גדילה ודעיכה – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 4 יחידות, כיתה י״ב (שאלון 472) • 14 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 3

3. באזור A חיים פינגווינים. מתחילת שנת 2000 מספר הפינגווינים באזור זה קטן בכל שנה באחוז קבוע.

א. האם ההפרש בין מספר הפינגווינים בתחילת שנת 2000 ובין מספרם בתחילת שנת 2001 שווה להפרש בין מספר הפינגווינים בתחילת שנת 2001 ובין מספרם בתחילת שנת 2002 ? נמקו את תשובתכם.

בתחילת שנת 2000 היו 253,000 פינגווינים באזור A . מספר הפינגווינים באזור זה קטן ב־ 5% בכל שנה.

גם באזור B חיים פינגווינים. מספר הפינגווינים באזור זה קטן בכל שנה באחוז קבוע.

בתחילת שנת 2000 היו 313,000 פינגווינים באזור B .

בתחילת שנת 2010 מספר הפינגווינים באזור A היה שווה למספר הפינגווינים באזור B .

ב. מצאו בכמה אחוזים קטן מספר הפינגווינים באזור B בכל שנה.

ג. מצאו כעבור כמה זמן מתחילת שנת 2000 מספר הפינגווינים באזור B היה 98,000 .

מתחילת שנת 2018 , בעקבות שיקום אזור A , גדל מספר הפינגווינים באזור זה ב־ 2% בכל שנה.

ד. מצאו כעבור כמה זמן מתחילת שנת 2018 גדל מספר הפינגווינים באזור A ב־ 17% ממספרם בתחילת שנת 2018 .

פתרון מלא

סעיף א

נסמן ב־M_0 את מספר הפינגווינים בתחילת 2000, וב־q את מנת הדעיכה השנתית ($0 < q < 1$, כי המספר קטן).

בתחילת 2001 היו $M_0 q$ פינגווינים, ובתחילת 2002 היו $M_0 q^2$.

ההפרש בשנה הראשונה:

$$M_0 - M_0 q = M_0(1-q)$$

ההפרש בשנה השנייה:

$$M_0 q - M_0 q^2 = M_0 q(1-q)$$

ההפרש השני שווה להפרש הראשון כפול q. מכיוון ש־$q < 1$, ההפרש השני קטן מהראשון – ההפרשים אינם שווים.

(במילים: בכל שנה מספר הפינגווינים קטן באותו **אחוז**, אבל האחוז נלקח מכמות שהולכת וקטנה.)

תשובה: לא. ההפרש השני הוא $M_0 q(1-q)$, קטן פי q מההפרש הראשון $M_0(1-q)$.

סעיף ב

באזור A: $M_0 = 253{,}000$, $q_A = 0.95$ (ירידה של 5%). בתחילת 2010 (אחרי 10 שנים):

$$M_A(10) = 253{,}000 \cdot 0.95^{10}$$

$$\approx 151{,}480$$

באזור B: $M_0 = 313{,}000$ ומנה לא ידועה q. בתחילת 2010 המספרים שווים:

$$313{,}000 \cdot q^{10} = 253{,}000 \cdot 0.95^{10}$$

$$q^{10} = \frac{253{,}000 \cdot 0.95^{10}}{313{,}000}$$

$$\approx 0.484$$
$$q = \sqrt[10]{0.484} \approx 0.93$$

$q = 0.93$ פירושו ירידה של $1 - 0.93 = 0.07$, כלומר 7% בכל שנה.

תשובה: מספר הפינגווינים באזור B קטן ב־7% בכל שנה.

סעיף ג

נחפש t (שנים מתחילת 2000) שבו באזור B יש 98,000 פינגווינים:

$$313{,}000 \cdot 0.93^t = 98{,}000$$
$$0.93^t = \frac{98{,}000}{313{,}000}$$
$$\approx 0.3131$$

נוציא ℓn לשני האגפים:

$$t = \frac{\ell n\, 0.3131}{\ell n\, 0.93} \approx 16$$

תשובה: כעבור 16 שנים (כלומר בתחילת 2016).

סעיף ד

מתחילת 2018 המספר באזור A גדל ב־2% בכל שנה, כלומר $q = 1.02$.

גידול של 17% פירושו שהמספר הגיע ל־1.17 מהמספר ההתחלתי M_0 (של תחילת 2018):

$$M_0 \cdot 1.02^t = 1.17\, M_0$$
$$1.02^t = 1.17$$
$$t = \frac{\ell n\, 1.17}{\ell n\, 1.02} \approx 7.93$$

תשובה: כעבור כ־7.93 שנים (כמעט 8 שנים).

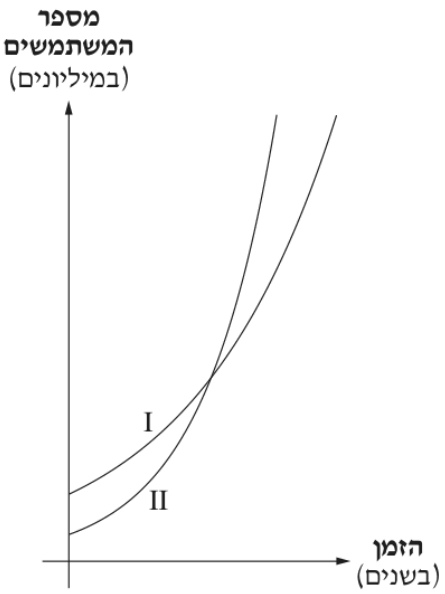
בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד א׳ • שאלה 3

3. בתחילת שנת 2025 בדקו חוקרים את מספר האנשים שמשתמשים בשני כלים של בינה מלאכותית, כלי A וכלי B.

על פי הצפי של החוקרים, מספר המשתמשים בכלי A יעלה ב־ 10% בכל שנה.

נתון כי בתחילת שנת 2025 מספר המשתמשים בכלי A היה 50 מיליון.

א. מצאו מה צפוי להיות מספר המשתמשים בכלי A בתחילת שנת 2030.



על פי הצפי של החוקרים, מספר המשתמשים בכלי B יעלה באחוז קבוע בכל שנה.

מספר המשתמשים בכלי B בתחילת שנת 2031 צפוי להיות גדול פי 3 ממספר המשתמשים בכלי זה בתחילת שנת 2025.

ב. מצאו בכמה אחוזים צפוי לגדול מספר המשתמשים בכלי B בכל שנה.

לפניכם שני גרפים I–II המתארים את מספר האנשים שצפויים להשתמש בכלים A ו־ B מתחילת שנת 2025 והלאה.

ג. איזה מן הגרפים I–II מתאר את מספר האנשים שצפויים להשתמש בכלי B ?

נמקו את תשובתכם.

על פי הצפי של החוקרים, בתחילת שנת 2030 יהיה מספר המשתמשים בכלי A גדול ב־ 30 מיליון ממספר המשתמשים בכלי B.

ד. מצאו את מספר המשתמשים בכלי B בתחילת שנת 2025.

ה. מצאו כעבור כמה זמן מתחילת שנת 2025 מספר המשתמשים בכלי A צפוי להיות שווה למספר המשתמשים בכלי B.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן ב־$M_A(t)$ את מספר המשתמשים בכלי A (במיליונים), t שנים אחרי תחילת 2025.

המספר עולה ב־10% בכל שנה, לכן המנה היא $q = 1.1$ ו־$M_0 = 50$:

$$M_A(t) = 50 \cdot 1.1^t$$

תחילת 2030 היא 5 שנים אחרי תחילת 2025:

$$M_A(5) = 50 \cdot 1.1^5 = 80.5255$$

תשובה: 80.5255 מיליון (80,525,500 משתמשים)

סעיף ב

נסמן ב־q את מנת הגדילה השנתית בכלי B וב־M_0 את מספר המשתמשים בתחילת 2025. תחילת 2031 היא 6 שנים אחרי תחילת 2025:

$$M_0 \cdot q^6 = 3M_0$$

$$q^6 = 3 \;\Rightarrow\; q = \sqrt[6]{3} \approx 1.2009$$

כלומר בכל שנה מספר המשתמשים מוכפל ב־1.2009 בקירוב – גדל ב־20.09% בקירוב.

תשובה: בכ־20.1% בכל שנה

סעיף ג

בכלי B מספר המשתמשים גדל בכ־20% בשנה, ובכלי A רק ב־10% בשנה. לכן הגרף של B עולה מהר יותר, ובסופו של דבר עובר את הגרף של A.

בסרטוט, גרף II מתחיל נמוך יותר (בתחילת 2025 יש בו פחות משתמשים), נחתך עם גרף I ואחר כך עולה מעליו – הוא הגרף שגדל מהר יותר.

(אפשר לבדוק גם בעזרת סעיף ד: בתחילת 2025 בכלי B כ־20 מיליון משתמשים, פחות מ־50 מיליון בכלי A, וזה מתאים לגרף II שנקודת ההתחלה שלו נמוכה יותר.)

תשובה: גרף II – הוא מתחיל נמוך יותר ועולה מהר יותר (20% לעומת 10% בשנה).

סעיף ד

מסעיף א, בתחילת 2030 יהיו בכלי A 80.5255 מיליון משתמשים. בכלי B יהיו 30 מיליון פחות:

$$M_B(5) = 80.5255 - 30 = 50.5255$$

מצד שני $M_B(5) = M_0 \cdot q^5$, ומסעיף ב $q = \sqrt[6]{3}$:

$$M_0 \cdot \left(\sqrt[6]{3}\right)^5 = 50.5255$$

$$M_0 = \frac{50.5255}{3^{5/6}}$$

$$\approx \frac{50.5255}{2.498} \approx 20.226$$

תשובה: כ־20.226 מיליון (20,225,980 משתמשים)

סעיף ה

נשווה בין שתי הפונקציות:

$$50 \cdot 1.1^t = 20.226 \cdot 1.2009^t$$

$$\left(\frac{1.2009}{1.1}\right)^t = \frac{50}{20.226}$$

$$1.0918^t \approx 2.4721$$

נוציא ℓn משני האגפים:

$$t = \frac{\ell n\, 2.4721}{\ell n\, 1.0918} \approx 10.31$$

כלומר כ־10.31 שנים אחרי תחילת 2025 (במהלך שנת 2035).

תשובה: אחרי כ־10.31 שנים

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 3

3. יעל הכינה שתי ריבות – ריבת תות וריבת שזיפים.

היא מדדה את הטמפרטורה ההתחלתית של כל אחת מן הריבות באותו הזמן, ואז הכניסה אותן מייד למקרר.

הטמפרטורה של הריבות נמדדה במעלות צלזיוס.

הטמפרטורה ההתחלתית של ריבת התות הייתה גבוהה מזו של ריבת השזיפים.

בכל דקה ירדה הטמפרטורה של כל אחת מן הריבות באחוז קבוע (כל אחת באחוז שונה).

נתון כי לאחר זמן מסוים מרגע ההכנסה של הריבות למקרר, הייתה הטמפרטורה של ריבת השזיפים גבוהה מזו של ריבת התות.

א. האם האחוז שבו ירדה בכל דקה הטמפרטורה של ריבת התות היה גדול מן האחוז שבו ירדה בכל דקה הטמפרטורה של ריבת השזיפים? נמקו את תשובתכם.

נתון שהטמפרטורה ההתחלתית של ריבת התות הייתה 42 מעלות , ובכל דקה היא ירדה ב־ 4% .

ב. מצאו כעבור כמה זמן מרגע ההכנסה של הריבות למקרר, הייתה הטמפרטורה של ריבת התות 15 מעלות.

לאחר 6 דקות מרגע ההכנסה של הריבות למקרר, הייתה הטמפרטורה של ריבת השזיפים 88% מן הטמפרטורה ההתחלתית שלה.

ג. מצאו בכמה אחוזים ירדה הטמפרטורה של ריבת השזיפים בכל דקה.

לאחר 10 דקות מרגע ההכנסה של הריבות למקרר, הייתה הטמפרטורה של ריבת השזיפים 31 מעלות.

ד. מצאו כעבור כמה זמן מרגע ההכנסה של הריבות למקרר, הייתה הטמפרטורה של שתי הריבות זהה.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן את הטמפרטורה של ריבת התות ב־$T(t) = T_0 \cdot q_1^t$ ושל ריבת השזיפים ב־$S(t) = S_0 \cdot q_2^t$ (t בדקות), כאשר $T_0 > S_0$.

נניח בשלילה שהאחוז שבו ירדה ריבת התות **אינו** גדול מהאחוז של ריבת השזיפים. אז היא יורדת לאט יותר או באותו קצב, כלומר $q_1 \geq q_2$, ולכן לכל $t \geq 0$:

$$T(t) = T_0 \cdot q_1^t > S_0 \cdot q_2^t$$
$$= S(t)$$

(גם הגורם ההתחלתי גדול יותר וגם בסיס החזקה לא קטן יותר.) כלומר ריבת התות תמיד חמה יותר – בסתירה לנתון שאחרי זמן מסוים ריבת השזיפים חמה יותר.

לכן האחוז שבו ירדה הטמפרטורה של ריבת התות גדול יותר.

תשובה: כן. אחרת ריבת התות, שהתחילה חמה יותר, הייתה נשארת חמה יותר כל הזמן.

סעיף ב

ירידה של 4% בכל דקה, לכן $q = 1 - 0.04 = 0.96$, והטמפרטורה של ריבת התות:

$$T(t) = 42 \cdot 0.96^{\,t}$$

נמצא מתי $T(t) = 15$:

$$42 \cdot 0.96^{\,t} = 15 \;\Rightarrow\; 0.96^{\,t} = \frac{15}{42}$$

$$t = \frac{\log \frac{15}{42}}{\log 0.96} \approx 25.22$$

תשובה: כעבור כ־25.22 דקות.

סעיף ג

נסמן ב־q את הגורם של ריבת השזיפים. אחרי 6 דקות הטמפרטורה היא 88% מהטמפרטורה ההתחלתית:

$$S_0 \cdot q^6 = 0.88\, S_0 \;\Rightarrow\; q^6 = 0.88$$

$$q = \sqrt[6]{0.88} \approx 0.97892$$

הירידה בכל דקה: $1 - 0.97892 = 0.02108$, כלומר כ־2.11%.

תשובה: בכ־2.11% בכל דקה.

סעיף ד

נמצא קודם את הטמפרטורה ההתחלתית של ריבת השזיפים. אחרי 10 דקות היא 31 מעלות:

$$S_0 \cdot q^{10} = 31, \qquad q = \sqrt[6]{0.88}$$

$$S_0 = \frac{31}{0.88^{10/6}} \approx 38.361$$

(אכן $38.36 < 42$, כמתואר בשאלה.)

נשווה בין הטמפרטורות של שתי הריבות:

$$42 \cdot 0.96^{\,t} = 38.361 \cdot 0.97892^{\,t}$$

$$\left(\frac{0.96}{0.97892}\right)^{t} = \frac{38.361}{42}$$

$$t = \frac{\log \frac{38.361}{42}}{\log \frac{0.96}{0.97892}}$$

$$\approx 4.64$$

(בדיקה: $42 \cdot 0.96^{4.64} \approx 34.75$ וגם $38.361 \cdot 0.97892^{4.64} \approx 34.75$.)

תשובה: כעבור כ־4.64 דקות.

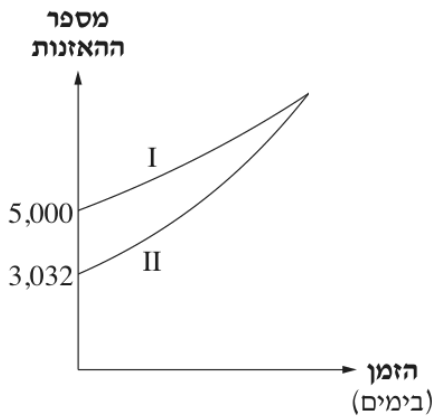
בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 3

3. שני שירים A ו־ B הועלו ביום מסוים לאותה רשת חברתית.

מספר ההאזנות לשיר A גדל באחוז קבוע בכל יום.

מספר ההאזנות לשיר B גדל בכל יום באחוז הגדול פי 2 מן האחוז שבו גדל בכל יום מספר ההאזנות לשיר A .

לפניכם שני גרפים I–II המתארים את מספר ההאזנות לכל שיר לפי הזמן, מיום העלאת השירים.



א. מבין הגרפים I–II קבעו איזה גרף מתאים לשיר A . נמקו את קביעתכם.

נתון כי לאחר 5 ימים מיום העלאת השירים, מספר ההאזנות לשיר A היה 7,350 .

ב. מצאו בכמה אחוזים גדל מספר ההאזנות לשיר A בכל יום.

ג. מצאו בכמה היה גדול מספר ההאזנות לשיר A ממספר ההאזנות לשיר B , לאחר 5 ימים מיום העלאת השירים.

ד. מצאו לאחר כמה זמן מיום העלאת השירים, היה מספר ההאזנות לשיר A שווה למספר ההאזנות לשיר B .

כאשר מספר ההאזנות לשיר A היה שווה למספר ההאזנות לשיר B , החלה ירידה במספר ההאזנות לשיר A .

בכל יום קטן מספר ההאזנות לשיר A באותו האחוז שבו הוא גדל לפני כן.

ה. מצאו לאחר כמה זמן מיום העלאת השירים, מספר ההאזנות לשיר A היה 2,450 .

פתרון מלא

סעיף א

בשני השירים מספר ההאזנות גדל באחוז קבוע בכל יום, אבל בשיר B האחוז גדול פי 2. לכן הגרף של B עולה מהר יותר, ובסופו של דבר מגיע לגרף של A.

בסרטוט גרף II מתחיל נמוך יותר (3,032) ועולה מהר יותר עד שהוא נפגש עם גרף I – זה הגרף של B. גרף I עולה לאט יותר, ולכן הוא מתאים לשיר A.

תשובה: גרף I – הוא עולה לאט יותר (האחוז של A קטן פי 2 מזה של B).

סעיף ב

לשיר A (גרף I): $M_0 = 5000$. נסמן ב־q את מנת הגדילה היומית:

$$5000 \cdot q^5 = 7350$$

$$q^5 = 1.47 \;\Rightarrow\; q = \sqrt[5]{1.47} \approx 1.08$$

מספר ההאזנות מוכפל בכל יום ב־1.08, כלומר גדל ב־8%.

תשובה: ב־8% בכל יום

סעיף ג

בשיר B האחוז גדול פי 2: $2 \cdot 8\% = 16\%$, לכן $q = 1.16$. מהגרף: $M_0 = 3032$.

$$M_B(5) = 3032 \cdot 1.16^5 \approx 6368.2$$

ההפרש:

$$7350 - 6368.2 \approx 981.8$$

תשובה: בכ־980 האזנות

סעיף ד

נשווה בין מספרי ההאזנות:

$$5000 \cdot 1.08^t = 3032 \cdot 1.16^t$$
$$\left(\frac{1.16}{1.08}\right)^t = \frac{5000}{3032}$$

נוציא ℓn משני האגפים:

$$t = \frac{\ell n \frac{5000}{3032}}{\ell n \frac{1.16}{1.08}} \approx 7$$

תשובה: אחרי 7 ימים

סעיף ה

הירידה התחילה אחרי 7 ימים (סעיף ד). מספר ההאזנות לשיר A אז:

$$5000 \cdot 1.08^7 \approx 8569.1$$

מכאן והלאה מספר ההאזנות קטן ב־8% בכל יום, כלומר $q = 0.92$. נסמן ב־s את מספר הימים מתחילת הירידה:

$$8569.1 \cdot 0.92^s = 2450$$
$$0.92^s = \frac{2450}{8569.1} \approx 0.2859$$
$$s = \frac{\ell n\, 0.2859}{\ell n\, 0.92} \approx 15$$

סך הכול מיום העלאת השירים: $7 + 15 = 22$ ימים.

תשובה: אחרי כ־22 ימים

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 3

3. בשתי משתלות – משתלה א' ומשתלה ב' – החלו לשתול צמחים באותו היום.

ביום זה שתלו במשתלה א' 600 צמחים, ובמשתלה ב' שתלו a צמחים.

מספר הצמחים במשתלה א' גדֵל ב־ 5% בכל שבוע, ומספר הצמחים במשתלה ב' גדֵל ב־ 10% בכל שבוע.

כעבור זמן מסוים מתחילת השתילה היה מספר הצמחים במשתלה א' שווה למספר הצמחים במשתלה ב'.

א. לפניכם שתי טענות, I–II . קבעו איזו טענה נכונה. נמקו את קביעתכם.

I. $a < 600$

II. $a > 600$

כעבור 17 שבועות מתחילת השתילה היה מספר הצמחים במשתלה ב' גדול פי 2 ממספר הצמחים במשתלה א'.

ב. מצאו את הערך של a .

כעבור 17 שבועות מתחילת השתילה, בשתי המשתלות הפסיקו את השתילה והחלו למכור את הצמחים.

מאותו היום שבו החלו למכור, קטן מספר הצמחים במשתלה ב' בכל שבוע באחוז קבוע.

כעבור 5 שבועות מן היום שבו החלו למכור, היה מספר הצמחים במשתלה ב' 53% ממספר הצמחים בתחילת המכירה.

ג. מצאו בכמה אחוזים קטן מספר הצמחים במשתלה ב' בכל שבוע.

מאותו היום שבו החלו למכור, קטן מספר הצמחים במשתלה א' בכל שבוע ב־ 8%.

ד. מצאו כעבור כמה זמן מן היום שבו החלו למכור, היה מספר הצמחים במשתלה א' שווה למספר הצמחים במשתלה ב'.

פתרון מלא

סעיף א

במשתלה ב' מספר הצמחים גדל ב־10% בכל שבוע, ובמשתלה א' רק ב־5%, כלומר משתלה ב' גדלה מהר יותר.

אם היה $a \geq 600$, משתלה ב' הייתה מתחילה עם לא פחות צמחים וגם גדלה מהר יותר, כלומר לכל $t > 0$:

$$a \cdot 1.1^t > 600 \cdot 1.05^t$$

(כי $1.1^t > 1.05^t$ לכל $t > 0$, וגם $a \geq 600$; מכפלה של מספרים חיוביים גדולים יותר גדולה יותר.)

ואז מספר הצמחים בשתי המשתלות לא היה משתווה אף פעם – בסתירה לנתון. לכן במשתלה ב' התחילו עם פחות צמחים: $a < 600$.

תשובה: טענה I נכונה: $a < 600$.

סעיף ב

לפי $f(t) = f(0) \cdot q^t$ (t בשבועות):

$$A(t) = 600 \cdot 1.05^t,$$
$$B(t) = a \cdot 1.1^t$$

אחרי 17 שבועות $B(17) = 2A(17)$:

$$a \cdot 1.1^{17} = 2 \cdot 600 \cdot 1.05^{17}$$
$$a = \frac{1200 \cdot 1.05^{17}}{1.1^{17}}$$

$$a = 1200 \cdot \left(\frac{1.05}{1.1}\right)^{17} \approx 544$$

תשובה: $a \approx 544$

סעיף ג

נסמן ב־q את הגורם השבועי במשתלה ב׳ בתקופת המכירה. אחרי 5 שבועות נשארו 53% מהמספר בתחילת המכירה:

$$B_0 \cdot q^5 = 0.53\,B_0 \;\Rightarrow\; q^5 = 0.53$$
$$q = \sqrt[5]{0.53} \approx 0.88076$$

הירידה בכל שבוע: $1 - 0.88076 \approx 0.119$, כלומר כ־12%.

תשובה: בכ־12% בכל שבוע (בדיוק: כ־11.92%).

סעיף ד

בתחילת המכירה (אחרי 17 שבועות) במשתלה א׳ היו $600 \cdot 1.05^{17} \approx 1375.2$ צמחים, ובמשתלה ב׳ – פי 2 מזה: $1200 \cdot 1.05^{17} \approx 2750.4$.

נמדוד את t (בשבועות) מתחילת המכירה. במשתלה א׳ $q = 1 - 0.08 = 0.92$, ובמשתלה ב׳ $q = \sqrt[5]{0.53}$:

$$600 \cdot 1.05^{17} \cdot 0.92^{\,t}$$
$$= 1200 \cdot 1.05^{17} \cdot 0.88076^{\,t}$$

נחלק את שני האגפים ב־$600 \cdot 1.05^{17}$:

$$0.92^{\,t} = 2 \cdot 0.88076^{\,t}$$
$$\left(\frac{0.92}{0.88076}\right)^{t} = 2$$
$$t = \frac{\log 2}{\log \frac{0.92}{0.88076}} \approx 15.9$$

(בדיקה: אחרי 15.9 שבועות בשתי המשתלות יש כ־365 צמחים.)

שימו לב: במפתח של משרד החינוך כתוב „כ־16 ימים", אבל כל הנתונים בשאלה הם בשבועות – התשובה היא כ־16 שבועות.

תשובה: כעבור כ־16 שבועות (15.9).

בגרות חורף תשפ״ה (2025) • שאלה 3

3. אמיר קנה גלגל ים ומזרן ים.

ביום הקנייה נפח הגלגל היה $4,900$ סמ״ק ונפח המזרן היה $9,800$ סמ״ק.

עקב איבוד אוויר, נפח הגלגל ונפח המזרן קטנו באחוז קבוע בכל יום (כל אחד מהם באחוז אחר).

כעבור 7 ימים מיום הקנייה היה נפח הגלגל שווה לנפח המזרן.

א. קבעו בעבור כל אחת מן הטענות I–II אם היא נכונה או לא נכונה.

I. כעבור 6 ימים מיום הקנייה היה נפח הגלגל גדול מנפח המזרן.

II. כעבור 8 ימים מיום הקנייה היה נפח הגלגל גדול מנפח המזרן.

נתון כי נפח הגלגל קטֵן ב־ 4% בכל יום.

ב. מצאו את האחוז שבו נפח המזרן קטֵן בכל יום.

כעבור t ימים מיום הקנייה היה נפח המזרן $\frac{1}{3}$ מנפח הגלגל.

ג. מצאו את הערך של t.

לאחר כמה שבועות החליט אמיר לנפח את המזרן.

במהלך הניפוח גדל נפח המזרן בכל דקה ב־ 23%.

בסיום הניפוח היה נפח המזרן גדול פי 7.5 מן הנפח שלו בתחילת הניפוח.

ד. מצאו את מספר הדקות שנמשך ניפוח המזרן.

פתרון מלא

סעיף א

ביום הקנייה נפח המזרן (9,800) גדול מנפח הגלגל (4,900), ואחרי 7 ימים הנפחים שווים. לכן נפח המזרן קטן מהר יותר (באחוז גדול יותר) מנפח הגלגל.

נסמן ב־q_1 ו־q_2 את מנות הדעיכה של הגלגל ושל המזרן. מהשוויון אחרי 7 ימים:

$$4900\,q_1^7 = 9800\,q_2^7$$

$$\Rightarrow \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^7 = 2 \;\Rightarrow\; q_1 > q_2$$

כלומר נפח הגלגל קטן לאט יותר. עד היום ה־7 נפח הגלגל קטן מנפח המזרן, ואחרי היום ה־7 הוא גדול ממנו.

I. לא נכונה – אחרי 6 ימים (לפני השוויון) נפח הגלגל עדיין קטן מנפח המזרן.

II. נכונה – אחרי 8 ימים (אחרי השוויון) נפח הגלגל גדול מנפח המזרן.

(בדיקה עם המספרים מסעיף ב: אחרי 6 ימים $4900\cdot 0.96^6 \approx 3836$ לעומת $9800\cdot 0.8695^6 \approx 4235$.)

תשובה: I – לא נכונה, II – נכונה.

סעיף ב

נפח הגלגל קטן ב־4% בכל יום, לכן $q_1 = 0.96$. נשתמש בשוויון אחרי 7 ימים:

$$4900\cdot 0.96^7 = 9800\cdot q_2^7$$

$$q_2^7 = \frac{0.96^7}{2} \;\Rightarrow\; q_2 = \frac{0.96}{\sqrt[7]{2}}$$
$$\approx 0.8695$$

בכל יום נפח המזרן מוכפל ב־0.8695, כלומר קטן ב־$1 - 0.8695 = 0.1305$.

תשובה: בכ־13.05% בכל יום

סעיף ג

אחרי t ימים נפח המזרן הוא שליש מנפח הגלגל:

$$9800 \cdot 0.8695^t = \frac{1}{3} \cdot 4900 \cdot 0.96^t$$
$$\left(\frac{0.8695}{0.96}\right)^t = \frac{4900}{3 \cdot 9800}$$
$$= \frac{1}{6}$$

נוציא ℓn משני האגפים:

$$t = \frac{\ell n \, \frac{1}{6}}{\ell n \, \frac{0.8695}{0.96}} \approx 18.1$$

תשובה: $t \approx 18.1$ ימים

סעיף ד

בכל דקה הנפח גדל ב־23%, לכן $q = 1.23$. נסמן ב־m את מספר הדקות. בסיום הנפח גדול פי 7.5 מהנפח בהתחלה (M_0):

$$M_0 \cdot 1.23^m = 7.5 M_0$$
$$1.23^m = 7.5 \;\Rightarrow\; m = \frac{\ell n \, 7.5}{\ell n \, 1.23}$$
$$\approx 9.733$$

תשובה: כ־9.73 דקות

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 3

3. מתחילת שנת 2018, כמות הדבש בכוורת דבורים מסוימת קטנה בכל חודש באחוז קבוע.

לאחר 8 חודשים כמות הדבש בכוורת הייתה 45% מכמות הדבש בתחילת שנת 2018.

א. מצאו בכמה אחוזים קטנה כמות הדבש בכל חודש.

ב. מצאו בכמה אחוזים קטנה כמות הדבש בכוורת כעבור 10 חודשים מתחילת שנת 2018.

ג. מצאו כעבור כמה חודשים מתחילת שנת 2018 קטנה כמות הדבש ב־ 33% בהשוואה לתחילת השנה.

מתחילת שנת 2019 והלאה כמות הדבש בכוורת גדלה בכל חודש באחוז קבוע.

בתחילת שנת 2019 הייתה בכוורת כמות של k ק"ג דבש.

הפונקצייה $f(t) = k \cdot (1.05)^t$ מתארת את כמות הדבש בכוורת (בק"ג) כפונקצייה של הזמן (בחודשים).

בתחילת שנת 2018 הייתה בכוורת כמות של 600 ק"ג דבש.

ד. מצאו את כמות הדבש שהייתה בכוורת בתחילת שנת 2021.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן ב־q את הגורם החודשי. אחרי 8 חודשים נשארו 45% מהכמות ההתחלתית M_0:

$$M_0 \cdot q^8 = 0.45\,M_0 \;\Rightarrow\; q^8 = 0.45$$

$$q = \sqrt[8]{0.45} \approx 0.905$$

הירידה בכל חודש: $1 - 0.905 = 0.095$, כלומר 9.5%.

תשובה: בכ־9.5% בכל חודש.

סעיף ב

אחרי 10 חודשים נשאר מהכמות ההתחלתית החלק:

$$q^{10} = 0.45^{\frac{10}{8}} \approx 0.3686$$

כלומר נשארו כ־36.86% מהכמות, ולכן הכמות קטנה ב־$100\% - 36.86\% = 63.14\%$.

תשובה: בכ־63.14%.

סעיף ג

קטנה ב־33%, כלומר נשארו 67%:

$$q^{\,t} = 0.67$$

$$t = \frac{\log 0.67}{\log 0.905} \approx 4.01$$

תשובה: כעבור כ־4 חודשים.

סעיף ד

נמצא קודם את k – כמות הדבש בתחילת 2019, כלומר 12 חודשים אחרי תחילת 2018, כשהכמות עוד קטנה:

$$k = 600 \cdot q^{12} = 600 \cdot 0.45^{\frac{12}{8}}$$

$$\approx 181.12$$

מתחילת 2019 הכמות גדלה לפי $f(t) = k \cdot 1.05^t$. תחילת 2021 היא 24 חודשים אחרי תחילת 2019:

$$f(24) = 181.12 \cdot 1.05^{24} \approx 584.1$$

תשובה: כ־584 ק"ג דבש.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 3

3. נתונות שתי דירות – דירה א' ודירה ב'.

בתחילת שנת 2014 היה הערך של דירה א' 980,000 שקלים והערך של דירה ב' היה 620,000 שקלים.

הערך של דירה א' גדל בכל שנה ב־ 7% , והערך של דירה ב' גדל בכל שנה פי q .

כעבור מספר מסוים של שנים היה הערך של דירה א' שווה לערך של דירה ב'.

א. לפניכם שלוש טענות (I)–(III) . קבעו מהי הטענה הנכונה. נמקו את קביעתכם.

$q < 1.07$ (I) $\quad q = 1.07$ (II) $\quad q > 1.07$ (III)

נתון כי בתחילת שנת 2024 היה הערך של דירה א' שווה לערך של דירה ב'.

ב. **(1)** מצאו מה היה הערך של דירה א' בתחילת שנה זו.

(2) מצאו בכמה אחוזים גדל הערך של דירה ב' בכל שנה.

על פי הצפי, מתחילת שנת 2024 ואילך הערך של דירה ב' עתיד לרדת בכל שנה באחוז שקטן פי 1.5 מן האחוז שמצאתם בתת־סעיף ב(2).

ג. על פי צפי זה, בתחילת איזו שנה עתיד לרדת לראשונה הערך של דירה ב' בהשוואה לערך שהיה לה בתחילת שנת 2014 ?

פתרון מלא

סעיף א

בתחילת 2014 הערך של דירה א' (980,000) גדול מהערך של דירה ב' (620,000). אחרי מספר שנים הערכים שווים – כלומר הערך של דירה ב' „השיג" את הערך של דירה א'.

זה אפשרי רק אם הערך של דירה ב' גדל מהר יותר, כלומר מנת הגדילה שלה גדולה יותר:

$$q > 1.07$$

(אם $q = 1.07$ היחס בין הערכים נשאר קבוע, ואם $q < 1.07$ הפער רק גדל.)

תשובה: טענה III: $q > 1.07$

סעיף ב (1)

מתחילת 2014 עד תחילת 2024 עברו 10 שנים:

$$M_A(10) = 980000 \cdot 1.07^{10}$$
$$\approx 1{,}927{,}808$$

תשובה: כ־1,927,808 שקלים

סעיף ב (2)

בתחילת 2024 הערך של דירה ב' שווה לערך של דירה א':

$$620000 \cdot q^{10} = 1927808$$
$$q^{10} = \frac{1927808}{620000} \approx 3.1094$$
$$q = \sqrt[10]{3.1094} \approx 1.12$$

כלומר הערך של דירה ב' גדל ב־12% בכל שנה.

תשובה: ב־12% בכל שנה

סעיף ג

האחוז החדש קטן פי 1.5 מ־12%: $\frac{12\%}{1.5} = 8\%$. הערך יורד ב־8% בכל שנה, לכן $q = 0.92$.

נסמן ב־t את מספר השנים מתחילת 2024 ונחפש מתי הערך יקטן מ־620,000 (הערך בתחילת 2014):

$$1927808 \cdot 0.92^{t} < 620000$$

$$0.92^{t} < \frac{620000}{1927808} \approx 0.3216$$

נוציא ℓn (ונהפוך את סימן אי־השוויון, כי $\ell n\, 0.92 < 0$):

$$t > \frac{\ell n\, 0.3216}{\ell n\, 0.92} \approx 13.6$$

בתחילת כל שנה t הוא מספר שלם, לכן לראשונה בעבור $t = 14$: $2024 + 14 = 2038$.

(בדיקה: $t = 13$: כ־652,100 – עדיין גדול; $t = 14$: כ־599,900 – קטן.)

תשובה: בתחילת שנת 2038

בגרות חורף תשפ״ד (2024) • שאלה 3

3. בים הצפוני יש שני קרחונים A ו־ B .

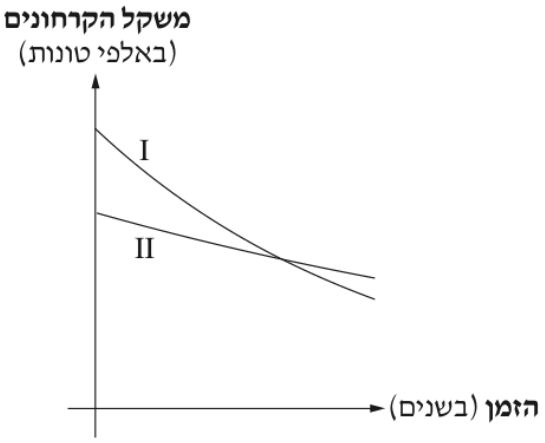
במשך השנים הקרחונים מפשירים ומאבדים ממשקלם.

חוקרת מדדה את המשקל של כל אחד מן הקרחונים

בכל קיץ במשך 10 שנים.

לפניכם סרטוט המתאר את המשקל

של כל קרחון (באלפי טונות) לפי שנים.



א. מבין הגרפים I–II , קבעו איזה גרף מתאים

לקרחון שקצב הפשרתו מהיר יותר.

נמקו את קביעתכם.

הפונקצייה $f(t) = 7 \cdot (0.96)^t$ מתארת את המשקל של קרחון A בכל שנה.

הפונקצייה $g(t) = 10 \cdot (0.91)^t$ מתארת את המשקל של קרחון B בכל שנה.

ב. קבעו בנוגע לכל פונקצייה מהו הגרף המתאר אותה. נמקו את קביעותיכם.

ג. המשקל של איזה משני הקרחונים היה גדול יותר לאחר 7 שנים מתחילת המדידות?

ד. מצאו לאחר כמה שנים מתחילת המדידות היה המשקל של קרחון A שווה למשקל של קרחון B .

החוקרת בדקה גם את מספר כלבי הים באזור זה.

היא גילתה שמספר כלבי הים באזור זה גדל בכל שנה באחוז קבוע.

לאחר 10 שנים מתחילת המדידות היה מספר כלבי הים גדול פי 1.5 ממספרם בתחילת המדידות.

ה. מצאו בכמה אחוזים גדל מספר כלבי הים בכל שנה.

פתרון מלא

סעיף א

בתחילת המדידות הקרחון של גרף I כבד יותר (הגרף מתחיל גבוה יותר), אבל אחרי נקודת החיתוך הוא כבר קל יותר. כלומר הוא איבד משקל מהר יותר.

(אם קצב ההפשרה שלו היה איטי יותר או שווה, הוא היה נשאר כבד יותר כל הזמן, והגרפים לא היו נחתכים.)

תשובה: גרף I – הוא מתחיל גבוה יותר ומסיים נמוך יותר.

סעיף ב

בתחילת המדידות ($t = 0$):

$$f(0) = 7 \cdot 0.96^0 = 7$$
$$g(0) = 10 \cdot 0.91^0 = 10$$

$g(0) > f(0)$, לכן $g(t)$ מתחיל גבוה יותר – גרף I, ו־$f(t)$ – גרף II.

זה מתאים גם לסעיף א: ב־$g(t)$ המשקל קטן ב־9% בכל שנה, וב־$f(t)$ רק ב־4%, כלומר $g(t)$ יורדת מהר יותר.

תשובה: $g(t)$ – גרף I, $f(t)$ – גרף II.

סעיף ג

$$f(7) = 7 \cdot 0.96^7 \approx 5.26$$

$$g(7) = 10 \cdot 0.91^{7} \approx 5.17$$

$f(7) > g(7)$, לכן לאחר 7 שנים קרחון A כבד יותר.

תשובה: קרחון A ($5.26 > 5.17$ **אלפי טונות).**

סעיף ד

$$7 \cdot 0.96^{\,t} = 10 \cdot 0.91^{\,t}$$

$$\left(\frac{0.96}{0.91}\right)^{t} = \frac{10}{7}$$

$$t = \frac{\log \frac{10}{7}}{\log \frac{0.96}{0.91}} \approx 6.67$$

תשובה: לאחר כ־6.67 שנים.

סעיף ה

נסמן ב־q את הגורם השנתי. אחרי 10 שנים מספר כלבי הים גדל פי 1.5:

$$N_0 \cdot q^{10} = 1.5\,N_0 \;\Rightarrow\; q^{10} = 1.5$$

$$q = \sqrt[10]{1.5} \approx 1.0414$$

כלומר מספר כלבי הים גדל בכל שנה בכ־4.14%.

תשובה: בכ־4% בכל שנה (4.14%).

בגרות קיץ תשפ״ג (2023) – מועד ב׳ • שאלה 3

3. אחד הבנקים מלווה כסף לגופים מסחריים בריבית קבועה.

א. הנהלת הבנק קבעה ריבית של 1.45% לשנה.

(1) חברת "היי־טק" לוותה $1{,}000{,}000$ שקלים לשנתיים.

מהו גובה הסכום שהיה על החברה להחזיר לבנק בתום השנתיים?

(2) חברת "התעשייה" לוותה $1{,}000{,}000$ שקלים ל־ 3 חודשים.

מהו גובה הסכום שהיה עליה להחזיר לבנק בתום 3 החודשים?

(3) חברת "הבנייה" לוותה $2{,}000{,}000$ שקלים, והחזירה לבנק בתום תקופת ההלוואה סכום של $2{,}103{,}353.05$ שקלים. מה היה משך תקופת ההלוואה?

הנהלת הבנק התחלפה, ואז הציע הבנק ללקוחותיו המסחריים שני מסלולי הלוואה חדשים לשנתיים:

מסלול **1** – מסלול בריבית משתנה: 1% ריבית לשנה הראשונה, ו־ 2.2% ריבית לשנה השנייה.

מסלול **2** – מסלול בריבית שנתית קבועה לשנתיים.

ב. חברה לווה סכום מסוים.

מה צריכה להיות הריבית השנתית במסלול **2**, כדי שבתום השנתיים יקבל הבנק מן החברה את אותו סכום החזר בשני המסלולים?

פרטו את חישוביכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

ריבית של 1.45% לשנה פירושה שבכל שנה הסכום מוכפל ב־$q = 1.0145$. נשתמש בנוסחה $M(t) = M_0 \cdot q^t$ עם $M_0 = 1{,}000{,}000$ ו־$t = 2$:

$$M(2) = 1{,}000{,}000 \cdot 1.0145^2$$

$$M(2) = 1{,}029{,}210.25$$

תשובה: 1,029,210.25 שקלים

סעיף א (2)

3 חודשים הם רבע שנה, כלומר $t = \frac{3}{12} = 0.25$:

$$M(0.25) = 1{,}000{,}000 \cdot 1.0145^{0.25}$$

$$M(0.25) \approx 1{,}003{,}605.45$$

תשובה: כ־1,003,605.45 שקלים

סעיף א (3)

נסמן ב־t את משך ההלוואה בשנים:

$$2{,}000{,}000 \cdot 1.0145^t = 2{,}103{,}353.05$$

$$1.0145^t = 1.05168$$

נוציא ℓn משני האגפים:

$$t = \frac{\ell n\, 1.05168}{\ell n\, 1.0145} \approx 3.5$$

תשובה: 3.5 שנים (שלוש שנים וחצי)

סעיף ב

נסמן ב־M_0 את הסכום שהחברה לוותה.

במסלול 1 הסכום מוכפל בשנה הראשונה ב־1.01 ובשנה השנייה ב־1.022:

$$M_0 \cdot 1.01 \cdot 1.022 = 1.03222\, M_0$$

במסלול 2 הסכום מוכפל בכל שנה באותו גורם q:

$$M_0 \cdot q^2$$

נשווה את סכומי ההחזר:

$$M_0 \cdot q^2 = 1.03222\, M_0$$

$$q^2 = 1.03222 \;\Rightarrow\; q = \sqrt{1.03222}$$

$$\approx 1.01598$$

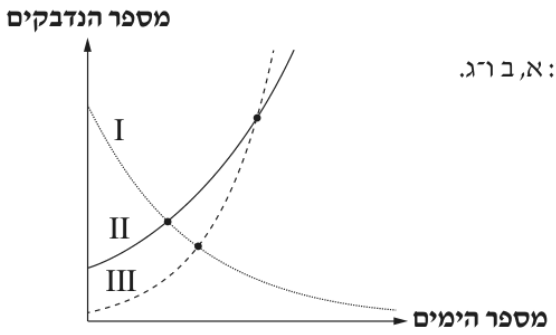
כלומר בכל שנה הסכום גדל בכ־1.6% – זו הריבית השנתית הדרושה במסלול 2.

(הסכום M_0 מצטמצם, ולכן התשובה לא תלויה בגובה ההלוואה.)

תשובה: כ־1.6% לשנה (1.598%)

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 3

3. לפניכם גרפים של שלוש פונקציות מעריכיות



המתארות את מספר הנדבקים בנגיף הקורונה לפי ימים בשלושה יישובים: א, ב ו־ג.

הפונקצייה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום

ביישוב א היא $M(t) = 10 \cdot (1.5)^t$,

והפונקצייה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום

ביישוב ב היא $G(t) = 100 \cdot (1.2)^t$.

א. מבין הגרפים I–III קבעו איזה גרף מתאר

את מספר הנדבקים ביישוב א, ואיזה גרף מתאר

את מספר הנדבקים ביישוב ב. נמקו את תשובותיכם.

ב. מה היה מספר הנדבקים ביישוב ב לאחר 8 ימים?

ג. מצאו לאחר כמה ימים היה מספר הנדבקים ביישוב א שווה למספר הנדבקים ביישוב ב.

בזמן הבדיקה הראשונית של יישובים א ו־ב, היה מספר הנדבקים ביישוב ג גדול פי 40 ממספר הנדבקים ביישוב ב, לכן הוחלט לתת ביישוב ג תרופה ניסיונית. בעקבות כך קטן מספר הנדבקים ביישוב ג באופן מעריכי.

לאחר 8 ימים היו ביישוב ג 107 נדבקים.

ד. חשבו בכמה אחוזים ירד מספר הנדבקים בכל יום ביישוב ג.

פתרון מלא

סעיף א

שתי הפונקציות הן מהצורה $M(t) = M_0 \cdot q^t$.

ביישוב א: $M_0 = 10$ ו־$q = 1.5 > 1$ – פונקציה עולה שמתחילה ב־10.

ביישוב ב: $M_0 = 100$ ו־$q = 1.2 > 1$ – פונקציה עולה שמתחילה ב־100.

גרף I יורד, לכן הוא לא מתאר אף אחד מהיישובים א, ב.

מבין שני הגרפים העולים, גרף II מתחיל גבוה יותר (נקודת החיתוך עם הציר האנכי גבוהה יותר), לכן הוא מתאים ליישוב ב (100 נדבקים בהתחלה). גרף III מתחיל נמוך יותר וגדל מהר יותר ($1.5 > 1.2$), ולכן עוקף בהמשך את גרף II – הוא מתאים ליישוב א.

תשובה: יישוב א: גרף III
יישוב ב: גרף II

סעיף ב

$$G(8) = 100 \cdot 1.2^8$$
$$G(8) = 100 \cdot 4.2998 \approx 430$$

תשובה: בערך 430 נדבקים

סעיף ג

נשווה בין שתי הפונקציות:

$$10 \cdot 1.5^t = 100 \cdot 1.2^t$$

נחלק ב־$10 \cdot 1.2^t$:

$$\frac{1.5^t}{1.2^t} = 10$$

$$\left(\frac{1.5}{1.2}\right)^t = 10$$
$$1.25^t = 10$$

נוציא ℓn משני האגפים:

$$t \cdot \ell n\, 1.25 = \ell n\, 10$$
$$t = \frac{\ell n\, 10}{\ell n\, 1.25} \approx 10.32$$

(בדיקה: $10 \cdot 1.5^{10.32} \approx 100 \cdot 1.2^{10.32} \approx 656$ נדבקים.)

תשובה: לאחר כ־10.32 ימים

סעיף ד

בבדיקה הראשונה ($t = 0$) היו ביישוב ב 100 נדבקים, וביישוב ג פי 40:

$$M_0 = 40 \cdot 100 = 4000$$

לאחר 8 ימים היו 107 נדבקים:

$$4000 \cdot q^8 = 107$$
$$q^8 = \frac{107}{4000} = 0.02675$$
$$q = \sqrt[8]{0.02675} \approx 0.6359$$

בכל יום מספר הנדבקים מוכפל ב־0.6359, כלומר נשאר 63.59% מהמספר. אחוז הירידה:

$$100\% - 63.59\% = 36.41\%$$

תשובה: ירד בכ־36.41% בכל יום

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 3

3. בבנק מסחרי יש שני סוגים של חוב: חוב של הבנק ללקוח (כאשר הלקוח מפקיד כסף בבנק) וחוב של הלקוח לבנק (כאשר הבנק מלווה כסף ללקוח). בבנק מסחרי מסוים, כאשר הבנק חייב כסף ללקוח, הוא משלם ללקוח ריבית בגובה של 1.5% מן החוב בכל שנה.

בתחילת שנת 2023 הפקיד דני בבנק $10,000$ ש"ח.

א. איזו מבין הפונקציות 1–4 שלפניכם מתארת את גובה החוב של הבנק לדני לפי השנים (t) ?

(1) $f(t)=10,000\cdot 1.015^t$

(2) $f(t)=10,150\cdot 1.02^t$

(3) $f(t)=10,150\cdot 2^t$

(4) $f(t)=10,000\cdot 1.5^t$

ב. כמה כסף יהיה הבנק חייב לדני כעבור 20 שנה מן היום שבו הפקיד דני את הכסף?

כאשר הבנק הזה מלווה כסף ללקוח, הוא גובה ממנו ריבית של 15% מגובה החוב בכל שנה.

בתחילת שנת 2023 לוותה יעל $1,000$ ש"ח מן הבנק.

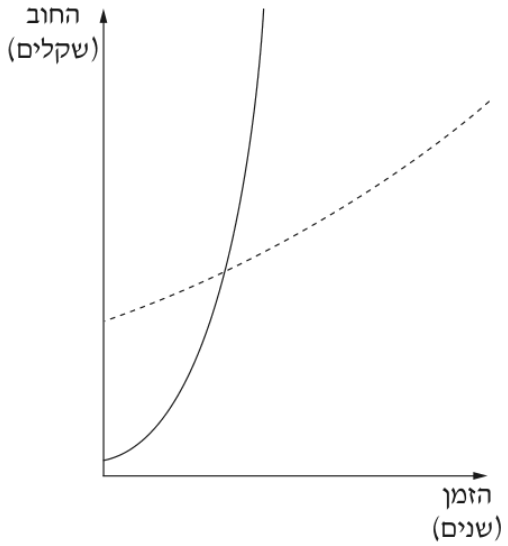
ג. מצאו את הפונקצייה $g(t)$ המתארת את גובה החוב של יעל לבנק לפי השנים (t) .

ד. בסרטוט שבסוף השאלה מתוארים הגרפים של הפונקצייה $f(t)$ ושל הפונקצייה $g(t)$.

איזו פונקצייה מתאר הקו המקווקו? נמקו.

בתחילת כל שנה הבנק מברר את המאזן שלו: כמה כסף לקוחותיו חייבים לו, וכמה כסף הוא חייב ללקוחותיו.

ה. בתחילתה של איזו שנה יגלה הבנק שהחוב שלו לדני קטן מן החוב של יעל לבנק?



פתרון מלא

סעיף א

לפי $f(t)=f(0)\cdot q^t$:

• בתחילת 2023 ($t=0$) החוב הוא סכום ההפקדה: $f(0)=10,000$. לכן פונקציות (2) ו־(3), שמתחילות ב־10,150, נפסלות.

• ריבית של 1.5% בשנה פירושה שבכל שנה החוב מוכפל ב־$q=1+0.015=1.015$. פונקציה (4) מתאימה לגידול של 50% בשנה.

תשובה: פונקציה (1): $f(t) = 10{,}000 \cdot 1.015^t$

סעיף ב

$$f(20) = 10{,}000 \cdot 1.015^{20}$$
$$\approx 13{,}468.55$$

תשובה: כ־13,468.55 ש"ח.

סעיף ג

הסכום ההתחלתי 1,000 ש"ח, וריבית של 15% בשנה, כלומר $q = 1 + 0.15 = 1.15$:

$$g(t) = 1000 \cdot 1.15^t$$

תשובה: $g(t) = 1000 \cdot 1.15^t$

סעיף ד

בנקודה $t = 0$: $f(0) = 10{,}000$ ו־$g(0) = 1000$. הקו המקווקו חותך את ציר ה־y גבוה יותר, ולכן הוא מתאר את $f(t)$.

זה מתאים גם לקצב הגידול: $f(t)$ גדלה ב־1.5% בלבד בשנה (גרף מתון), ו־$g(t)$ ב־15% (גרף תלול).

תשובה: $f(t)$ **– החוב של הבנק לדני.**

סעיף ה

נמצא מתי שני החובות שווים (נקודת החיתוך של הגרפים):

$$1000 \cdot 1.15^t = 10{,}000 \cdot 1.015^t$$
$$\left(\frac{1.15}{1.015}\right)^t = 10$$
$$t = \frac{\log 10}{\log \frac{1.15}{1.015}} \approx 18.44$$

אחרי נקודת החיתוך החוב של יעל גדול יותר (הגרף שלו תלול יותר). הבנק מברר את המאזן בתחילת כל שנה, כלומר עבור t שלם, והשלם הראשון אחרי 18.44 הוא $t = 19$:

$$f(19) \approx 13{,}270, \qquad g(19) \approx 14{,}232$$

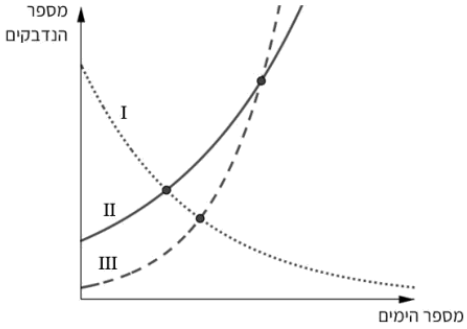
(ובתחילת השנה שלפני, $t = 18$: $f(18) \approx 13{,}073 > g(18) \approx 12{,}375$.)

$t = 19$ שנים אחרי תחילת 2023 הוא תחילת שנת $2023 + 19 = 2042$.

תשובה: בתחילת שנת 2042.

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 3

3. לפניך גרפים של שלוש פונקציות מעריכיות המתארות את מספר הנדבקים בנגיף הקורונה לפי ימים בשלושה יישובים.



הפונקציה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום ביישוב א' היא $M(t) = 10 \cdot (1.5)^t$,

וביישוב ב' היא $G(t) = 100 \cdot (1.2)^t$.

א. התאם לכל אחד מן היישובים א' וב' את גרף הפונקציה מבין הגרפים I – III . נמק.

ב. מה היה מספר הנדבקים ביישוב ב' לאחר 8 ימים?

ג. חשב לאחר כמה ימים מספר הנדבקים ביישוב א' וביישוב ב' היה שווה.

בזמן הבדיקה הראשונית של יישובים א' וב', ביישוב ג' מספר הנדבקים היה גדול פי 40 ממספר הנדבקים ביישוב ב', לכן הוחלט לתת ביישוב ג' תרופה ניסיונית ומספר הנדבקים קטן באופן מעריכי.
לאחר 8 ימים מספר הנדבקים ביישוב ג' היה רבע ממספר הנדבקים ביישוב ב'.

ד. חשב בכמה אחוזים ירד מספר הנדבקים בכל יום ביישוב ג'.

ה. הוחלט לסגור את בתי הספר ביישוב בו מספר הנדבקים יגיע ל- 600 .
האם יסגרו את בתי הספר באחד מיישובים אלו במהלך 10 הימים מהבדיקה הראשונית? נמק.

פתרון מלא

סעיף א

נשתמש בנוסחה $M(t) = M_0 \cdot q^t$: M_0 – הכמות ההתחלתית, q – גורם הגדילה.

ביישוב א': $M(t) = 10 \cdot 1.5^t$ – מתחילים ב־10 נדבקים, $q = 1.5 > 1$ (פונקציה עולה).

ביישוב ב': $G(t) = 100 \cdot 1.2^t$ – מתחילים ב־100 נדבקים, $q = 1.2 > 1$ (פונקציה עולה).

גרף I יורד, ולכן אינו מתאים לאף אחד מהם. מבין הגרפים העולים, גרף II מתחיל בערך גבוה יותר (100) וגרף III מתחיל בערך נמוך יותר (10) ועולה בקצב מהיר יותר (1.5 לעומת 1.2).

תשובה: יישוב א': גרף III
יישוב ב': גרף II

סעיף ב

$$G(8) = 100 \cdot 1.2^8$$
$$G(8) \approx 429.98 \approx 430$$

תשובה: כ־430 נדבקים

סעיף ג

נשווה בין שתי הפונקציות:

$$10 \cdot 1.5^t = 100 \cdot 1.2^t$$

נחלק ב־$10 \cdot 1.2^t$:

$$\left(\frac{1.5}{1.2}\right)^t = 10 \;\Rightarrow\; 1.25^t = 10$$

נוציא ℓn משני האגפים:

$$t \cdot \ell n\, 1.25 = \ell n\, 10$$

$$t = \frac{\ell n\, 10}{\ell n\, 1.25} \approx 10.32$$

(בדיקה: $G(10.32) \approx 656$ וגם $M(10.32) \approx 656$.)

שימו לב: בתשובות של מלומד מופיע 10.31 (קיצוץ); בעיגול נכון $t \approx 10.32$, כמו אצל גבע.

תשובה: לאחר כ־10.32 ימים

סעיף ד

ביישוב ג' בבדיקה הראשונית היו פי 40 נדבקים מאשר ביישוב ב':

$$N_0 = 40 \cdot 100 = 4000$$

לאחר 8 ימים מספר הנדבקים ביישוב ג' היה רבע ממספר הנדבקים ביישוב ב' (סעיף ב):

$$N(8) = \frac{1}{4} \cdot G(8) = \frac{1}{4} \cdot 429.98$$
$$\approx 107.5$$

נציב בנוסחה $N(t) = N_0 \cdot q^t$:

$$4000 \cdot q^8 = 107.5$$
$$q^8 = \frac{107.5}{4000} \approx 0.02687$$
$$q = \sqrt[8]{0.02687} \approx 0.6363$$

גורם הדעיכה $q = 1 - \frac{p}{100}$, לכן:

$$\frac{p}{100} = 1 - 0.6363 = 0.3637$$
$$p \approx 36.37\%$$

שימו לב: בפתרון של גבע מעגלים קודם את $N(8)$ ל־108 ומקבלים $q = 0.6367$ ו־36.33%. בלי עיגול ביניים מתקבל 36.37% – כמו בתשובות של מלומד.

תשובה: ירד בכ־36.37% בכל יום

סעיף ה

נבדוק כל יישוב במהלך 10 הימים:

יישוב א':

$$M(10) = 10 \cdot 1.5^{10} \approx 576.7$$

$M(t)$ עולה, ולכן במהלך 10 הימים מספר הנדבקים לא הגיע ל־600 – בתי הספר ביישוב א' לא ייסגרו.

יישוב ב':

$$G(10) = 100 \cdot 1.2^{10} \approx 619.2$$

$619.2 > 600$, ולכן ביישוב ב' יסגרו את בתי הספר. (המספר מגיע ל־600 כאשר $1.2^t = 6$, כלומר $t = \frac{\ell n\, 6}{\ell n\, 1.2} \approx 9.83$ – ביום העשירי.)

יישוב ג': כבר בבדיקה הראשונית היו 4,000 נדבקים – יותר מ־600, ולכן בתי הספר ביישוב ג' נסגרו כבר בתחילת התקופה.

תשובה: כן – ביישוב ב' (ביום העשירי) וביישוב ג' (כבר מההתחלה).
ביישוב א' לא.

בגרות חורף תשפ״ב (2022) • שאלה 3

3. בתחילת שנת 2020 התגלה נגיף ביישוב מסוים.

מספר החולים ביישוב עלה בקצב מעריכי קבוע.

כשהתגלה הנגיף היו ביישוב 104 חולים בנגיף, וכעבור חמישה חודשים היו ביישוב 200 חולים בנגיף.

ביום שבו אובחנו ביישוב 200 חולים בנגיף, חוסנה כל האוכלוסייה ביישוב נגד אותו הנגיף.

מאותו יום, ירד מספר החולים בנגיף ביישוב בקצב מעריכי קבוע.

אחרי 3 חודשים ממתן החיסון, היה מספר החולים בנגיף ביישוב 40% ממספרם לפני מתן החיסון.

א. מזמן גילוי הנגיף ועד למתן החיסון לאוכלוסיית היישוב, פי כמה עלה מספר החולים בנגיף בכל חודש?

ב. מצא את האחוז הקבוע שבו ירד מספר החולים בנגיף ביישוב בכל חודש מאז מתן החיסון.

ג. **(1)** כמה חודשים עברו מזמן גילוי הנגיף ועד היום שבו אובחנו 20 חולים בלבד בנגיף?

(2) אם האוכלוסייה ביישוב לא הייתה מתחסנת, וקצב העלייה במספר החולים לא היה משתנה, מה היה בערך מספר החולים ביישוב באותה תקופת זמן שמצאת בתת־סעיף ג(1)?

פתרון מלא

סעיף א

לפי $M(t) = M_0 \cdot q^t$, עם $M_0 = 104$ (ביום הגילוי) ו־$M(5) = 200$:

$$104 \cdot q^5 = 200$$
$$q^5 = \frac{200}{104} = \frac{25}{13}$$
$$q = \sqrt[5]{\frac{25}{13}} \approx 1.1397$$

תשובה: פי 1.1397 (בערך 1.14) בכל חודש

סעיף ב

מיום החיסון: $M_0 = 200$, ואחרי 3 חודשים נשאר 40% מזה, כלומר $0.4 \cdot 200 = 80$:

$$200 \cdot q^3 = 80$$
$$q^3 = 0.4$$
$$q = \sqrt[3]{0.4} \approx 0.7368$$

בכל חודש נשאר 73.68% מהחולים, לכן אחוז הירידה:

$$100\% - 73.68\% = 26.32\%$$

שימו לב: בתשובות של מלומד מופיע 26.31%; החישוב המדויק נותן $1 - \sqrt[3]{0.4} = 0.26319\ldots$, כלומר 26.32% (כמו בפתרון של גבע).

תשובה: ירד ב־26.32% בכל חודש

סעיף ג (1)

נמצא כמה זמן אחרי החיסון ירד מספר החולים ל־20:

$$200 \cdot 0.7368^t = 20$$
$$0.7368^t = 0.1$$

$$t \cdot \ell n\, 0.7368 = \ell n\, 0.1$$
$$t = \frac{\ell n\, 0.1}{\ell n\, 0.7368} \approx 7.54$$

לזה נוסיף את 5 החודשים מגילוי הנגיף ועד החיסון:

$$7.54 + 5 = 12.54$$

תשובה: כ־12.54 חודשים

סעיף ג (2)

בלי חיסון, הגדילה הייתה נמשכת עם $q = 1.1397$ במשך כל 12.54 החודשים, החל מ־104 חולים:

$$M(12.54) = 104 \cdot 1.1397^{12.54}$$
$$M(12.54) \approx 536$$

תשובה: בערך 536 חולים

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.