעל ציר ה־x.)

תשובה: נקודת מקסימום

סעיף ה (3)

לגרף של $g(x)$ יש אותו תחום ($x > 0$), אותה נקודת חיתוך עם ציר ה־x ($x = e^2$, כי $g = 0$ בדיוק כאשר $f = 0$), נקודת מקסימום, וכאשר $x \to 0^+$ גם $g(x) \to 0$ (מתחיל בנקודה ריקה בראשית).

גרף IV מתאים. בגרף II הפונקציה שואפת למינוס אינסוף ליד $x = 0$, ולכן הוא לא מתאים.

תשובה: גרף IV

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 5

5. הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות בתחום $x > 0$.

לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת מינימום אחת בלבד ונקודת מקסימום אחת בלבד.

נתון כי נקודת המינימום נמצאת מימין לנקודת המקסימום.

א. אחד מן הגרפים $I-IV$ שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

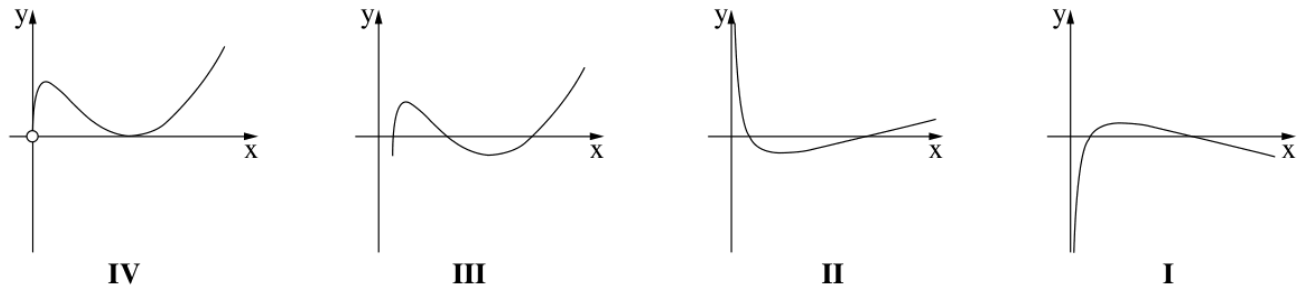
נתון כי $f(x) = 3x \cdot (\ell nx)^2$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. קבעו איזה מן הגרפים $I-IV$ שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

ד. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־ x.



פתרון מלא

סעיף א

לפונקציה מקסימום אחד ומינימום אחד, והמינימום מימין למקסימום. לכן הנגזרת מתאפסת בשתי נקודות ומשנה בהן סימן, ומשמאל לימין סדר הסימנים של $f'(x)$ הוא:

$$+ \quad - \quad +$$

(עלייה עד המקסימום, ירידה עד המינימום, ואז עלייה.)

• גרף II: חיובי, אחר כך שלילי, ואחר כך חיובי – מתאים.

• גרף I: הסדר $-, +, -$ – מתאים למינימום משמאל למקסימום.

• גרף III: הגרף חותך את ציר ה־x שלוש פעמים – היו שלוש נקודות קיצון.

• גרף IV: הגרף רק משיק לציר ה־x ולא משנה סימן – לא הייתה אף נקודת קיצון.

תשובה: גרף II.

סעיף ב (1)

חיתוך עם ציר ה־y: $x = 0$ אינו בתחום $(x > 0)$, לכן אין.

חיתוך עם ציר ה־x:

$$3x\,(\ell n\,x)^2 = 0$$

$x \neq 0$, לכן $(\ell n\,x)^2 = 0$, כלומר $\ell n\,x = 0$ ו־$x = 1$.

תשובה: $(1, 0)$; אין חיתוך עם ציר ה־y.

סעיף ב (2)

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = 3(\ell n\, x)^2 + 3x \cdot 2\,\ell n\, x \cdot \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = 3(\ell n\, x)^2 + 6\,\ell n\, x$$
$$= 3\,\ell n\, x\,(\ell n\, x + 2)$$

$f'(x) = 0$: $\ell n\, x = 0 \Rightarrow x = 1$, או $\ell n\, x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$0 < x < e^{-2}$	$+$	↗
e^{-2}	0	מקסימום
$e^{-2} < x < 1$	$-$	↘
1	0	מינימום
$x > 1$	$+$	↗

$$f(e^{-2}) = 3e^{-2} \cdot (-2)^2 = \frac{12}{e^2}$$
$$\approx 1.62, \qquad f(1) = 0$$

תשובה: $\max\left(e^{-2},\ \frac{12}{e^2}\right)$, $\min(1, 0)$

סעיף ג

הגרף של $f(x)$ צריך להיות: מוגדר רק עבור $x > 0$ (עיגול ריק בראשית), עולה עד מקסימום ב־$x = e^{-2}$ (קרוב לציר ה־y), יורד עד מינימום ב־$(1, 0)$ – כלומר נוגע בציר ה־x – ואחר כך עולה. בנוסף $f(x) \geq 0$ לכל x בתחום.

גרף IV מתאים לכל התכונות. (גרף III יורד מתחת לציר ה־x, וגרפים I ו־II אינם מתאימים לסדר עלייה–ירידה–עלייה.)

תשובה: גרף IV.

סעיף ד

גרף הנגזרת חותך את ציר ה־x ב־$x = e^{-2}$ וב־$x = 1$, וביניהן $f'(x) < 0$ (הגרף מתחת לציר).

גרף f'(x) והשטח בין x=e^-2 ל־x=1 מתחת לציר x

הפונקציה הקדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$, לכן:

$$S = -\int_{e^{-2}}^{1} f'(x)\,dx$$
$$= -\left[f(1) - f(e^{-2})\right]$$
$$S = -\left(0 - \frac{12}{e^2}\right) = \frac{12}{e^2} \approx 1.624$$

תשובה: $\frac{12}{e^2} \approx 1.624$ **יחידות שטח**

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{12x}{(\ell nx)^2}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה האנכית לציר ה־ x של הפונקצייה $f(x)$.

(3) האם לגרף הפונקצייה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים? נמקו את תשובתכם.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה של הפונקצייה $f(x)$.

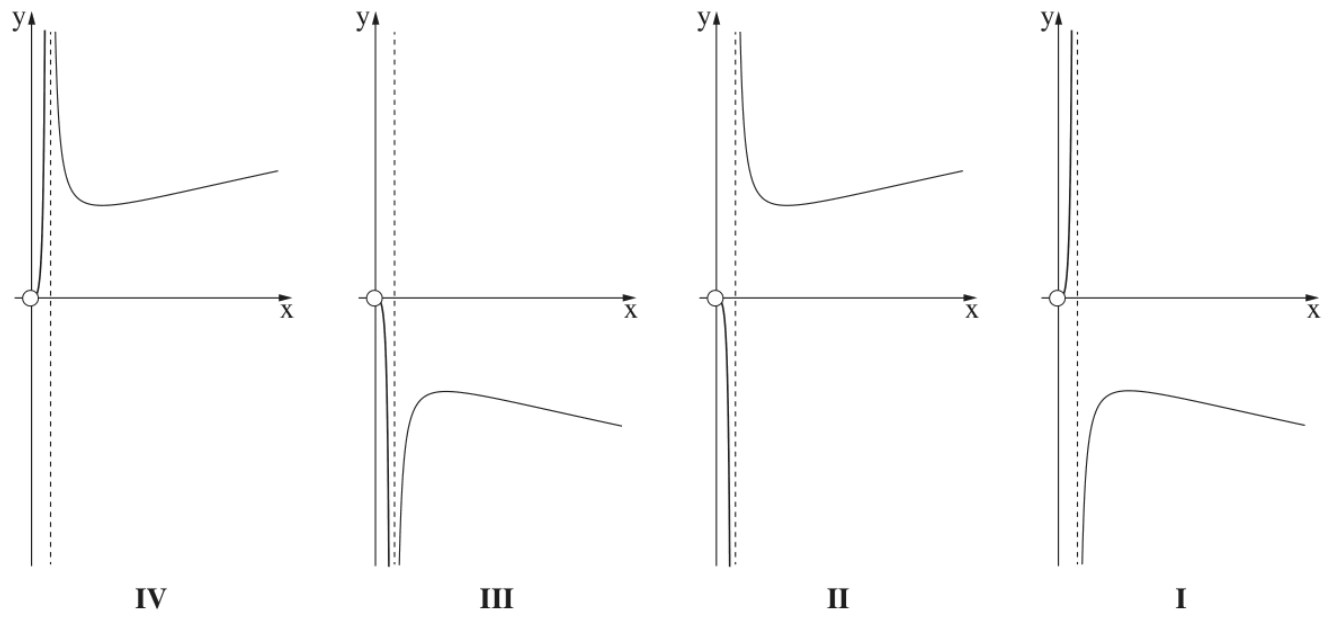
ג. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נגזרת הפונקצייה $g(x)$ מקיימת $g'(x)=f(x)-c$, c הוא פרמטר.

ד. **(1)** מצאו בעבור $c=4$ כמה נקודות קיצון יש לפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן (אם יש כאלה).
נמקו את תשובתכם.

(2) רשמו ערך כלשהו של c שבעבורו יש לפונקצייה $g(x)$ שלוש נקודות קיצון. נמקו את תשובתכם.



פתרון מלא

סעיף א (1)

שני תנאים: $\ell n\,x$ מוגדר רק עבור $x>0$, והמכנה $(\ell n\,x)^2$ לא יכול להתאפס:

$$(\ell n\,x)^2\neq 0 \;\Rightarrow\; \ell n\,x\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 1$$

תשובה: $x>0$, $x\neq 1$

סעיף א (2)

ב־$x=1$ המכנה מתאפס והמונה $12\cdot 1=12\neq 0$, לכן הישר $x=1$ הוא אסימפטוטה אנכית.

תשובה: $x=1$

סעיף א (3)

חיתוך עם ציר ה־y: $x=0$ אינו בתחום ההגדרה – אין.

חיתוך עם ציר ה־x: צריך $12x = 0$, כלומר $x = 0$ – גם הוא לא בתחום. לכן אין לגרף נקודות חיתוך עם הצירים.

תשובה: לא – $x = 0$ אינו בתחום ההגדרה, והמונה מתאפס רק ב־$x = 0$.

סעיף ב (1)

נגזור לפי כלל המנה. הנגזרת של $(\ell n\, x)^2$ היא $2\ell n\, x \cdot \frac{1}{x}$:

$$f'(x) = \frac{12(\ell n\, x)^2 - 12x \cdot 2\ell n\, x \cdot \frac{1}{x}}{(\ell n\, x)^4}$$

$$f'(x) = \frac{12\ell n\, x\,(\ell n\, x - 2)}{(\ell n\, x)^4}$$

$$f'(x) = \frac{12(\ell n\, x - 2)}{(\ell n\, x)^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ell n\, x = 2 \;\Rightarrow\; x = e^2$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$0 < x < 1$	$+$	↗
1	לא מוגדרת	אסימפטוטה
$-1 < x < e^2$		↘
e^2	0	מינימום
$x > e^2$	$+$	↗

(למשל $f'(0.5) > 0$, $f'(2) < 0$, $f'(10) > 0$.)

$$f(e^2) = \frac{12e^2}{2^2} = 3e^2 \approx 22.17$$

תשובה: $(e^2,\ 3e^2)$ – נקודת מינימום

סעיף ב (2)

לפי טבלת הסימנים בסעיף ב (1), $f'(x) > 0$ ב־$0 < x < 1$ וב־$x > e^2$.

תשובה: $0 < x < 1$, $x > e^2$

סעיף ג

נבדוק את התכונות שמצאנו:

- משמאל לאסימפטוטה ($0 < x < 1$) הפונקציה עולה וחיובית (מונה ומכנה חיוביים) – הגרף עולה מהנקודה הריקה בראשית אל האסימפטוטה.
- מימין לאסימפטוטה הפונקציה חיובית, יורדת עד מינימום ואחר כך עולה.

בגרפים I ו־III יש מקסימום ולא מינימום מימין לאסימפטוטה, ובגרף II הפונקציה שלילית ויורדת משמאל לאסימפטוטה. רק גרף IV מתאים.

תשובה: גרף IV

סעיף ד (1)

עבור $c = 4$: $g'(x) = f(x) - 4$. לנקודת קיצון של g צריך $g'(x) = 0$ עם החלפת סימן, כלומר נקודה שבה הגרף של f חוצה את הישר $y = 4$.

- בתחום $x > 1$: הערך הקטן ביותר של f הוא $3e^2 \approx 22.17 > 4$, ולכן $f(x) - 4 > 0$ – אין פתרון.

- בתחום $0 < x < 1$: f עולה מערכים קרובים ל־0 אל אינסוף, ולכן חוצה את $y = 4$ פעם אחת בדיוק. לפני נקודה זו $f(x) < 4$ (g' יורדת) ואחריה $f(x) > 4$ (g' עולה).

לכן יש ל־g נקודת קיצון אחת, והיא נקודת מינימום.

תשובה: נקודת קיצון אחת – מינימום.

סעיף ד (2)

נקודות הקיצון של g הן נקודות שבהן הגרף של f חוצה את הישר האופקי $y = c$. כדי לקבל שלוש נקודות חיתוך:

- בתחום $0 < x < 1$ הישר חותך את גרף f פעם אחת לכל $c > 0$.
- בתחום $x > 1$ הוא חותך פעמיים אם הוא מעל נקודת המינימום, כלומר $c > 3e^2$ (פעם בירידה ופעם בעלייה).

לדוגמה $c = 30$ (כי $30 > 3e^2 \approx 22.17$): שלוש נקודות חיתוך, ובכל אחת g' מחליפה סימן – שלוש נקודות קיצון.

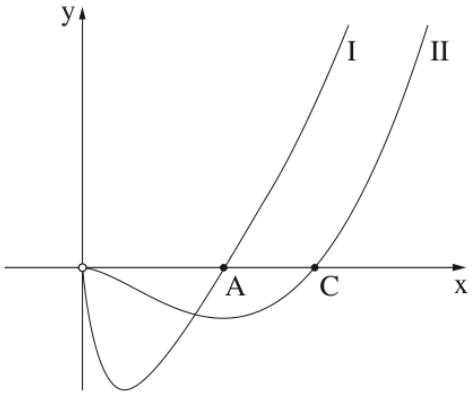
(עבור $c = 3e^2$ בדיוק הישר משיק בנקודת המינימום ו־g' לא מחליפה שם סימן.)

תשובה: למשל $c = 30$ (כל $c > 3e^2$ מתאים).

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 5

5. בסרטוט שלפניכם מתוארים שני גרפים, I ו־ II .

אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$, והאחר מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



א. קבעו איזה מן הגרפים I , II מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
נמקו את קביעתכם.

נתון: $f(x)=x^2\cdot(2\ell n(x)-1)$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$,
וקבעו את סוגה על פי הגרף.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף I עם ציר ה־ x ,
והנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף II עם ציר ה־ x .

ג. מצאו את אורך הקטע AC .

דרך הנקודה C העבירו ישר המקביל לציר ה־ y .

ד. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף I , על ידי הישר המקביל לציר ה־ y ועל ידי ציר ה־ x (השטח שברביע הראשון).

פתרון מלא

סעיף א

בנקודת קיצון של $f(x)$ הנגזרת מתאפסת, כלומר גרף הנגזרת חותך שם את ציר ה־x.

גרף I חותך את ציר ה־x בנקודה A, ובדיוק מעל A נמצאת נקודת המינימום של גרף II. בנוסף: משמאל ל־A גרף I שלילי וגרף II יורד, ומימין ל־A גרף I חיובי וגרף II עולה.

לעומת זאת, אם II היה גרף הנגזרת, היה צריך להיות לגרף I קיצון מעל C – אבל שם גרף I רק עולה.

תשובה: גרף I מתאר את $f'(x)$.

סעיף ב (1)

$\ell n(x)$ מוגדר רק עבור $x>0$:

תשובה: $x>0$

סעיף ב (2)

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x)=2x\,(2\ell n\,x-1)+x^2\cdot\frac{2}{x}$$

$$f'(x)=4x\,\ell n\,x-2x+2x=4x\,\ell n\,x$$

$f'(x)=0$: $x>0$, לכן $\ell n\,x=0$, כלומר $x=1$.

$$f(1)=1^2\cdot(2\cdot 0-1)=-1$$

לפי גרף II (גרף הפונקציה) זו נקודת מינימום. (גם לפי הנגזרת: $f'(x)<0$ עבור $0<x<1$ ו־$f'(x)>0$ עבור $x>1$.)

תשובה: $\min(1,\,-1)$

סעיף ג

A – נקודת החיתוך של גרף I (הנגזרת) עם ציר ה־x: $f'(x)=0$, כלומר $x=1$. לכן $A(1,0)$.

C – נקודת החיתוך של גרף II (הפונקציה) עם ציר ה־x:

$$x^2(2\ell n\,x-1)=0$$

$x>0$, לכן $2\ell n\,x-1=0$:

$$\ell n\,x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$
$$AC=\sqrt{e}-1\approx 0.649$$

תשובה: $AC=\sqrt{e}-1\approx 0.649$

סעיף ד

השטח ברביע הראשון חסום בין גרף I ($f'(x)$, שחיובי עבור $x>1$), ציר ה־x והישר $x=\sqrt{e}$, כלומר בין $x=1$ ל־$x=\sqrt{e}$.

גרף I (הנגזרת) וגרף II, והשטח בין x=1 ל־x=√e

הפונקציה הקדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$:

$$S=\int_1^{\sqrt{e}} f'(x)\,dx=f(\sqrt{e})-f(1)$$
$$S=0-(-1)=1$$

תשובה: 1 יחידת שטח

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = ax \cdot \ell n(2x)$, a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \frac{e}{2}$ הוא 6 .

ב. מצאו את a .

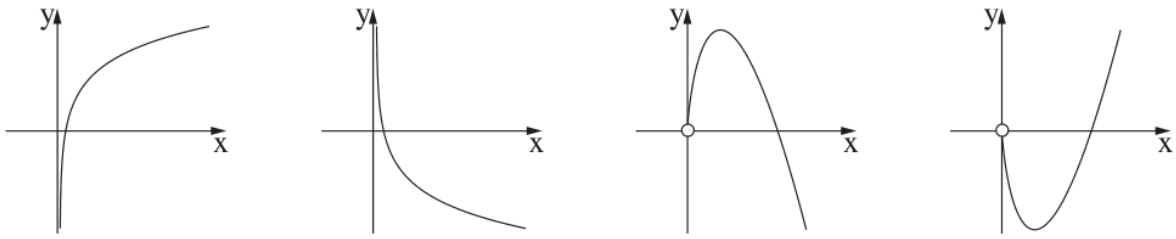
הציבו $a = 3$ בפונקצייה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג–ו.

ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ה. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$, ואיזה מהם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמקו את קביעותיכם.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x = e$ ועל ידי ציר ה־ x .



I II III IV

פתרון מלא

סעיף א

$\ell n(2x)$ מוגדר כאשר $2x > 0$:

$x > 0$

תשובה: $x > 0$

סעיף ב

נגזור לפי כלל המכפלה (הנגזרת של $\ell n(2x)$ היא $\frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$):

$$f'(x) = a \cdot \ell n(2x) + ax \cdot \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = a\left(\ell n(2x) + 1\right)$$

שיפוע המשיק ב־$x = \frac{e}{2}$ הוא 6:

$$f'\left(\tfrac{e}{2}\right) = a(\ell n\, e + 1) = 2a$$
$$2a = 6 \;\Rightarrow\; a = 3$$

תשובה: $a = 3$

סעיף ג

$f(x) = 3x\,\ell n(2x)$. בתחום $x > 0$ הגורם $3x$ לא מתאפס, לכן:

$$\ell n(2x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}$$

תשובה: $\left(\frac{1}{2},\, 0\right)$

סעיף ד

$$f'(x) = 3\left(\ell n(2x) + 1\right) = 0$$
$$\ell n(2x) = -1$$
$$\Rightarrow\; 2x = e^{-1} \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2e}$$

x	$0 < x < \frac{1}{2e}$	$\frac{1}{2e}$	$x > \frac{1}{2e}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	מינימום	↗

(למשל $f'(0.1) = 3(\ell n\, 0.2 + 1) < 0$, $f'(1) = 3(\ell n\, 2 + 1) > 0$.)

$$f\left(\tfrac{1}{2e}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2e} \cdot \ell n\, \frac{1}{e} = -\frac{3}{2e}$$
$$\approx -0.55$$

תשובה: $\left(\frac{1}{2e},\, -\frac{3}{2e}\right)$ **– מינימום**

סעיף ה

הפונקציה $f(x)$**:** תחום $x > 0$, יורדת עד מינימום ואחר כך עולה, חותכת את ציר ה־x ב־$x = \frac{1}{2}$, וליד $x = 0$ מתקרבת ל־0 (נקודה ריקה בראשית). זה גרף I.

הנגזרת $f'(x) = 3\ell n(2x) + 3$**:** פונקציה לוגריתמית עולה – שלילית משמאל ל־$x = \frac{1}{2e}$ וחיובית מימין, ושואפת למינוס אינסוף ליד $x = 0$. זה גרף IV.

(גרף II מתאים לפונקציה עם מקסימום, וגרף III לפונקציה יורדת – לא f ולא f'.)

תשובה: $f(x)$ **– גרף I;** $f'(x)$ **– גרף IV.**

סעיף ו

גרף הנגזרת חותך את ציר ה־x ב־$x = \frac{1}{2e}$ (סעיף ד), ובין $x = \frac{1}{2e}$ ל־$x = e$ הוא מעל ציר ה־x. פונקציה קדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$:

$$S = \int_{\frac{1}{2e}}^{e} f'(x)\, dx$$
$$= f(e) - f\left(\tfrac{1}{2e}\right)$$
$$f(e) = 3e\, \ell n(2e) \approx 13.81$$
$$S = 3e\, \ell n(2e) + \frac{3}{2e} \approx 13.81 + 0.55$$
$$\approx 14.36$$

תשובה: $S = 3e\, \ell n(2e) + \frac{3}{2e} \approx 14.36$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{3x^2}{2\ell n(x)+1}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) האם גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x? נמקו את תשובתכם.

(3) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה־ x של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

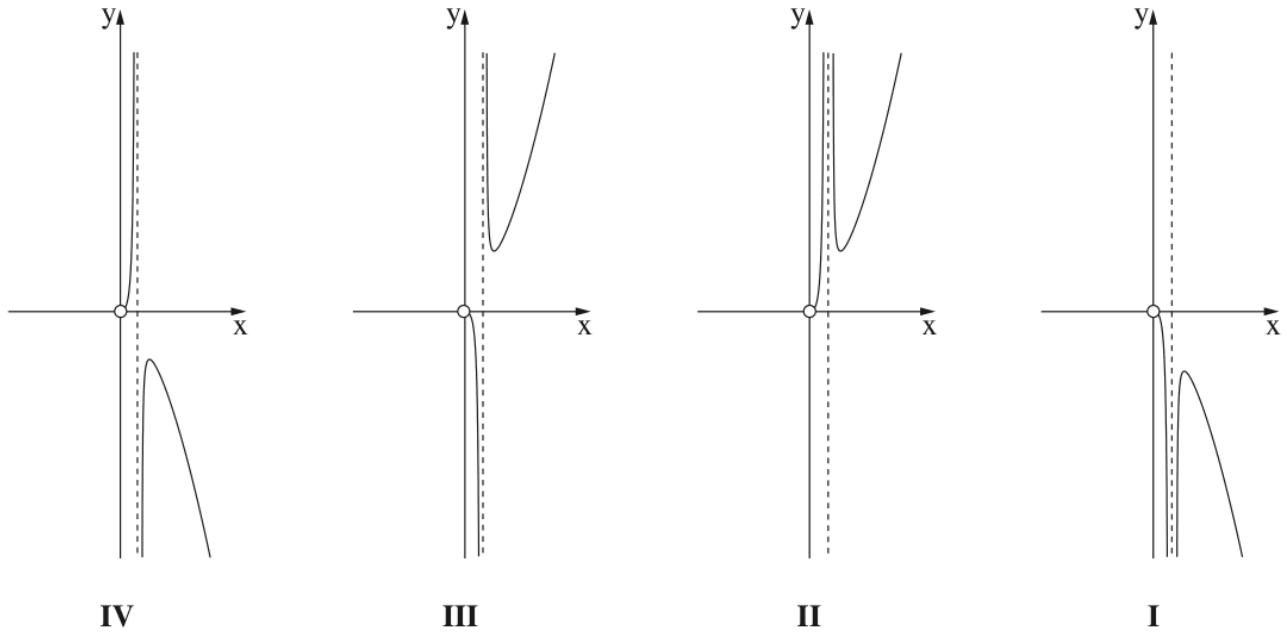
ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. קבעו איזה מן הגרפים $I-IV$ שבסוף השאלה הוא גרף הפונקצייה $f(x)$.

הישר $y=t$ משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. האם הישר $y=t-5$ חותך את גרף הפונקצייה $f(x)$?

אם כן – מצאו בכמה נקודות הוא חותך. אם לא – נמקו.



פתרון מלא

סעיף א (1)

שני תנאים: $\ell n(x)$ מוגדר רק עבור $x>0$, והמכנה לא יכול להיות 0:

$$2\ell n\,x+1\neq 0 \;\Rightarrow\; \ell n\,x\neq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\; x\neq e^{-\frac{1}{2}}$$

תשובה: $x>0$, $x\neq e^{-\frac{1}{2}}$

סעיף א (2)

$f(x)=0$ רק כאשר המונה מתאפס: $3x^2=0$, כלומר $x=0$. אבל $x=0$ אינו בתחום ההגדרה ($x>0$). לכן הגרף אינו חותך את ציר ה־x.

תשובה: לא – המונה מתאפס רק ב־$x=0$, שאינו בתחום.

סעיף א (3)

המכנה מתאפס ב־$x = e^{-\frac{1}{2}}$, והמונה שם שונה מאפס ($3e^{-1} \neq 0$), לכן זו אסימפטוטה אנכית.

תשובה: $x = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.61$

סעיף ב

נגזור לפי נגזרת של מנה:

$$f'(x) = \frac{6x\left(2\ell n\, x + 1\right) - 3x^2 \cdot \frac{2}{x}}{(2\ell n\, x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x\,\ell n\, x + 6x - 6x}{(2\ell n\, x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x\,\ell n\, x}{(2\ell n\, x + 1)^2}$$

$f'(x) = 0$: $x > 0$, לכן $\ell n\, x = 0$, כלומר $x = 1$.

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 0 + 1} = 3$$

המכנה של $f'(x)$ חיובי, ו־$12x > 0$, לכן הסימן של $f'(x)$ הוא הסימן של $\ell n\, x$: שלילי עבור $x < 1$ וחיובי עבור $x > 1$ – נקודת מינימום.

תשובה: $\min(1,\ 3)$

סעיף ג

x	$f'(x)$	$f(x)$
$0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$	$-$	↘
$e^{-\frac{1}{2}} < x < 1$	$-$	↘
1	0	מינימום
$x > 1$	$+$	↗

תשובה: עלייה: $x > 1$

ירידה: $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ **וגם** $e^{-\frac{1}{2}} < x < 1$**.**

סעיף ד

נבדוק את הסימן של $f(x)$ משמאל לאסימפטוטה: עבור $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ מתקיים $\ell n\, x < -\frac{1}{2}$, לכן המכנה $2\ell n\, x + 1$ שלילי והמונה חיובי – $f(x) < 0$. בנוסף הפונקציה יורדת שם (סעיף ג).

מימין לאסימפטוטה $f(x) > 0$, הפונקציה יורדת עד המינימום $(1, 3)$ ואחר כך עולה.

גרף III מתאים: הענף השמאלי יורד מתחת לציר ה־x (עיגול ריק בראשית), והענף הימני מעל ציר ה־x עם מינימום. (בגרף I הענף הימני מתחת לציר, בגרף II הענף השמאלי עולה, ובגרף IV הענף הימני שלילי.)

תשובה: גרף III.

סעיף ה

ישר מהצורה $y = t$ הוא ישר אופקי. ישר אופקי משיק לגרף בנקודת הקיצון, כלומר בנקודת המינימום $(1, 3)$. לכן $t = 3$, והישר $y = t - 5$ הוא:

$$y = 3 - 5 = -2$$

לפי הגרף (סעיף ד): מימין לאסימפטוטה $f(x) \geq 3$, ולכן הישר $y = -2$ לא פוגש שם את הגרף. משמאל לאסימפטוטה הפונקציה יורדת מערכים הקרובים ל־0 (ליד הראשית) עד $-\infty$, ולכן מקבלת את הערך -2 פעם אחת בדיוק.

גרף f(x) והישר y=-2 שחותך את הענף השמאלי בנקודה אחת

(אין צורך למצוא את נקודת החיתוך עצמה – המשוואה אינה נפתרת אלגברית, ופתרון מקורב במחשבון אינו דרך מותרת.)

תשובה: כן, בנקודה אחת.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{(\ell nx)^2}{4x}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקצייה $g(x)=-f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

נסמן ב־ S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי הישר המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.

ה. **(1)** מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.

(2) מצאו ערך של c שבעבורו השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי הישר $y=c$ שווה ל־ S.

נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

$\ell n\,x$ מוגדר רק עבור $x>0$, והמכנה $4x$ שונה מאפס בתחום זה:

$$x>0$$

תשובה: $x>0$

סעיף ב

$x=0$ לא בתחום, לכן אין חיתוך עם ציר ה־y. חיתוך עם ציר ה־x:

$$\frac{(\ell n\,x)^2}{4x}=0\ \Rightarrow\ \ell n\,x=0\ \Rightarrow\ x=1$$

תשובה: $(1,\,0)$

סעיף ג

נגזור לפי כלל המנה:

$$f'(x)=\frac{2\ell n\,x\cdot\frac{1}{x}\cdot 4x-(\ell n\,x)^2\cdot 4}{16x^2}$$
$$f'(x)=\frac{4\ell n\,x\,(2-\ell n\,x)}{16x^2}$$
$$f'(x)=\frac{\ell n\,x\,(2-\ell n\,x)}{4x^2}$$

נשווה לאפס:

$$\ell n\,x=0\ \Rightarrow\ x=1$$
$$\ell n\,x=2\ \Rightarrow\ x=e^2$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$0<x<1$	$-$	↘

1	0	מינימום
$+1 < x < e^2$		↗
e^2	0	מקסימום
$x > e^2$		↘

(למשל $f'(0.5) < 0$, $f'(2) > 0$, $f'(8) < 0$.)

$$f(1) = 0 \qquad f(e^2) = \frac{2^2}{4e^2} = \frac{1}{e^2}$$

תשובה: מינימום $(1,\ 0)$**, מקסימום** $\left(e^2,\ \frac{1}{e^2}\right)$

סעיף ד

$g(x) = -f(x)$, לכן הגרף של g הוא שיקוף של גרף f ביחס לציר ה־x: המינימום $(1, 0)$ של f הוא מקסימום של g, והמקסימום $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$ של f הופך למינימום $\left(e^2, -\frac{1}{e^2}\right)$ של g.

כאשר $x \to 0^+$, $f(x) \to \infty$ (ו־$g(x) \to -\infty$), וכאשר $x \to \infty$ שני הגרפים מתקרבים לציר ה־x.

הגרפים של f(x) ו-g(x)

תשובה:

הגרפים של f(x) ו-g(x)

סעיף ה (1)

בנקודת המקסימום $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$ שיפוע המשיק הוא $f'(e^2) = 0$, ולכן המשיק מקביל לציר ה־x:

$$y = \frac{1}{e^2}$$

תשובה: $y = \frac{1}{e^2}$

סעיף ה (2)

הגרף של g הוא שיקוף של גרף f ביחס לציר ה־x. בשיקוף הזה הישר $y = \frac{1}{e^2}$ עובר לישר $y = -\frac{1}{e^2}$, והשטח S שבין גרף f למשיק עובר לשטח שבין גרף g לישר $y = -\frac{1}{e^2}$ – שטח שווה (שיקוף לא משנה שטחים).

(הישר $y = -\frac{1}{e^2}$ הוא המשיק לגרף g בנקודת המינימום שלו.)

תשובה: $c = -\frac{1}{e^2}$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 5

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = (2 + \ell nx) \cdot (-4 + \ell nx)$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

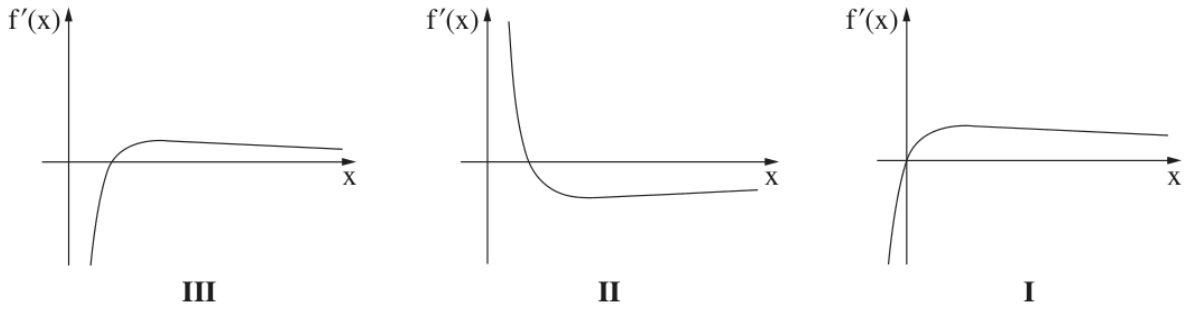
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. **(1)** אחד מן הגרפים I-III שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

על ידי הישר $x = \sqrt{e}$ ועל ידי ציר ה־x.



פתרון מלא

סעיף א

$\ell n\, x$ מוגדר רק עבור $x > 0$, ולכן:

$$x > 0$$

תשובה: $x > 0$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y: $x = 0$ אינו בתחום ההגדרה, לכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה־y.

חיתוך עם ציר ה־x: נשווה את $f(x)$ ל־0. מכפלה שווה ל־0 כאשר אחד הגורמים שווה ל־0:

$$\ell n\, x + 2 = 0$$
$$\Rightarrow\ \ell n\, x = -2$$
$$\Rightarrow\ x = e^{-2}$$
$$\ell n\, x - 4 = 0\ \Rightarrow\ \ell n\, x = 4\ \Rightarrow\ x = e^{4}$$

($e^{-2} \approx 0.135$, $e^{4} \approx 54.6$.)

תשובה: עם ציר x: $(e^{-2},\ 0)$, $(e^{4},\ 0)$

עם ציר y: אין

סעיף ג

נגזור לפי כלל המכפלה (הנגזרת של $\ell n\, x$ היא $\frac{1}{x}$):

$$f'(x)=\frac{1}{x}(\ell n\,x-4)+(\ell n\,x+2)\cdot\frac{1}{x}$$
$$f'(x)=\frac{2\ell n\,x-2}{x}$$

נשווה ל־0 (המכנה $x>0$):

$$2\ell n\,x-2=0\ \Rightarrow\ \ell n\,x=1\ \Rightarrow\ x=e$$
$$f(e)=(1+2)(1-4)=-9$$

סימן הנגזרת לפי המונה $2\ell n\,x-2$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$0<x<e$	–	יורדת ↘
$x=e$	0	מינימום
$x>e$	+	עולה ↗

לכן $(e,\ -9)$ היא נקודת מינימום.

תשובה: מינימום: $(e,\ -9)$

סעיף ד

נשתמש בתחום ההגדרה $x>0$, בנקודות החיתוך $(e^{-2},0)$ ו־$(e^4,0)$ ובמינימום $(e,-9)$. כאשר $x\to0^+$, $\ell n\,x\to-\infty$ ושני הגורמים שליליים, לכן $f(x)\to\infty$ (הגרף מתקרב לציר ה־y מלמעלה).

סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

תשובה: ראו סקיצה.

מינימום $(e,\ -9)$, חיתוך עם ציר x ב־e^{-2} וב־e^4.

סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

סעיף ה (1)

$f'(x)=\frac{2\ell n\,x-2}{x}$. נבדוק את התכונות:

• תחום ההגדרה של f' הוא $x>0$ – הגרף נמצא רק מימין לציר ה־y. גרף I ממשיך גם ל־$x<0$, ולכן נפסל.

• לפי טבלת הסימנים בסעיף ג: $f'(x)<0$ עבור $0<x<e$ ו־$f'(x)>0$ עבור $x>e$, כלומר הגרף מתחת לציר ה־x ואחרי $x=e$ מעליו. בגרף II הנגזרת חיובית ליד ציר ה־y ואחר כך שלילית – הפוך, ולכן נפסל.

• גרף III מתאים: מתחת לציר ה־x ליד ציר ה־y (ושואף ל־$-\infty$ כאשר $x\to0^+$), חותך את ציר ה־x בנקודה אחת ($x=e$) ואחר כך חיובי.

תשובה: גרף III

סעיף ה (2)

הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה־x ב־$x=e$, ובתחום $\sqrt{e}<x<e$ הוא מתחת לציר ה־x. לכן השטח המבוקש הוא בין $x=\sqrt{e}$ ל־$x=e$:

גרף הנגזרת והשטח המבוקש

פונקציה קדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$ עצמה, לכן:

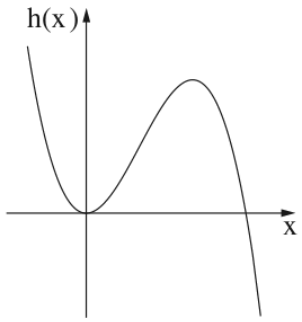
$$S=-\int_{\sqrt{e}}^{e}f'(x)\,dx$$
$$S=-\big[f(x)\big]_{\sqrt{e}}^{e}=f(\sqrt{e})-f(e)$$

נחשב ($\ell n\sqrt{e}=\frac{1}{2}$):

$$f(\sqrt{e})=\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}-4\right)$$
$$f(\sqrt{e})=2.5\cdot(-3.5)=-8.75$$
$$S=-8.75-(-9)=0.25$$

תשובה: $S=0.25$ **יחידות שטח**

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 5



5. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $h(x) = -2x^3 + 6x^2$ המוגדרת לכל x.

א. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $h(x)$ עם ציר ה־x.

(2) היעזרו בגרף, ומצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $h(x)$.

נתונה הפונקצייה $f(x) = \ell n(-2x^3 + 6x^2)$.

ב. היעזרו בתשובתכם לתת־סעיף **א(2)**, ומצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה־x של הפונקצייה $f(x)$.

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

נתונה הפונקצייה: $g(x) = -f(x) + 4$ המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ה. מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, ומהו סוגה?

פתרון מלא

סעיף א (1)

$h(x) = 0$:

$$-2x^3 + 6x^2 = 0 \;\Rightarrow\; -2x^2(x-3) = 0$$

$x = 0$ או $x = 3$.

תשובה: $(0,0)$, $(3,0)$

סעיף א (2)

לפי הגרף: הגרף מעל ציר ה־x משמאל ל־$x = 3$ (פרט לנקודה $x = 0$, שבה הוא נוגע בציר), ומתחת לציר מימין ל־$x = 3$.

תשובה: חיובית: $x < 0$ **וגם** $0 < x < 3$

שלילית: $x > 3$.

סעיף ב

הביטוי שבתוך ℓn חייב להיות חיובי, כלומר $h(x) = -2x^3 + 6x^2 > 0$. לפי סעיף א (2):

תשובה: $x < 0$ **וגם** $0 < x < 3$ **(כלומר** $x < 3$, $x \neq 0$**).**

סעיף ג

כאשר x מתקרב ל־0 או ל־3 מתוך התחום, $h(x)$ מתקרבת ל־0 (מצד החיובי), ולכן $\ell n\, h(x) \to -\infty$.
בנקודות אלה יש אסימפטוטות אנכיות.

תשובה: $x = 0$, $x = 3$

סעיף ד

נגזרת של ℓn של פונקציה: $[\ell n\, h(x)]' = \frac{h'(x)}{h(x)}$:

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 12x}{-2x^3 + 6x^2}$$

$f'(x) = 0$ כאשר המונה מתאפס:

$$-6x^2 + 12x = 0 \;\Rightarrow\; -6x(x-2) = 0$$

$x=0$ לא בתחום, לכן $x=2$.

$$f(2)=\ell n(-16+24)=\ell n\,8\approx 2.08$$

נבדוק סימנים בתוך $0<x<3$: $f'(1)=\frac{6}{4}>0$, $f'(2.5)=\frac{-7.5}{6.25}<0$ – עלייה ואחר כך ירידה, כלומר מקסימום. (משמאל ל־0 הפונקציה יורדת ואין בה קיצון.)

תשובה: $\max(2,\ \ell n\,8)$

סעיף ה

$g(x)=-f(x)+4$:

• $-f(x)$ הוא שיקוף של $f(x)$ ביחס לציר ה־x – המקסימום $(2,\ell n8)$ הופך למינימום $(2,-\ell n8)$.

• הוספת 4 מזיזה את הגרף 4 יחידות למעלה, וסוג הנקודה לא משתנה.

$$g(2)=-\ell n8+4\approx 1.92$$

(גם בגזירה: $g'(x)=-f'(x)$, מתאפסת ב־$x=2$ ומשנה סימן מ־$-$ ל־$+$.)

תשובה: $\min(2,\ 4-\ell n\,8)$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = (\ell nx)^2 - a \cdot \ell nx + 3$. a הוא פרמטר.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקצייה f(x) עם ציר ה־ x היא $(e^3, 0)$.

א. מצאו את a .

הציבו $a = 4$ בפונקצייה f(x) , וענו על הסעיפים ב–ו שלפניכם.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה f(x) .

ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך האחרת של גרף הפונקצייה f(x) עם ציר ה־ x .

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה f(x) , וקבעו את סוגה.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה f(x) .

נתונה הפונקצייה $g(x) = |f(x)|$ המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה f(x) .

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה g(x) .

פתרון מלא

סעיף א

הנקודה $(e^3, 0)$ על הגרף, לכן $f(e^3) = 0$. נשתמש ב־$\ell n\, e^3 = 3$:

$$3^2 - a \cdot 3 + 3 = 0$$
$$12 - 3a = 0 \;\Rightarrow\; a = 4$$

תשובה: $a = 4$

סעיף ב

$\ell n\, x$ מוגדר רק עבור $x > 0$:

תשובה: $x > 0$

סעיף ג

$f(x) = (\ell n\, x)^2 - 4\ell n\, x + 3 = 0$. נציב $t = \ell n\, x$:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \;\Rightarrow\; (t-1)(t-3) = 0$$

$t = 3$ נותן את הנקודה הידועה $x = e^3$. $t = 1$ נותן $\ell n\, x = 1$, כלומר $x = e$.

תשובה: $(e,\ 0)$

סעיף ד

$$f'(x) = 2\ell n\, x \cdot \frac{1}{x} - \frac{4}{x} = \frac{2\ell n\, x - 4}{x}$$

$f'(x) = 0$: $2\ell n\, x - 4 = 0 \Rightarrow \ell n\, x = 2 \Rightarrow x = e^2$.

x	$0 < x < e^2$	e^2	$x > e^2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$f(x)$ ↘ ↗ min
(למשל $f'(1) = -4 < 0$, $f'(e^3) = \frac{2}{e^3} > 0$.)

$$f(e^2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$$

תשובה: $\min(e^2,\ -1)$

סעיף ה

לפי מה שמצאנו: כאשר $x \to 0^+$, $\ell n\, x \to -\infty$ ולכן $f(x) \to +\infty$ (הגרף מתקרב לציר ה־y). הגרף יורד, חותך את ציר ה־x ב־$(e, 0)$, מגיע למינימום $(e^2, -1)$, עולה וחותך שוב ב־$(e^3, 0)$.

סקיצה של f(x): יורד מ־+∞ ליד ציר y, חותך ב־(e,0), מינימום (e²,-1), חותך ב־(e³,0) ועולה

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ו

$g(x) = |f(x)|$: היכן ש־$f(x) \geq 0$ הגרף לא משתנה, והיכן ש־$f(x) < 0$ (בין $x = e$ ל־$x = e^3$) החלק שמתחת לציר ה־x משתקף כלפי מעלה. נקודת המינימום $(e^2, -1)$ הופכת לנקודת מקסימום $(e^2, 1)$, והנקודות $(e, 0)$, $(e^3, 0)$ הופכות לנקודות מינימום ("חודים").

סקיצה של |f(x)|=g(x): החלק שבין e ל־e³ משתקף מעל ציר x, מקסימום (e²,1)

תשובה: ראו סקיצה: החלק השלילי של $f(x)$ משתקף מעל ציר ה־x.

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = a + (\ell nx)^2$.

$a > 0$ הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה (הביעו באמצעות a , אם יש צורך).

נתונה הפונקצייה $g(x) = 1 + \ell nx$ המוגדרת בתחום $x > 0$.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).

ד. אחד מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הפונקצייה $f(x)$ ואחד מהם מתאר את גרף הפונקצייה $g(x)$.
קבעו איזה מהם מתאר את $f(x)$ ואיזה את $g(x)$, ונמקו את קביעתכם.

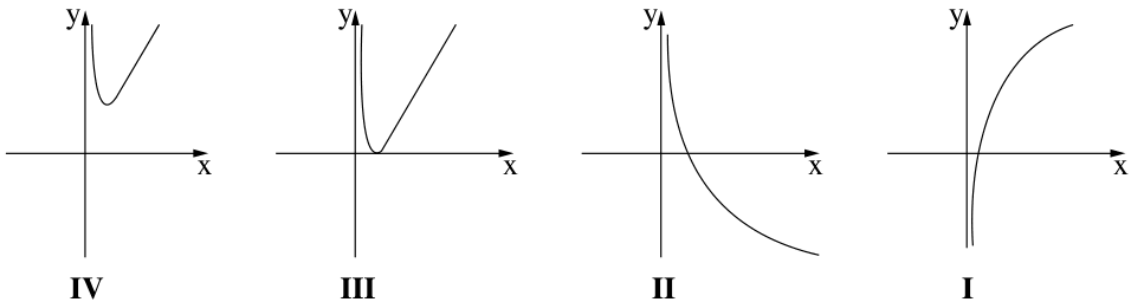
הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ נחתכים בשתי נקודות שונות.

שיעור ה־ x של אחת מנקודות החיתוך האלו הוא $x = e$.

ה. **(1)** מצאו את a .

(2) מצאו את השיעורים של נקודת החיתוך האחרת של הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

(3) בעבור אילו ערכי x מתקיים: $f(x) < g(x)$?



פתרון מלא

סעיף א

$\ell n\, x$ מוגדר רק עבור $x > 0$:

$$x > 0$$

תשובה: $x > 0$

סעיף ב

נגזור (כלל השרשרת):

$$f'(x) = 2\ell n\, x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ell n\, x}{x}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ell n\, x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$$

x	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	מינימום	↗

(בתחום $0 < x < 1$: $\ell n\, x < 0$; בתחום $x > 1$: $\ell n\, x > 0$; והמכנה x חיובי.)

$$f(1) = a + (\ell n\, 1)^2 = a + 0 = a$$

תשובה: $(1,\ a)$ **– נקודת מינימום**

סעיף ג

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

בתחום $x > 0$ מתקיים $\frac{1}{x} > 0$, לכן $g'(x) > 0$ לכל x בתחום: הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה שלה, ואין לה תחום ירידה.

תשובה: עולה לכל $x > 0$**; אין תחום ירידה.**

סעיף ד

$f(x)$**:** יש לה נקודת מינימום אחת $(1, a)$ ו־$a > 0$, כלומר המינימום מעל ציר ה־x והגרף כולו מעל ציר ה־x. גרף IV מתאים (גרף III נוגע בציר ה־x, כלומר שם $a = 0$).

$g(x)$**:** עולה בכל התחום ואין לה נקודות קיצון. גרף I מתאים (גרף II יורד).

תשובה: $f(x)$ **– גרף IV;** $g(x)$ **– גרף I.**

סעיף ה (1)

בנקודת החיתוך $x = e$ מתקיים $f(e) = g(e)$:

$$a + (\ell n\, e)^2 = 1 + \ell n\, e$$
$$a + 1 = 1 + 1 \ \Rightarrow\ a = 1$$

תשובה: $a = 1$

סעיף ה (2)

$$1 + (\ell n\, x)^2 = 1 + \ell n\, x$$
$$(\ell n\, x)^2 - \ell n\, x = 0$$
$$\Rightarrow\ \ell n\, x\,(\ell n\, x - 1) = 0$$

$\ell n\, x = 1$ נותן $x = e$ (הנקודה הנתונה), ו־$\ell n\, x = 0$ נותן $x = 1$:

$$g(1) = 1 + \ell n\, 1 = 1$$

תשובה: $(1,\ 1)$

סעיף ה (3)

$$1 + (\ell n\, x)^2 < 1 + \ell n\, x$$
$$(\ell n\, x)^2 - \ell n\, x < 0$$
$$\Rightarrow\ \ell n\, x\,(\ell n\, x - 1) < 0$$

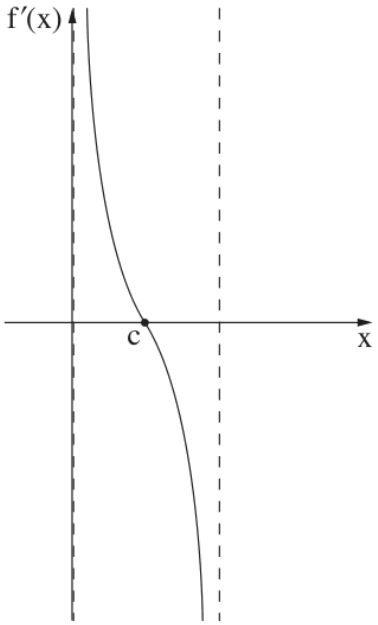
מכפלה שלילית כאשר $\ell n\, x$ בין 0 ל־1:

$$0 < \ell n\, x < 1 \ \Rightarrow\ 1 < x < e$$

(כלומר בין שתי נקודות החיתוך גרף g מעל גרף f.)

תשובה: $1 < x < e$

בגרות קיץ תשפ״ב (2022) – מועד ב׳ • שאלה 5



5. $f(x)$ היא פונקצייה. גרף פונקציית הנגזרת שלה, $f'(x)$, מתואר בסרטוט שלפניכם.

הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה אחת בלבד, שבה $x = c$. c הוא פרמטר.

א. מצאו את הסוג של נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ על פי הגרף.

נמקו את תשובתכם.

נתון: $f(x) = \ell n(4x - x^2)$.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה). בתשובתכם השאירו שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ וכתבו את ערכו של c.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

ו. מצאו את התחומים שבהם $g(x)$ חיובית. נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

בנקודה $x = c$ גרף הנגזרת חותך את ציר ה־x: משמאל ל־c הנגזרת חיובית (הגרף מעל ציר ה־x) ומימין ל־c שלילית.

כלומר $f(x)$ עולה לפני c ויורדת אחריו – ב־$x = c$ יש לפונקציה נקודת מקסימום.

תשובה: נקודת מקסימום (f' עוברת מחיובית לשלילית ב־$x = c$).

סעיף ב

הביטוי שבתוך ה־ℓn חייב להיות חיובי:

$$4x - x^2 > 0 \;\Rightarrow\; x(4 - x) > 0$$

פרבולה „עצובה" עם שורשים 0 ו־4 – חיובית ביניהם:

$$0 < x < 4$$

תשובה: $0 < x < 4$

סעיף ג

חיתוך עם ציר ה־y: $x = 0$ אינו בתחום – אין.

חיתוך עם ציר ה־x: $\ell n(4x - x^2) = 0$, כלומר:

$$4x - x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 \approx 0.27 \qquad x_2 \approx 3.73$$

(שתי הנקודות בתחום $0 < x < 4$.)

תשובה: $(0.27,\ 0)$**,** $(3.73,\ 0)$
אין חיתוך עם ציר ה־y**.**

סעיף ד
נגזור (כלל השרשרת):

$$f'(x)=\frac{4-2x}{4x-x^2}$$
$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ 4-2x=0\ \Rightarrow\ x=2$$

לפי סעיף א זו נקודת מקסימום (בדיקה: $f'(1)=\frac{2}{3}>0$, $f'(3)=-\frac{2}{3}<0$).

$$f(2)=\ell n(8-4)=\ell n\,4\approx 1.39$$

הנגזרת מתאפסת רק ב־$x=2$, ולכן $c=2$.

תשובה: $(2,\ \ell n\,4)$ **– מקסימום;** $c=2$

סעיף ה
הפונקציה מוגדרת ב־$0<x<4$. כאשר x מתקרב ל־0 או ל־4, הביטוי $4x-x^2$ מתקרב ל־0 ולכן $f(x)\to-\infty$ (הישרים $x=0$ ו־$x=4$ הם אסימפטוטות אנכיות). הגרף עולה עד המקסימום $(2,\ell n4)$ ויורד, וחותך את ציר ה־x ב־$x\approx 0.27$ וב־$x\approx 3.73$.

סקיצה של f(x)

תשובה:
סקיצה של f(x)

סעיף ו
$g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ חיובית כאשר לשני הגורמים אותו סימן.

סימן $f(x)$ (לפי הסקיצה): חיובית ב־$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$, ושלילית ב־$0<x<2-\sqrt{3}$ וב־ $2+\sqrt{3}<x<4$.

סימן $f'(x)$: חיובית ב־$0<x<2$ ושלילית ב־$2<x<4$.

x	$0<x<2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}<x<2$	$2<x<2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}<x<4$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$g(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

תשובה: $2-\sqrt{3}<x<2$ **וגם** $2+\sqrt{3}<x<4$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=(\ell nx)^3-3(\ell nx)^2$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. **(1)** רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x=\frac{1}{e}$, על ידי הישר $x=e$, ועל ידי ציר ה־ x.

פתרון מלא

סעיף א

הפונקציה $\ell n\,x$ מוגדרת רק עבור $x>0$, ולכן גם $f(x)$ מוגדרת עבור $x>0$.

תשובה: $x>0$

סעיף ב

נוציא גורם משותף $\ell n^2 x$:

$$f(x)=\ell n^2 x\,(\ell n\,x-3)=0$$

אפשרות ראשונה:

$$\ell n\,x=0\ \Rightarrow\ x=1$$

אפשרות שנייה:

$$\ell n\,x=3\ \Rightarrow\ x=e^3$$

אין חיתוך עם ציר ה־y, כי $x=0$ אינו בתחום ההגדרה.

תשובה: $(1,\ 0)$

$(e^3,\ 0)\approx(20.09,\ 0)$

סעיף ג

נגזור לפי כלל השרשרת, $(\ell n\,x)'=\frac{1}{x}$:

$$f'(x)=3\ell n^2 x\cdot\frac{1}{x}-6\ell n\,x\cdot\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{3\ell n\,x\,(\ell n\,x-2)}{x}$$

בתחום $x>0$ המכנה חיובי, לכן $f'(x)=0$ כאשר:

$$\ell n\,x=0\ \Rightarrow\ x=1$$

$$\ell n\,x=2\ \Rightarrow\ x=e^2$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$0<x<1$	+	עולה ↗
$x=1$	0	מקסימום

$-1 < x < e^2$	–	יורדת ↘
$x = e^2$	0	מינימום
$x > e^2$	+	עולה ↗

(למשל: ב־$x = e^{-1}$ שני הגורמים במונה שליליים ⇐ $f' > 0$; ב־$x = e$: $\ell n\, x = 1$, $\ell n\, x - 2 = -1$ ⇐ $f' < 0$; ב־$x = e^3$ שניהם חיוביים ⇐ $f' > 0$.)

$$f(1) = 0 - 0 = 0$$
$$f\left(e^2\right) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$$

תשובה: מקסימום: $(1,\ 0)$
מינימום: $\left(e^2,\ -4\right) \approx (7.39,\ -4)$

סעיף ד

נשתמש בתחום, בנקודות החיתוך ובנקודות הקיצון שמצאנו.
כאשר $x \to 0^+$: $\ell n\, x \to -\infty$, ולכן $f(x) \to -\infty$ – הישר $x = 0$ (ציר ה־y) הוא אסימפטוטה אנכית.
כאשר $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$.
סקיצה של גרף הפונקציה f(x)
תשובה: ראו סקיצה.
מקסימום $(1,\ 0)$**, מינימום** $\left(e^2,\ -4\right)$**, חיתוך** $\left(e^3,\ 0\right)$**.**

סעיף ה (1)

הסימן של $f'(x)$ נקבע לפי העלייה והירידה של $f(x)$ (טבלת הסימנים בסעיף ג):
$f'(x) > 0$ כאשר $f(x)$ עולה: $0 < x < 1$ או $x > e^2$.
$f'(x) < 0$ כאשר $f(x)$ יורדת: $1 < x < e^2$.
תשובה: $f'(x) > 0$**:** $0 < x < 1$ **או** $x > e^2$
$f'(x) < 0$**:** $1 < x < e^2$

סעיף ה (2)

לפי ה (1): בקטע $\frac{1}{e} \le x \le 1$ הגרף של $f'(x)$ מעל ציר ה־x, ובקטע $1 \le x \le e$ (שם $e < e^2$) הוא מתחת לציר ה־x. לכן נחלק את השטח לשני חלקים.
השטח בין הגרף של f'(x) לציר x בין e/1 ל-e
פונקציה קדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$. נחשב את ערכי f:

$$f\left(\tfrac{1}{e}\right) = (-1)^3 - 3(-1)^2 = -4$$
$$f(1) = 0$$
$$f(e) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2$$

החלק שמעל ציר ה־x:

$$S_1 = \int_{1/e}^{1} f'(x)\, dx$$
$$= f(1) - f\left(\tfrac{1}{e}\right)$$
$$S_1 = 0 - (-4) = 4$$

החלק שמתחת לציר ה־x:

$$S_2 = -\int_1^e f'(x)\,dx$$
$$= -\left[f(e) - f(1)\right]$$
$$S_2 = -(-2 - 0) = 2$$
$$S = S_1 + S_2 = 4 + 2 = 6$$

תשובה: השטח: 6 יח"ר

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 4

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\,ln(x^2 - a)$, a פרמטר חיובי.

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = 5$ שווה ל- 1.25 .

א. מצא את a.

הצב $a = 9$ וענה על הסעיפים הבאים:

ב. (1) רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x-4)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. האם הפונקציה $g(x)$ זוגית/ אי זוגית/ או לא זוגית ולא אי זוגית? נמק.

פתרון מלא

סעיף א

נגזור לפי כלל השרשרת, $(\ell n\, u)' = \frac{u'}{u}$:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{x^2 - a} = \frac{4x}{x^2 - a}$$

שיפוע המשיק בנקודה $x = 5$ שווה ל־1.25:

$$f'(5) = \frac{20}{25 - a} = 1.25$$
$$25 - a = \frac{20}{1.25} = 16$$
$$a = 9$$

תשובה: $a = 9$

סעיף ב (1)

עם $a = 9$: $f(x) = 2\ell n\left(x^2 - 9\right)$. הביטוי שבתוך ה־$\ell n$ חייב להיות חיובי:

$$x^2 - 9 > 0 \;\Rightarrow\; x^2 > 9$$

לכן $x < -3$ או $x > 3$.

תשובה: $x < -3$ **או** $x > 3$

סעיף ב (2)

כאשר x מתקרב ל־3 מימין או ל־-3 משמאל, הביטוי x^2-9 שואף ל־0^+, ולכן $\ell n\left(x^2-9\right)\to-\infty$ ו־$f(x)\to-\infty$.

לכן לפונקציה יש אסימפטוטות אנכיות בקצות תחום ההגדרה:

$$x=3\ \ ,\ \ x=-3$$

תשובה: $x=3$

$x=-3$

סעיף ב (3)

$$f'(x)=\frac{4x}{x^2-9}$$

בתחום ההגדרה המכנה x^2-9 חיובי תמיד, ולכן הסימן של $f'(x)$ הוא הסימן של $4x$. הנגזרת לא מתאפסת בתחום ($x=0$ לא בתחום).

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<-3$	–	יורדת ↘
$x>3$	+	עולה ↗

תשובה: עלייה: $x>3$

ירידה: $x<-3$

סעיף ב (4)

חיתוך עם ציר ה־y: $x=0$ אינו בתחום ההגדרה, לכן אין חיתוך עם ציר ה־y.

חיתוך עם ציר ה־x:

$$2\ell n\left(x^2-9\right)=0$$
$$x^2-9=e^0=1$$
$$x^2=10\ \Rightarrow\ x=\pm\sqrt{10}$$

תשובה: $\left(\sqrt{10},\ 0\right)$, $\left(-\sqrt{10},\ 0\right)$

אין חיתוך עם ציר ה־y.

סעיף ב (5)

נשתמש בתחום, באסימפטוטות $x=\pm3$, בתחומי העלייה והירידה ובנקודות החיתוך $\left(\pm\sqrt{10},\ 0\right)$. (הגרף סימטרי לציר ה־$y$, כי $f(-x)=f(x)$.)

סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ג

הגרף של $g(x)=f(x-4)$ הוא הגרף של $f(x)$ מוזז 4 יחידות ימינה. לכן:

• תחום: $x<1$ או $x>7$.

• אסימפטוטות אנכיות: $x=1$, $x=7$.

• חיתוך עם ציר ה־x: $x=4\pm\sqrt{10}$, כלומר $x\approx0.84$ ו־$x\approx7.16$.

• עכשיו $x=0$ בתחום, ויש חיתוך עם ציר ה־y:

$$g(0)=f(-4)=2\ell n\,7\approx3.89$$

סקיצה של גרף הפונקציה g(x)

תשובה: ראו סקיצה: הגרף של $f(x)$ מוזז 4 ימינה.

אסימפטוטות $x=1$, $x=7$.

סעיף ד

כדי שפונקציה תהיה זוגית או אי־זוגית, תחום ההגדרה שלה חייב להיות סימטרי סביב 0.

תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא $x<1$ או $x>7$ – לא סימטרי: למשל $x=-2$ בתחום, אבל $x=2$ לא בתחום.

לכן $g(x)$ **לא זוגית ולא אי־זוגית**. (אפשר לראות זאת גם בסקיצה: הגרף לא סימטרי לציר ה־y ולא סימטרי לראשית.)

תשובה: לא זוגית ולא אי־זוגית.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 5

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\ell n(x+1)}{x+1}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטה המאונכת לציר ה־ x של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. מצא את התחום שבעבורו מתקיים $f(x)\cdot f'(x)>0$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

שני תנאים: הביטוי בתוך ℓn חיובי, והמכנה שונה מ־0:

$$x+1>0 \;\Rightarrow\; x>-1$$

(בתחום זה גם $x+1\neq 0$.)

תשובה: $x>-1$

סעיף א (2)

כאשר $x\to -1^+$: המונה $\ell n(x+1)\to -\infty$ והמכנה $x+1\to 0^+$, לכן $f(x)\to -\infty$.
האסימפטוטה המאונכת לציר ה־x:

$$x=-1$$

תשובה: $x=-1$

סעיף ב

נשווה ל־0. שבר שווה ל־0 כאשר המונה שווה ל־0:

$$\ell n(x+1)=0$$
$$\Rightarrow\; x+1=1 \;\Rightarrow\; x=0$$

תשובה: $(0,\ 0)$

סעיף ג

נגזור לפי כלל המנה (הנגזרת של $\ell n(x+1)$ היא $\frac{1}{x+1}$):

$$f'(x)=\frac{\frac{x+1}{x+1}-\ell n(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-\ell n(x+1)}{(x+1)^2}$$

נשווה ל־0:

$$1-\ell n(x+1)=0 \;\Rightarrow\; x+1=e$$

$$x=e-1\approx 1.72$$

$$f(e-1)=\frac{\ell n\, e}{e}=\frac{1}{e}\approx 0.37$$

סימן הנגזרת לפי המונה (המכנה חיובי). למשל $f'(0)=1>0$, ו־$f'(e^2-1)=\frac{1-2}{e^4}<0$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$-1<x<e-1$	+	עולה ↗
$x=e-1$	0	מקסימום
$x>e-1$	–	יורדת ↘

לכן $\left(e-1,\ \frac{1}{e}\right)$ היא נקודת מקסימום.

שימו לב: בתשובות של מלומד כתוב $(1.71,\ 0.37)$ – זו קטיעה של $e-1=1.718\ldots$; בעיגול זה 1.72.

תשובה: מקסימום $\left(e-1,\ \frac{1}{e}\right)\approx(1.72,\ 0.37)$

סעיף ד

לפי הטבלה בסעיף ג:

עלייה: $-1<x<e-1$

ירידה: $x>e-1$

תשובה: עלייה: $-1<x<e-1$

ירידה: $x>e-1$

סעיף ה

נשתמש באסימפטוטה $x=-1$, בחיתוך $(0,0)$ ובמקסימום $\left(e-1,\ \frac{1}{e}\right)$. כאשר $x\to\infty$ המכנה גדל הרבה יותר מהר מהמונה, לכן $f(x)\to 0$ מלמעלה – הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית מימין.

סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

תשובה: ראו סקיצה.

אסימפטוטות: $x=-1$, $y=0$

מקסימום $\left(e-1,\ \frac{1}{e}\right)$

סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

סעיף ו

מכפלה של שני גורמים חיובית כאשר שניהם חיוביים או שניהם שליליים.

סימן $f(x)$: לפי הסקיצה (חיתוך יחיד ב־$x=0$), $f(x)<0$ עבור $-1<x<0$ ו־$f(x)>0$ עבור $x>0$.

סימן $f'(x)$: לפי סעיף ד, $f'(x)>0$ עבור $-1<x<e-1$ ו־$f'(x)<0$ עבור $x>e-1$.

שניהם חיוביים: $x>0$ וגם $x<e-1$, כלומר $0<x<e-1$.

שניהם שליליים: $x<0$ וגם $x>e-1$ – אין x כזה.

$$0<x<e-1$$

תשובה: $0<x<e-1$ **(כלומר** $0<x<1.72$ **בערך)**

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.