פונקציות מעריכיות – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 4 יחידות, כיתה י"ב (שאלון 472) • 19 שאלות

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=(3x^2-a)\cdot e^x$, המוגדרת לכל x.

a הוא פרמטר.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=1$.

א. מצאו את הערך של a.

הציבו $a=9$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ב–ה.

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

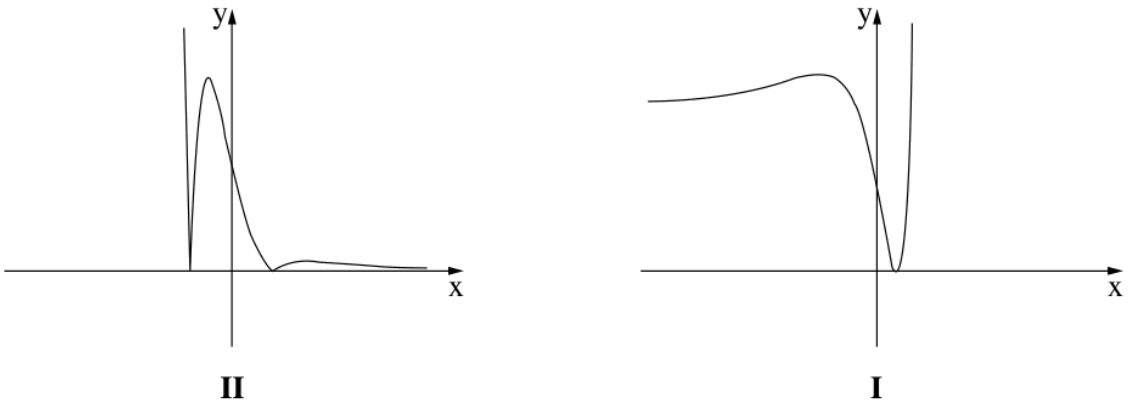
ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=|f(x)|$, המוגדרת לכל x.

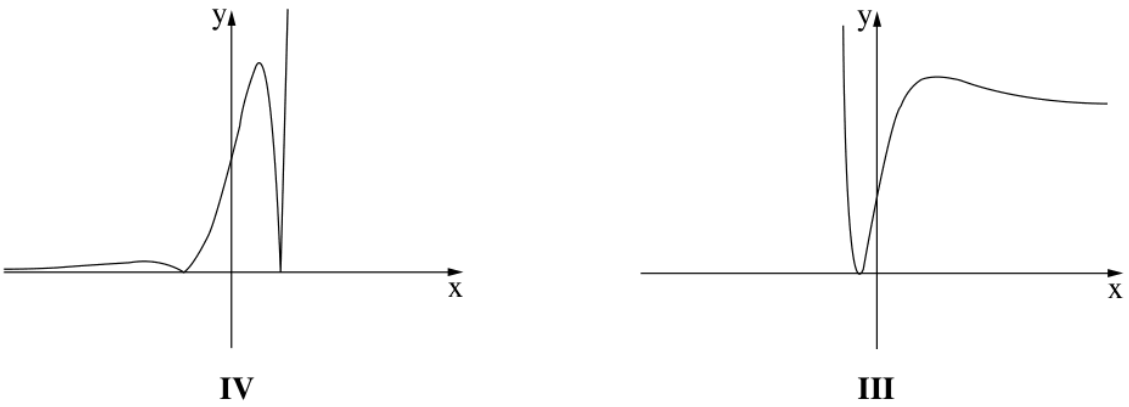
ה. **(1)** קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.



I

II



III

IV

פתרון מלא

סעיף א

נגזור לפי כלל המכפלה $(u\cdot v)'=u'v+uv'$:

$$f'(x)=6x\cdot e^x+\left(3x^2-a\right)e^x$$
$$f'(x)=\left(3x^2+6x-a\right)e^x$$

ל־$f(x)$ יש קיצון ב־$x=1$, לכן $f'(1)=0$:

$$(3+6-a)\,e^1=0$$

מכיוון ש־$e^1\neq 0$:

$$9-a=0\ \Rightarrow\ a=9$$

תשובה: $a=9$

סעיף ב

עם $a=9$:

$$f(x)=\left(3x^2-9\right)e^x$$
$$f'(x)=\left(3x^2+6x-9\right)e^x$$
$$f'(x)=3(x+3)(x-1)e^x$$

תמיד $e^x>0$, לכן $f'(x)=0$ כאשר $x=-3$ או $x=1$.

טבלת סימנים של $f'(x)$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<-3$	+	עולה ↗
$x=-3$	0	מקסימום
$-3<x<1$	−	יורדת ↘
$x=1$	0	מינימום
$x>1$	+	עולה ↗

נחשב את ערכי הפונקציה:

$$f(-3)=(27-9)e^{-3}=\frac{18}{e^3}\approx 0.9$$
$$f(1)=(3-9)e=-6e\approx -16.31$$

תשובה: מקסימום $\left(-3,\ \frac{18}{e^3}\right)\approx(-3,\ 0.9)$
מינימום $(1,\ -6e)\approx(1,\ -16.31)$

סעיף ג

חיתוך עם ציר ה־y – נציב $x=0$:

$$f(0)=(0-9)\cdot e^0=-9$$

חיתוך עם ציר ה־x – נפתור $f(x)=0$. מכיוון ש־$e^x>0$ תמיד:

$$3x^2-9=0\ \Rightarrow\ x^2=3\ \Rightarrow\ x=\pm\sqrt{3}$$

תשובה: עם ציר ה־y: $(0,-9)$
עם ציר ה־x: $\left(\sqrt{3},0\right)$, $\left(-\sqrt{3},0\right)$

סעיף ד

נשתמש בכל מה שמצאנו: נקודות קיצון, נקודות חיתוך, ובהתנהגות בקצוות:

כאשר $x \to -\infty$ הביטוי e^x שואף ל־0 מהר יותר משהביטוי $3x^2 - 9$ גדל, ולכן $f(x) \to 0$ מלמעלה – הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה אופקית משמאל. כאשר $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$.

סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

תשובה: ראו סקיצה.

אסימפטוטה $y = 0$ משמאל, מקסימום $(-3,\ 0.9)$, מינימום $(1,\ -16.31)$.

סעיף ה (1)

הגרף של $g(x) = |f(x)|$ מתקבל מהגרף של $f(x)$: החלקים שמעל ציר ה־x נשארים, והחלקים שמתחת לציר ה־x משתקפים כלפי מעלה.

לכן לגרף של $g(x)$:

• משמאל – גבעה נמוכה (גובה כ־0.9 ב־$x = -3$) ושואף ל־0.

• הגרף פוגש את ציר ה־x ב־$x = -\sqrt{3} \approx -1.73$.

• חיתוך עם ציר ה־y ב־$(0, 9)$ ו"גבעה" גבוהה עם שיא ב־$x = 1$ (גובה כ־16.31) – מימין לציר ה־y.

• הגרף פוגש שוב את ציר ה־x ב־$x = \sqrt{3}$, ואחריו הגרף עולה לאינסוף.

רק בגרף IV השיא הגבוה נמצא מימין לציר ה־y והגבעה הנמוכה משמאל – זה הגרף של $g(x)$.

תשובה: גרף IV.

סעיף ה (2)

נקודות הקיצון של $f(x)$ נשארות נקודות מקסימום של $g(x)$ (המינימום $(1, -6e)$ משתקף והופך למקסימום $((1, 6e))$.

בנוסף, בנקודות החיתוך עם ציר ה־x הערך של $g(x)$ הוא 0 – זה הערך הקטן ביותר האפשרי של ערך מוחלט, ולכן אלה נקודות מינימום.

תשובה: מקסימום: $(1,\ 6e)$ **,** $\left(-3,\ \frac{18}{e^3}\right)$

מינימום: $\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ **,** $\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=(a-4x)\cdot e^{2x-1}$, המוגדרת לכל x.

a הוא פרמטר.

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x=0$ הוא $\frac{16}{e}$.

א. מצאו את הערך של a.

הציבו $a=10$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על סעיפים ב–ו.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=4\cdot e^{2x-1}$, המוגדרת לכל x.

ד. הסבירו מדוע הפונקצייה $g(x)$ חיובית לכל x.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

ה. מצאו את שיעורי הנקודה A.

דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה־x.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי האנך, על ידי ציר ה־x ועל ידי ציר ה־y.

פתרון מלא

סעיף א

נגזור לפי כלל המכפלה (הנגזרת של e^{2x-1} היא $2e^{2x-1}$):

$$f'(x)=-4\cdot e^{2x-1}+(a-4x)\cdot 2e^{2x-1}$$
$$f'(x)=e^{2x-1}\,(2a-4-8x)$$

שיפוע המשיק בנקודה $x=0$ הוא $f'(0)$:

$$f'(0)=e^{-1}(2a-4)=\frac{2a-4}{e}$$
$$\frac{2a-4}{e}=\frac{16}{e}$$
$$\Rightarrow\ 2a-4=16\ \Rightarrow\ a=10$$

תשובה: $a=10$

סעיף ב (1)

$f(x)=(10-4x)\cdot e^{2x-1}$.

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$):

$$f(0)=10\cdot e^{-1}=\frac{10}{e}$$

חיתוך עם ציר ה־x ($y=0$): $e^{2x-1}>0$ לכל x, לכן רק הגורם השני יכול להתאפס:

$$10 - 4x = 0 \;\Rightarrow\; x = 2.5$$

תשובה: $\left(0,\, \frac{10}{e}\right)$ ו־$(2.5,\, 0)$

סעיף ב (2)

מסעיף א (עם $a = 10$):

$$f'(x) = e^{2x-1}(20 - 4 - 8x)$$
$$= e^{2x-1}(16 - 8x)$$
$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 16 - 8x = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$$

x	$2\,x < 2$		$x > 2$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	מקסימום	↘

(למשל $f'(0) = 16e^{-1} > 0$, $f'(3) = -8e^{5} < 0$.)

$$f(2) = (10 - 8) \cdot e^{3} = 2e^{3} \approx 40.17$$

תשובה: $(2,\, 2e^3)$ **– נקודת מקסימום**

סעיף ג

נשתמש בכל מה שמצאנו: חיתוך עם הצירים ב־$\left(0,\, \frac{10}{e}\right)$ וב־$(2.5, 0)$, מקסימום ב־$(2, 2e^3)$. משמאל הפונקציה עולה ומתקרבת לציר ה־x (כאשר $x \to -\infty$, $e^{2x-1} \to 0$), ומימין ל־$x = 2.5$ היא שלילית ויורדת.

סקיצה של f(x)

תשובה:

סקיצה של f(x)

סעיף ד

$g(x) = 4 \cdot e^{2x-1}$ היא מכפלה של המספר החיובי 4 בחזקה e^{2x-1}.

חזקה של e חיובית תמיד ($e^t > 0$ לכל t), ולכן $g(x) > 0$ לכל x.

תשובה: $4 > 0$ **ו־**$e^{2x-1} > 0$ **לכל** x**, לכן המכפלה חיובית.**

סעיף ה

נשווה בין שתי הפונקציות:

$$(10 - 4x) \cdot e^{2x-1} = 4 \cdot e^{2x-1}$$

נחלק ב־e^{2x-1} (שאינו אפס):

$$10 - 4x = 4 \;\Rightarrow\; x = 1.5$$
$$g(1.5) = 4 \cdot e^{3-1} = 4e^{2} \approx 29.56$$

תשובה: $A(1.5,\, 4e^2)$

סעיף ו

האנך עובר ב־$x = 1.5$. השטח נמצא מתחת לגרף $g(x)$ (שהוא חיובי, סעיף ד), בין $x = 0$ ל־$x = 1.5$:

השטח מתחת לגרף g(x)

פונקציה קדומה של e^{2x-1} היא $\frac{1}{2}e^{2x-1}$, לכן:

$$S = \int_0^{1.5} 4e^{2x-1}\,dx$$
$$= \left[2e^{2x-1}\right]_0^{1.5}$$
$$S = 2e^2 - 2e^{-1} = 2e^2 - \frac{2}{e} \approx 14.04$$

תשובה: $S = 2e^2 - \frac{2}{e} \approx 14.04$

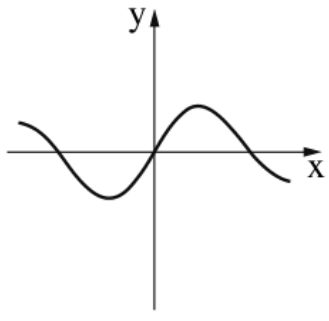
בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 4

4. הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות לכל x.

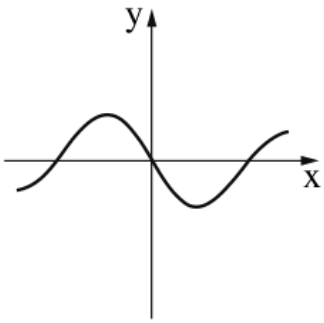
לפונקצייה $f(x)$ יש רק נקודת מינימום אחת ושתי נקודות מקסימום.

לפניכם שני גרפים, I–II. אחד מן הגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

בסרטוט של כל אחד מן הגרפים I–II מופיעות כל נקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה־ x.



I



II

א. קבעו איזה מן הגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון: $f(x)=\frac{6x^2}{e^{x^2+2}}$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

ג. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־ x.

פתרון מלא

סעיף א

לפונקציה $f(x)$ יש מינימום אחד ושני מקסימומים, לכן הנגזרת מתאפסת ב־3 נקודות, ובהן משנה סימן כך:

בנקודת מקסימום $f'(x)$ עוברת מ־$+$ ל־$-$, ובנקודת מינימום מ־$-$ ל־$+$. בין שני המקסימומים חייב להיות המינימום, ולכן סדר הסימנים של $f'(x)$ משמאל לימין הוא:

$$+\quad -\quad +\quad -$$

בגרף I: משמאל הגרף מעל ציר ה־x, אחר כך מתחתיו, אחר כך מעליו ובסוף מתחתיו – בדיוק הסדר $+,-,+,-$ (מקסימום, מינימום, מקסימום).

בגרף II הסדר הפוך: $+,-,+,-$ – זה מתאים לשני מינימומים ומקסימום אחד, בניגוד לנתון.

תשובה: גרף I.

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־x: $f(x)=0$. המכנה e^{x^2+2} תמיד חיובי, לכן מספיק שהמונה יתאפס:

$$6x^2=0 \;\Rightarrow\; x=0$$

תשובה: $(0,0)$

סעיף ג

הפונקציה מוגדרת לכל x (תחום סימטרי), ולכל x:

$$f(-x)=\frac{6(-x)^2}{e^{(-x)^2+2}}$$
$$f(-x)=\frac{6x^2}{e^{x^2+2}}=f(x)$$

לכן $f(x)$ פונקציה זוגית.

תשובה: $f(-x)=f(x)$ **לכל** x**, לכן** $f(x)$ **זוגית.**

סעיף ד

נגזור לפי נגזרת של מנה:

$$f'(x)=\frac{12x\,e^{x^2+2}-6x^2\cdot 2x\,e^{x^2+2}}{\left(e^{x^2+2}\right)^2}$$

נצמצם ב־e^{x^2+2}:

$$f'(x)=\frac{12x-12x^3}{e^{x^2+2}}$$
$$f'(x)=\frac{12x(1-x^2)}{e^{x^2+2}}$$

$f'(x)=0$: המכנה חיובי, לכן $12x(1-x^2)=0$, כלומר $x=0$ או $x=1$ או $x=-1$.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<-1$	$+$	↗
-1	0	מקסימום
$-1<x<0$	$-$	↘
0	0	מינימום
$0<x<1$	$+$	↗
1	0	מקסימום
$x>1$	$-$	↘

$$f(0)=0,$$
$$f(1)=f(-1)=\frac{6}{e^3}\approx 0.299$$

תשובה: $\min(0,0)$**,** $\max\left(-1,\frac{6}{e^3}\right)$ **,** $\max\left(1,\frac{6}{e^3}\right)$

סעיף ה

לפי מה שמצאנו: הגרף עובר בראשית (מינימום), יש שני מקסימומים ב־$x = \pm 1$, הוא סימטרי ביחס לציר ה־y (זוגית), והפונקציה חיובית לכל $x \neq 0$. כאשר x גדל מאוד (או קטן מאוד) הערכים מתקרבים ל־0.

סקיצה של f(x): מינימום בראשית, שני מקסימומים ב־x=1 ו־x=-1, הגרף מתקרב לציר x בקצוות

תשובה: ראו סקיצה: מינימום ב־$(0,0)$, מקסימומים ב־$x = \pm 1$, הגרף מעל ציר ה־x.

סעיף ו

גרף הנגזרת חותך את ציר ה־x ב־$x = -1,\ 0,\ 1$. השטח הסגור בין הגרף לציר ה־x מורכב משני חלקים: בין -1 ל־0 (הגרף מתחת לציר) ובין 0 ל־1 (הגרף מעל הציר).

גרף f'(x) עם השטח המסומן בין x=-1 ל־x=1

הפונקציה הקדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$, לכן:

$$S_1 = -\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx$$

$$= -\left[f(0) - f(-1)\right] = \frac{6}{e^3}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} f'(x)\,dx = f(1) - f(0)$$

$$= \frac{6}{e^3}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{12}{e^3} \approx 0.597$$

תשובה: $\frac{12}{e^3} \approx 0.597$ יחידות שטח

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 4

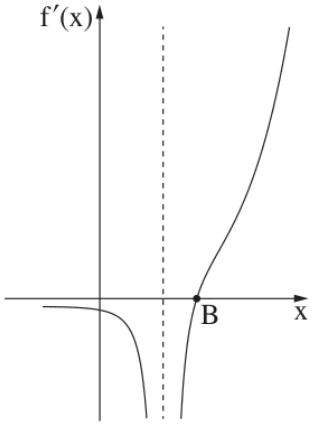
4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x-4}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה־x של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרות באותו התחום.

גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה־x בנקודה אחת בלבד – הנקודה B.

ג. מצאו את שיעור ה־x של הנקודה B.

ד. **(1)** מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־x ועל ידי הישר $x=\ell n12$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה לא יכול להתאפס:

$$e^x-4\neq 0 \;\Rightarrow\; e^x\neq 4 \;\Rightarrow\; x\neq \ell n\,4$$

תשובה: $x\neq \ell n\,4$

סעיף א (2)

ב־$x=\ell n\,4$ המכנה מתאפס והמונה $e^{2\ell n\,4}=16\neq 0$, לכן יש שם אסימפטוטה אנכית.

תשובה: $x=\ell n\,4$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$):

$$f(0)=\frac{e^0}{e^0-4}=\frac{1}{1-4}=-\frac{1}{3}$$

חיתוך עם ציר ה־x: המונה e^{2x} חיובי תמיד ואף פעם לא מתאפס, לכן אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

תשובה: $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$

אין חיתוך עם ציר ה־x.

סעיף ג

B היא נקודת החיתוך של גרף הנגזרת עם ציר ה־x, כלומר הפתרון של $f'(x)=0$. נגזור לפי כלל המנה:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^x-4)-e^{2x}\cdot e^x}{(e^x-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}(2e^x-8-e^x)}{(e^x-4)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}(e^x - 8)}{(e^x - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; e^x - 8 = 0 \;\Rightarrow\; x = \ell n\, 8$$

תשובה: $x_B = \ell n\, 8 \approx 2.08$

סעיף ד (1)

לפי הסרטוט (ואפשר לבדוק בנגזרת): הנגזרת שלילית משמאל ל־B (בשני צידי האסימפטוטה) וחיובית מימין ל־B.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < \ell n\, 4$	$-$	↘
$\ell n\, 4$	לא מוגדרת	אסימפטוטה
$-\ell n\, 4 < x < \ell n\, 8$	$-$	↘
$\ell n\, 8$	0	מינימום
$x > \ell n\, 8$	$+$	↗

(למשל $f'(0) = -\frac{7}{9} < 0$, $f'(1.6) < 0$, $f'(3) > 0$.)

תשובה: עולה: $x > \ell n\, 8$

יורדת: $x < \ell n\, 4$**,** $\ell n\, 4 < x < \ell n\, 8$**.**

סעיף ד (2)

נקודת המינימום:

$$f(\ell n\, 8) = \frac{8^2}{8-4} = \frac{64}{4} = 16$$

כאשר $x \to -\infty$: $e^{2x} \to 0$ והמכנה מתקרב ל־-4, לכן הגרף מתקרב לציר ה־x מלמטה. משמאל לאסימפטוטה $x = \ell n\, 4$ הפונקציה שלילית ויורדת, ומימין לה חיובית: יורדת עד המינימום $(\ell n\, 8, 16)$ ואחר כך עולה.

סקיצה של f(x)

תשובה:

סקיצה של f(x)

סעיף ה

השטח מוגבל על ידי גרף $f'(x)$, ציר ה־x והישר $x = \ell n\, 12$. גרף הנגזרת חותך את ציר ה־x ב־B ($x = \ell n\, 8$), ובתחום $\ell n\, 8 < x < \ell n\, 12$ הנגזרת חיובית (הגרף מעל ציר ה־x).

פונקציה קדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$, לכן:

$$S = \int_{\ell n\, 8}^{\ell n\, 12} f'(x)\, dx$$

$$= f(\ell n\, 12) - f(\ell n\, 8)$$

$$f(\ell n\, 12) = \frac{12^2}{12-4} = \frac{144}{8} = 18$$

$$S = 18 - 16 = 2$$

תשובה: $S = 2$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-4x+a}$, a הוא פרמטר.

לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית שמשוואתה היא $x=2$.

א. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=4$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ב–ד.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=-f(x)+e^8$ שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקצייה $h(x)$ עם ציר ה־x ? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

אסימפטוטה אנכית מתקבלת בנקודה שבה המכנה מתאפס (והמונה e^{2x} אף פעם לא מתאפס). לכן המכנה מתאפס ב־$x=2$:

$$2^2-4\cdot 2+a=0 \;\Rightarrow\; a=4$$

(ואז המכנה הוא $x^2-4x+4=(x-2)^2$, שמתאפס רק ב־$x=2$.)

תשובה: $a=4$

סעיף ב (1)

$f(x)=\frac{e^{2x}}{(x-2)^2}$. המכנה מתאפס רק ב־$x=2$:

תשובה: כל x פרט ל־$x=2$.

סעיף ב (2)

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$):

$$f(0)=\frac{e^0}{(0-2)^2}=\frac{1}{4}$$

חיתוך עם ציר ה־x: $f(x)=0$ מחייב $e^{2x}=0$ – אין פתרון ($e^{2x}>0$ תמיד). לכן אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

תשובה: $\left(0,\,\frac{1}{4}\right)$

אין חיתוך עם ציר ה־x.

סעיף ב (3)

נגזור לפי נגזרת של מנה:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(x-2)^2-e^{2x}\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$$

נוציא גורם משותף $2e^{2x}(x-2)$ ונצמצם ב־$(x-2)$:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\left[(x-2)-1\right]}{(x-2)^3}$$
$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(x-3)}{(x-2)^3}$$

$f'(x)=0$ רק כאשר $x=3$.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<2$	$+$	↗
$2<x<3$	$-$	↘
3	0	מינימום
$x>3$	$+$	↗

$$f(3)=\frac{e^6}{(3-2)^2}=e^6\approx 403.4$$

תשובה: $\min(3,\ e^6)$

סעיף ג

לפי מה שמצאנו: הפונקציה חיובית לכל x בתחום, חותכת את ציר ה־y ב־$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$, עולה עבור $x<2$, יש אסימפטוטה אנכית $x=2$ (משני צדיה הגרף שואף ל־$+\infty$, כי $f(x)>0$), יורדת עד המינימום $(3,e^6)$ ואחר כך עולה. כאשר $x\to-\infty$ הגרף מתקרב לציר ה־x.

סקיצה של f(x): עולה משמאל לאסימפטוטה x=2, מינימום ב־(e^6,3)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ד

נקודות החיתוך של $h(x)$ עם ציר ה־x מקיימות $h(x)=0$:

$$-f(x)+e^8=0\ \Rightarrow\ f(x)=e^8\approx 2981$$

כלומר צריך לספור כמה פעמים הגרף של $f(x)$ חותך את הישר $y=e^8$. לפי הסקיצה:

• עבור $x<2$: f עולה מערכים הקרובים ל־0 עד $\infty+$ – פגישה אחת.

• עבור $2<x<3$: f יורדת מ־$\infty+$ עד e^6, ו־$e^6<e^8$ – פגישה אחת.

• עבור $x>3$: f עולה מ־e^6 עד $\infty+$ – פגישה אחת.

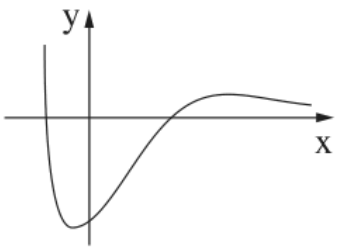
תשובה: 3 נקודות חיתוך.

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 4

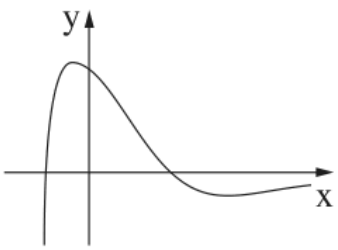
4. הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות לכל x.

לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת מקסימום אחת בלבד ושיעור ה־x שלה חיובי.

לפניכם שני גרפים, I ו־II, אחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



II



I

א. קבעו איזה מן הגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ונמקו את קביעתכם.

נתון: $f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^{(-2x+1)}$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־x.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = 7 \cdot e^{(-2x+1)}$ המוגדרת לכל x.

ד. **(1)** הסבירו מדוע הפונקצייה $g(x)$ חיובית לכל x.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

דרך כל אחת מן הנקודות שמצאתם בסעיף ד העבירו אנך לציר ה־x.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־x ועל ידי האנכים.

פתרון מלא

סעיף א

ל־$f(x)$ יש נקודת מקסימום ב־x חיובי. בנקודת מקסימום הנגזרת מתאפסת ועוברת מחיובית לשלילית. לכן גרף הנגזרת צריך לחתוך את ציר ה־x בנקודה חיובית, ולעבור שם **מעל** ציר ה־x **אל מתחת** לציר.

גרף I: בנקודת החיתוך החיובית הגרף עובר מחיובי לשלילי – מקסימום של f ב־x חיובי. בנקודת החיתוך השלילית הוא עובר משלילי לחיובי – זה מינימום. יש מקסימום אחד בלבד. ✓

גרף II: בנקודת החיתוך החיובית הגרף עובר משלילי לחיובי – זה מינימום. המקסימום היחיד נמצא ב־x שלילי. ✗

תשובה: גרף I

סעיף ב (1)

$$(x^2 - 2) \cdot e^{-2x+1} = 0$$

$e^{-2x+1} > 0$ לכל x, לכן:

$$x^2 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{2}$$

תשובה: $(\sqrt{2},\, 0)$**,** $(-\sqrt{2},\, 0)$

סעיף ב (2)

נגזור לפי כלל המכפלה (הנגזרת של e^{-2x+1} היא $-2e^{-2x+1}$):

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-2x+1} + (x^2 - 2) \cdot (-2)e^{-2x+1}$$
$$f'(x) = e^{-2x+1}(-2x^2 + 2x + 4)$$
$$f'(x) = -2e^{-2x+1}(x^2 - x - 2)$$
$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow\; x_1 = 2,\;\; x_2 = -1$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < -1$	$-$	↘
-1	0	מינימום
$-1 < x < 2$	$+$	↗
2	0	מקסימום
$x > 2$	$-$	↘

(למשל $f'(0) = 4e > 0$, $f'(-2) < 0$, $f'(3) < 0$ – מתאים לגרף ו.)

$$f(-1) = (1 - 2) \cdot e^3 = -e^3$$
$$f(2) = (4 - 2) \cdot e^{-3} = \frac{2}{e^3}$$

תשובה: מינימום $(-1,\, -e^3)$**, מקסימום** $\left(2,\, \frac{2}{e^3}\right)$

סעיף ג

חיתוך עם ציר ה־y: $f(0) = -2e$. כאשר $x \to \infty$ הגרף מתקרב לציר ה־x מלמעלה, וכאשר $x \to -\infty$ הגרף עולה מאוד.

הסקיצה אינה בקנה מידה (המקסימום $\frac{2}{e^3} \approx 0.1$ קרוב מאוד לציר ה־x, והמינימום $-e^3 \approx -20.1$ רחוק ממנו):

סקיצה של f(x)

תשובה:

סקיצה של f(x)

סעיף ד (1)

$g(x) = 7 \cdot e^{-2x+1}$: המספר 7 חיובי, וחזקה של e חיובית תמיד. מכפלה של שני מספרים חיוביים היא חיובית, לכן $g(x) > 0$ לכל x.

תשובה: $7 > 0$ **ו־**$e^{-2x+1} > 0$ **לכל** x**.**

סעיף ד (2)

$$(x^2 - 2) \cdot e^{-2x+1} = 7 \cdot e^{-2x+1}$$

נחלק ב־e^{-2x+1} (שאינו אפס):

$$x^2-2=7 \;\Rightarrow\; x^2=9 \;\Rightarrow\; x=\pm 3$$
$$g(-3)=7e^{7} \qquad g(3)=7e^{-5}=\frac{7}{e^5}$$

תשובה: $(-3,\ 7e^{7})$, $\left(3,\ \frac{7}{e^5}\right)$

סעיף ה

האנכים הם $x=-3$ ו־$x=3$, והגרף של g נמצא מעל ציר ה־x (סעיף ד (1)). פונקציה קדומה של e^{-2x+1} היא $-\frac{1}{2}e^{-2x+1}$:

$$S=\int_{-3}^{3} 7e^{-2x+1}\,dx$$
$$S=\Big[-3.5e^{-2x+1}\Big]_{-3}^{3}$$
$$S=-3.5e^{-5}+3.5e^{7}\approx 3838.19$$

תשובה: $S=3.5e^{7}-\frac{3.5}{e^5}\approx 3838.19$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^{(ax-1)}}{x^2}$, a הוא פרמטר.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה של הפונקצייה $f(x)$ המאונכת לציר ה־ x .

(3) הסבירו מדוע הפונקצייה $f(x)$ חיובית, בעבור כל x בתחום ההגדרה שלה.

נתון כי הנקודה $\left(-1,\frac{1}{e^3}\right)$ נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=2$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ד.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x)+k$, k הוא פרמטר.

נתון כי לישר $y=-2e$ ולגרף הפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק שתי נקודות משותפות.

ד. מצאו את הערך של k .

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה x^2 מתאפס ב־$x=0$ (והמונה מוגדר לכל x):

תשובה: כל x פרט ל־$x=0$ ($x\neq 0$).

סעיף א (2)

המכנה מתאפס ב־$x=0$, והמונה e^{ax-1} אף פעם לא מתאפס. לכן ב־$x=0$ יש אסימפטוטה אנכית.

תשובה: $x=0$

סעיף א (3)

המונה e^{ax-1} חיובי לכל x (חזקה של e תמיד חיובית), והמכנה x^2 חיובי לכל $x\neq 0$. מנה של שני מספרים חיוביים – חיובית.

תשובה: מונה $e^{ax-1}>0$ ומכנה $x^2>0$, לכן $f(x)>0$ בכל התחום.

סעיף ב

נציב את הנקודה $\left(-1,\frac{1}{e^3}\right)$:

$$f(-1)=\frac{e^{-a-1}}{(-1)^2}=e^{-a-1}$$

$$e^{-a-1}=\frac{1}{e^3}=e^{-3}$$

$$-a-1=-3 \;\Rightarrow\; a=2$$

תשובה: $a=2$

סעיף ג (1)

עם $a=2$: $f(x)=\frac{e^{2x-1}}{x^2}$. נגזור לפי נגזרת של מנה:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x-1}\cdot x^2-e^{2x-1}\cdot 2x}{x^4}$$
$$f'(x)=\frac{2x\,e^{2x-1}(x-1)}{x^4}$$
$$f'(x)=\frac{2e^{2x-1}(x-1)}{x^3}$$

$f'(x)=0$ רק כאשר $x=1$.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<0$	$+$	↗
$0<x<1$	$-$	↘
1	0	מינימום
$x>1$	$+$	↗

$$f(1)=\frac{e^1}{1}=e$$

תשובה: $\min(1,\,e)$

סעיף ג (2)

לפי מה שמצאנו: $f(x)>0$ לכל x, אסימפטוטה אנכית $x=0$ (משני צדיה הגרף שואף ל־$+\infty$), עלייה עבור $x<0$ (כאשר $x\to-\infty$ הגרף מתקרב לציר ה־x), ירידה עבור $0<x<1$, מינימום ב־$(1,e)$ ואחר כך עלייה.

סקיצה של f(x): ענף שמאלי עולה לאסימפטוטה x=0, ענף ימני עם מינימום ב־(e,1)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ד

נקודה משותפת ל־$g(x)$ ולישר $y=-2e$ מקיימת:

$$f(x)+k=-2e \;\Rightarrow\; f(x)=-2e-k$$

כלומר צריך שהישר האופקי $y=-2e-k$ יחתוך את הגרף של $f(x)$ בדיוק בשתי נקודות. לפי הסקיצה:

• הענף השמאלי ($x<0$) מקבל כל ערך חיובי פעם אחת.

• הענף הימני ($x>0$) מקבל כל ערך הגדול מ־e פעמיים, את הערך e פעם אחת (במינימום), וערכים קטנים מ־e אף פעם.

לכן יש בדיוק שתי נקודות משותפות רק כאשר הישר עובר דרך נקודת המינימום, כלומר $-2e-k=e$:

$$k=-3e$$

(עבור $0<-2e-k<e$ יש נקודה אחת, ועבור $-2e-k>e$ יש שלוש.)

תשובה: $k=-3e$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x-3}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה האנכית לציר ה־x של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$, המקיימת $g(x)=-f(x)+15$.

הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ו. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־x? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

$$e^x-3\neq 0 \;\Rightarrow\; e^x\neq 3 \;\Rightarrow\; x\neq \ell n\,3$$

תשובה: $x\neq \ell n\,3$

סעיף א (2)

ב־$x=\ell n\,3$ המכנה מתאפס והמונה $e^{2\ell n\,3}=9\neq 0$, לכן זו אסימפטוטה אנכית.

תשובה: $x=\ell n\,3$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y:

$$f(0)=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$$

חיתוך עם ציר ה־x: המונה $e^{2x}>0$ לכל x, לכן אין.

תשובה: $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

אין חיתוך עם ציר ה־x.

סעיף ג

נגזור לפי כלל המנה:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^x-3)-e^{3x}}{(e^x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{3x}-6e^{2x}-e^{3x}}{(e^x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}(e^x-6)}{(e^x-3)^2}$$
$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ e^x=6\ \Rightarrow\ x=\ell n\,6$$

x	$x<\ell n\,6$	$\ell n\,6$	$\ell n\,3<x<\ell n\,6$	$x>\ell n\,6$
$-f'(x)$		0		$+$
$f(x)$	↘	מינימום	↗	

$$f(\ell n\,6)=\frac{6^2}{6-3}=\frac{36}{3}=12$$

תשובה: $(\ell n\,6,\ 12)$ **– מינימום**

סעיף ד

המכנה $(e^x-3)^2$ והגורם e^{2x} חיוביים, לכן הסימן של $f'(x)$ הוא הסימן של e^x-6:

x	$x<\ell n\,3$	$\ell n\,3<x<\ell n\,6$	$x>\ell n\,6$
$-f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	↘	↘	↗

תשובה: עולה: $x>\ell n\,6$
יורדת: $x<\ell n\,3$**,** $\ell n\,3<x<\ell n\,6$**.**

סעיף ה

כאשר $x\to-\infty$ המונה מתקרב ל־0 והמכנה ל־-3, לכן הגרף מתקרב לציר ה־x מלמטה. משמאל לאסימפטוטה $x=\ell n\,3$ הפונקציה שלילית ויורדת; מימין לה חיובית – יורדת עד המינימום $(\ell n\,6,12)$ ואחר כך עולה.

סקיצה של f(x)

תשובה:

סקיצה של f(x)

סעיף ו (1)

$g'(x)=-f'(x)$, לכן $g'(x)=0$ באותה נקודה $x=\ell n\,6$, וסימני הנגזרת מתהפכים: g עולה כאשר f יורדת ולהפך. המינימום של f הופך למקסימום של g.

$$g(\ell n\,6)=-12+15=3$$

תשובה: $(\ell n\,6,\ 3)$ **– מקסימום**

סעיף ו (2)

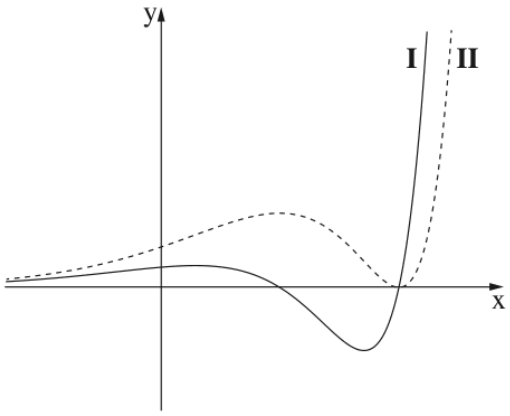
נקודות חיתוך עם ציר ה־x: $g(x)=0$, כלומר $f(x)=15$.

- בתחום $x<\ell n\,3$ הפונקציה f שלילית, לכן אין שם פתרון.
- בתחום $x>\ell n\,3$: f יורדת מאינסוף עד 12 ואחר כך עולה לאינסוף. מכיוון ש־$12<15$, הישר $y=15$ חותך את הגרף פעמיים – פעם בירידה ופעם בעלייה.

(או: ל־g מקסימום $3>0$ מימין לאסימפטוטה, ומשני צדי המקסימום g יורדת למינוס אינסוף – לכן היא חותכת את ציר ה־x פעמיים.)

תשובה: שתי נקודות חיתוך

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 4



4. בסרטוט שלפניכם מוצגים הגרפים I ו־ II .

אחד מן הגרפים הוא הגרף של פונקצייה $f(x)$,

והאחר הוא הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א. איזה מן הגרפים I–II מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

נמקו את תשובתכם.

נתון כי $f(x)=(x-4)^2\cdot e^{x-3}$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן על פי הגרף.

ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

נתונה הפונקצייה $g(x)=-f'(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

בנקודות הקיצון של $f(x)$ הנגזרת מתאפסת ומשנה סימן.

לגרף II (המקווקו) יש מקסימום ומינימום (המינימום על ציר ה־x). בדיוק מתחת למקסימום של II גרף I חותך את ציר ה־x, ובמינימום של II גרף I חותך שוב את ציר ה־x.

בין שתי הנקודות האלה גרף II יורד וגרף I שלילי; מחוץ להן גרף II עולה וגרף I חיובי. לכן I הוא גרף הנגזרת.

(להפך זה לא מתאים: לגרף I יש מינימום, אבל במקום הזה גרף II לא חותך את ציר ה־x.)

תשובה: גרף I.

סעיף ב (1)

$(x-4)^2$ ו־e^{x-3} מוגדרים לכל x.

תשובה: כל x.

סעיף ב (2)

חיתוך עם ציר ה־y:

$$f(0)=(0-4)^2\cdot e^{-3}=\frac{16}{e^3}$$

חיתוך עם ציר ה־x: $e^{x-3}>0$ תמיד, לכן:

$$(x-4)^2=0\ \Rightarrow\ x=4$$

תשובה: $(4,0)$, $\left(0,\frac{16}{e^3}\right)$

סעיף ב (3)

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x)=2(x-4)\,e^{x-3}+(x-4)^2\,e^{x-3}$$
$$f'(x)=(x-4)\,e^{x-3}\,[2+(x-4)]$$
$$f'(x)=(x-4)(x-2)\,e^{x-3}$$

$f'(x)=0$: $x=4$ או $x=2$.

$$f(2)=(-2)^2\cdot e^{-1}=\frac{4}{e},\qquad f(4)=0$$

לפי הגרף של $f(x)$ (גרף II): ב־$x=2$ מקסימום וב־$x=4$ מינימום.

תשובה: $\max\left(2,\frac{4}{e}\right)$, $\min(4,0)$

סעיף ג

גרף הנגזרת חותך את ציר ה־x ב־$x=2$ וב־$x=4$, וביניהן הוא מתחת לציר ($f'(x)<0$).

הפונקציה הקדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$, לכן:

$$S=-\int_2^4 f'(x)\,dx$$
$$=-\left[f(4)-f(2)\right]$$
$$S=-\left(0-\frac{4}{e}\right)=\frac{4}{e}\approx 1.47$$

תשובה: $\frac{4}{e}\approx 1.47$ **יחידות שטח**

סעיף ד

הגרף של $g(x)=-f'(x)$ הוא שיקוף של גרף $f'(x)$ ביחס לציר ה־x. שני הגרפים נפגשים רק כאשר $f'(x)=-f'(x)$, כלומר $f'(x)=0$: ב־$x=2$ וב־$x=4$.

הגרפים של f'(x) ו־g(x)=-f'(x) והשטח ביניהם בין x=2 ל־x=4

השטח בין שני הגרפים מורכב משני חלקים שווים: השטח בין $f'(x)$ לציר ה־x (סעיף ג), והשטח בין $g(x)$ לציר ה־x, שהוא השיקוף שלו. לכן:

$$S=2\cdot\frac{4}{e}=\frac{8}{e}\approx 2.94$$

תשובה: $\frac{8}{e}\approx 2.94$ **יחידות שטח**

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = (2x^2 - 11x + 14) \cdot e^{4-x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$?

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

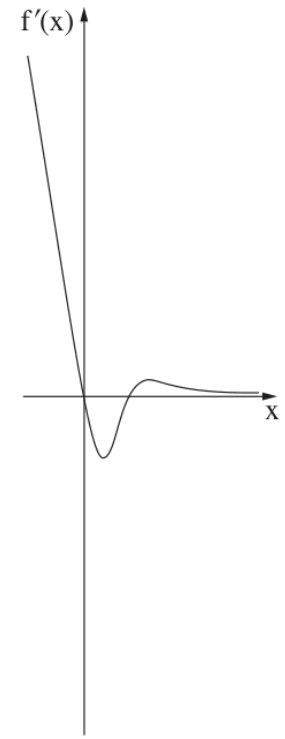
(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

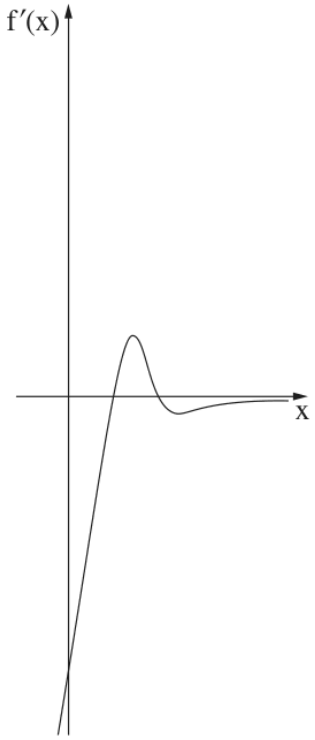
ג. אחד מן הגרפים I–III שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

ד. קבעו עבור אילו ערכי x מתקיים: $f(x) < 0$ וגם $f'(x) < 0$. נמקו את קביעתכם.

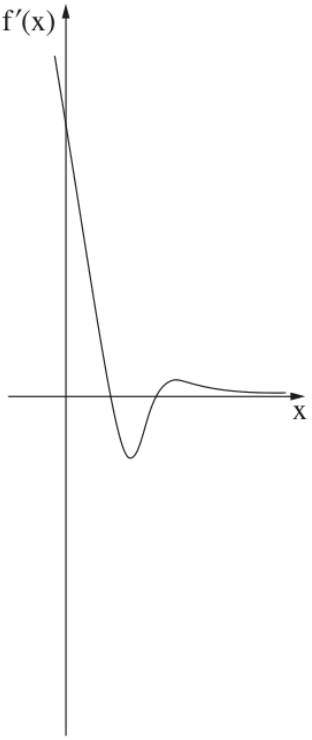
ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .



III



II



I

פתרון מלא

סעיף א

הפולינום $2x^2 - 11x + 14$ ו־e^{4-x} מוגדרים לכל x, ולכן גם המכפלה שלהם.

תשובה: כל x

סעיף ב (1)

חיתוך עם ציר ה־x: $e^{4-x} > 0$, לכן:

$$2x^2 - 11x + 14 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{4} = \frac{11 \pm 3}{4}$$

$x = 3.5$ או $x = 2$.

חיתוך עם ציר ה־y:

$$f(0) = 14 \cdot e^4 = 14e^4$$

תשובה: $(2,0)$, $(3.5,0)$, $(0,14e^4)$

סעיף ב (2)

נגזור לפי כלל המכפלה (הנגזרת של e^{4-x} היא $-e^{4-x}$):

$$f'(x) = (4x-11)e^{4-x} \\ \quad - (2x^2-11x+14)e^{4-x}$$

$$f'(x) = e^{4-x}(-2x^2+15x-25)$$

$$-2x^2+15x-25=0 \;\Rightarrow\; x_1=5,\quad x_2 = 2.5$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<2.5$	$-$	↘
2.5	0	מינימום
$2.5<x<5$	$+$	↗
5	0	מקסימום
$x>5$	$-$	↘

(למשל $f'(0) = -25e^4 < 0$, $f'(3) = 2e > 0$, $f'(6) = -7e^{-2} < 0$.)

$$f(2.5) = (12.5 - 27.5 + 14)\, e^{1.5} \\ = -e^{1.5}$$

$$f(5) = (50 - 55 + 14)\, e^{-1} = \frac{9}{e}$$

תשובה: מינימום $(2.5,\ -e^{1.5})$, **מקסימום** $\left(5,\ \frac{9}{e}\right)$

סעיף ב (3)

כאשר $x \to \infty$ הגרף מתקרב לציר ה־x מלמעלה, וכאשר $x \to -\infty$ הוא עולה מאוד. הסקיצה אינה בקנה מידה ($14e^4 \approx 764$, לעומת $-e^{1.5} \approx -4.48$ ו־$\frac{9}{e} \approx 3.31$):

סקיצה של f(x)

תשובה:

סקיצה של f(x)

סעיף ג

נבדוק את התכונות של $f'(x) = e^{4-x}(-2x^2+15x-25)$:

- נקודות האפס של הנגזרת: $x=2.5$ ו־$x=5$ – שתיהן חיוביות.
- $f'(0) = e^4 \cdot (-25) = -25e^4 < 0$ – גרף הנגזרת חותך את ציר ה־y מתחת לראשית.
- $f'(x) > 0$ רק בתחום $2.5 < x < 5$, וכאשר $x > 5$ הנגזרת שלילית ומתקרבת ל־0.

בגרף I $f'(0) > 0$, ובגרף III $f'(0) = 0$ – שניהם לא מתאימים. בגרף II $f'(0) < 0$, הוא חיובי בין שתי נקודות אפס חיוביות ושלילי אחריהן – מתאים.

תשובה: גרף II (רק בו $f'(0) < 0$).

סעיף ד

$f(x) < 0$ כאשר הגרף של f מתחת לציר ה־x: $2 < x < 3.5$.

$f'(x) < 0$ כאשר הפונקציה יורדת: $x < 2.5$ או $x > 5$.

שני התנאים מתקיימים יחד ב־$2 < x < 2.5$.

תשובה: $2 < x < 2.5$

סעיף ה

גרף הנגזרת יוצר עם ציר ה־x שטח סגור בין נקודות האפס $x = 2.5$ ו־$x = 5$, ושם הוא מעל ציר ה־x.
פונקציה קדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$:

$$S = \int_{2.5}^{5} f'(x)\,dx$$
$$= f(5) - f(2.5)$$
$$S = \frac{9}{e} - \left(-e^{1.5}\right) = \frac{9}{e} + e^{1.5}$$
$$\approx 7.793$$

תשובה: $S = \frac{9}{e} + e^{1.5} \approx 7.793$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{e^{a+x}}{x-2}$, a הוא פרמטר.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה של הפונקצייה $f(x)$ המאונכת לציר ה־ x .

נתון כי הנקודה $\left(4\,,\,\frac{e^5}{2}\right)$ נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את הפרמטר a .

הציבו בפונקצייה $f(x)$ את הפרמטר a שמצאתם בסעיף ב, וענו על הסעיפים ג–ה.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=-f(x)+13$ המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ה. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$. נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה לא יכול להתאפס:

$$x-2\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 2$$

(המונה e^{a+x} מוגדר לכל x.)

תשובה: $x\neq 2$

סעיף א (2)

ב־$x=2$ המכנה מתאפס והמונה $e^{a+2}>0$ אינו מתאפס, לכן זו אסימפטוטה אנכית:

$$x=2$$

תשובה: $x=2$

סעיף ב

הנקודה $\left(4,\frac{e^5}{2}\right)$ על הגרף, לכן $f(4)=\frac{e^5}{2}$:

$$\frac{e^{a+4}}{4-2}=\frac{e^5}{2}$$
$$\frac{e^{a+4}}{2}=\frac{e^5}{2}$$
$$e^{a+4}=e^5$$
$$a+4=5 \;\Rightarrow\; a=1$$

מעכשיו:

$$f(x)=\frac{e^{x+1}}{x-2}$$

תשובה: $a=1$

סעיף ג (1)

נגזור לפי כלל המנה (הנגזרת של e^{x+1} היא e^{x+1}):

$$f'(x)=\frac{e^{x+1}(x-2)-e^{x+1}}{(x-2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{e^{x+1}(x-3)}{(x-2)^2}$$

נשווה ל־0. $e^{x+1}>0$ תמיד, לכן:

$$x-3=0 \;\Rightarrow\; x=3$$
$$f(3)=\frac{e^4}{3-2}=e^4\approx 54.6$$

סימן הנגזרת נקבע לפי $x-3$ (המכנה $(x-2)^2$ חיובי):

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<2$	−	יורדת ↘
$x=2$	לא מוגדרת	אסימפטוטה
$2<x<3$	−	יורדת ↘
$x=3$	0	מינימום
$x>3$	+	עולה ↗

לכן $(3,\ e^4)$ היא נקודת מינימום.

תשובה: מינימום: $(3,\ e^4)\approx(3,\ 54.6)$

סעיף ג (2)

לפי הטבלה בסעיף הקודם $f'(x)<0$ כאשר $x<3$ (פרט ל־$x=2$ שבו הפונקציה אינה מוגדרת):

$$x<2 \quad ; \quad 2<x<3$$

תשובה: ירידה: $x<2$**, וגם** $2<x<3$

סעיף ג (3)

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$):

$$f(0)=\frac{e^1}{0-2}=-\frac{e}{2}\approx -1.36$$

חיתוך עם ציר ה־x ($y=0$): צריך $e^{x+1}=0$, אבל $e^{x+1}>0$ לכל x – לכן אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

תשובה: עם ציר y: $(0,\ -1.36)\approx\left(0,\ -\frac{e}{2}\right)$

עם ציר x: אין

סעיף ד

נשתמש בכל מה שמצאנו: אסימפטוטה אנכית $x=2$, מינימום $(3,\ 54.6)$, חיתוך $(0,\ -1.36)$, והפונקציה יורדת עד $x=3$ (משני צידי האסימפטוטה) ועולה אחרי.

כאשר $x < 2$ המכנה שלילי והמונה חיובי, לכן $f(x) < 0$; כאשר $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$ מלמטה. כאשר $x > 2$, $f(x) > 0$.

סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

תשובה: ראו סקיצה.

אסימפטוטה $x = 2$, מינימום $(3,\ 54.6)$.

סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

סעיף ה

$g(x) = -f(x) + 13$ חיובית כאשר:

$$-f(x) + 13 > 0 \ \Leftrightarrow \ f(x) < 13$$

בתחום $x < 2$: $f(x) < 0$ (ראינו בסעיף ד), ולכן בוודאי $f(x) < 13$. כלומר $g(x) > 0$.

בתחום $x > 2$: הערך הקטן ביותר של f הוא המינימום $f(3) = e^4 \approx 54.6$, לכן $f(x) \geq 54.6 > 13$. כלומר $g(x) < 0$.

(ל־g אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x, כי $f(x) = 13$ אף פעם לא מתקיים.)

תשובה: חיובית: $x < 2$

שלילית: $x > 2$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x)=e^x\cdot(e^x-6)^2$ המוגדרת לכל x.

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. הראו כי מתקיים: $f(x)=e^{3x}-12e^{2x}+36e^x$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=e^{3x}$ העולה לכל x.

ה. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

(2) באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקצייה $f(x)$, סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ בקו מקווקו.

(3) מצאו את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקצייה $f(x)$, על ידי הגרף של הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־y.

פתרון מלא

סעיף א

חיתוך עם ציר ה־x ($y=0$): $e^x>0$ לכל x, לכן:

$$(e^x-6)^2=0\ \Rightarrow\ e^x=6\ \Rightarrow\ x=\ell n\,6$$

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$):

$$f(0)=e^0\cdot(e^0-6)^2=1\cdot 25=25$$

תשובה: $(\ell n\,6,\ 0)$, $(0,\ 25)$

סעיף ב

נפתח את הריבוע ($(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$):

$$f(x)=e^x\left(e^{2x}-12e^x+36\right)$$
$$f(x)=e^{3x}-12e^{2x}+36e^x$$

תשובה: $f(x)=e^{3x}-12e^{2x}+36e^x$ **(הוכחה)**

סעיף ג

נגזור את הצורה מסעיף ב:

$$f'(x)=3e^{3x}-24e^{2x}+36e^x$$
$$f'(x)=3e^x\left(e^{2x}-8e^x+12\right)$$

$3e^x>0$, לכן $f'(x)=0$ כאשר $e^{2x}-8e^x+12=0$. נציב $t=e^x$:

$$t^2-8t+12=0\ \Rightarrow\ t=2,\quad t=6$$

$e^x=2\Rightarrow x=\ell n\,2$, ו־$e^x=6\Rightarrow x=\ell n\,6$.

$f'(x)=3e^x(e^x-2)(e^x-6)$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<\ell n2$	$+$	↗
$\ell n2$	0	מקסימום
$\ell n2<x<\ell n6$	$-$	↘

$\ell n6$	0	מינימום
$x > \ell n6$	$+$	$\nearrow$

$f(\ell n2) = 2 \cdot (2-6)^2 = 32$
$f(\ell n6) = 0$

תשובה: $\max(\ell n2,\ 32)$ **,** $\min(\ell n6,\ 0)$

סעיף ד

אסימפטוטות אופקיות: כאשר $x \to -\infty$, $e^x \to 0$, ולכן $f(x) = e^x(e^x-6)^2 \to 0 \cdot 36 = 0$ - האסימפטוטה $y = 0$ (משמאל, הגרף מעליה). כאשר $x \to \infty$ הערכים גדלים ללא גבול – אין אסימפטוטה מימין.

סקיצה של f(x): מתקרב ל־y=0 משמאל, מקסימום (ln2,32), מינימום (ln6,0), עולה ימינה

הגרף חותך את ציר ה־y ב־$(0,\ 25)$ ונוגע בציר ה־x בנקודת המינימום $(\ell n6, 0)$.

תשובה: אסימפטוטה אופקית $y = 0$ (משמאל)

ראו סקיצה.

סעיף ה (1)

$e^{3x} = e^{3x} - 12e^{2x} + 36e^x$
$12e^{2x} = 36e^x$

נחלק ב־$12e^x$ (חיובי):

$e^x = 3 \ \Rightarrow \ x = \ell n\,3$
$g(\ell n3) = e^{3\ell n3} = 27$

תשובה: $(\ell n\,3,\ 27)$

סעיף ה (2)

$g(x) = e^{3x}$ עולה לכל x, עוברת ב־$(0,1)$ ומתקרבת ל־$y = 0$ משמאל. היא נחתכת עם $f(x)$ רק ב־$(\ell n3, 27)$.

הגרפים של f(x) ו־g(x) והשטח ביניהם מ־x=0 עד x=ln3

תשובה: ראו סרטוט.

סעיף ה (3)

השטח חסום בין ציר ה־y ($x = 0$) לנקודת החיתוך $x = \ell n3$. בתחום זה $f(x)$ מעל $g(x)$ (למשל ב־$x = 0$: $1 < 25$):

$$S = \int_0^{\ell n3} [f(x) - g(x)]\,dx$$
$$S = \int_0^{\ell n3} \left(-12e^{2x} + 36e^x\right) dx$$
$$S = \left[-6e^{2x} + 36e^x\right]_0^{\ell n3}$$
$$S = (-6 \cdot 9 + 36 \cdot 3) - (-6 + 36)$$
$$= 54 - 30 = 24$$

תשובה: 24 יחידות שטח

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 3

3. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-2}$.

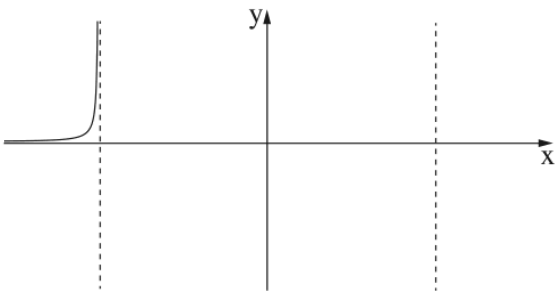
א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. לפניכם סקיצה חלקית של גרף הפונקצייה $f(x)$.



העתיקו את הסקיצה החלקית למחברתכם, והשלימו בה את החלקים החסרים של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x)+c$. c הוא פרמטר.

ה. מצאו את שני הערכים האפשריים של c שבעבורם יש לפונקצייה $g(x)$ נקודת קיצון על הישר $y=3$.

נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה לא יכול להיות 0:

$$x^2-2\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq\sqrt{2},\; x\neq-\sqrt{2}$$

תשובה: כל x פרט ל־$x=\pm\sqrt{2}$.

סעיף א (2)

המכנה מתאפס ב־$x=\pm\sqrt{2}$, והמונה e^{2x} אף פעם לא מתאפס, לכן אלה אסימפטוטות אנכיות.

תשובה: $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y:

$$f(0)=\frac{e^0}{0-2}=-\frac{1}{2}$$

חיתוך עם ציר ה־x: המונה $e^{2x}>0$ תמיד, לכן $f(x)\neq 0$ – אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

תשובה: $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

אין חיתוך עם ציר ה־x.

סעיף ג

נגזור לפי נגזרת של מנה:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(x^2-2)-e^{2x}\cdot 2x}{(x^2-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(x^2-x-2)}{(x^2-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(x-2)(x+1)}{(x^2-2)^2}$$

$f'(x)=0$: $x=2$ או $x=-1$. המכנה ו־$2e^{2x}$ חיוביים, לכן הסימן נקבע לפי $(x-2)(x+1)$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<-\sqrt{2}$	$+$	↗
$-\sqrt{2}<x<-1$	$+$	↗
-1	0	מקסימום
$-1<x<\sqrt{2}$	$-$	↘
$\sqrt{2}<x<2$	$-$	↘
2	0	מינימום
$x>2$	$+$	↗

$$f(-1)=\frac{e^{-2}}{1-2}=-\frac{1}{e^2}$$
$$f(2)=\frac{e^4}{4-2}=\frac{e^4}{2}$$

תשובה: $\max\left(-1,-\frac{1}{e^2}\right)$, $\min\left(2,\frac{e^4}{2}\right)$

סעיף ד

נשלים לפי מה שמצאנו:

• בין האסימפטוטות ($-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$) המכנה שלילי ולכן $f(x)<0$: הגרף עולה מ־$-\infty$ (ליד $x=-\sqrt{2}$) עד המקסימום $\left(-1,-\frac{1}{e^2}\right)$, יורד דרך $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ ושואף ל־$-\infty$ ליד $x=\sqrt{2}$.

• מימין ל־$x=\sqrt{2}$ המכנה חיובי ולכן $f(x)>0$: הגרף יורד מ־$+\infty$ עד המינימום $\left(2,\frac{e^4}{2}\right)$ ואחר כך עולה.

סקיצה של f(x) עם אסימפטוטות x=±√2, מקסימום (-1,-1/e²) ומינימום (2,e⁴/2)

(בסקיצה ציר ה־y מכווץ, כדי שכל החלקים ייראו.)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה

הוספת קבוע c מזיזה את הגרף אנכית, ולכן ל־$g(x)$ נקודות קיצון באותם ערכי x (-1 ו־2), וערכי y שלהן גדלים ב־c:

$$\left(-1,\ -\tfrac{1}{e^2}+c\right)$$
$$\left(2,\ \tfrac{e^4}{2}+c\right)$$

נקודת קיצון על הישר $y=3$:

$$-\frac{1}{e^2}+c=3\ \Rightarrow\ c=3+\frac{1}{e^2}\approx 3.135$$
$$\frac{e^4}{2}+c=3\ \Rightarrow\ c=3-\frac{e^4}{2}\approx -24.30$$

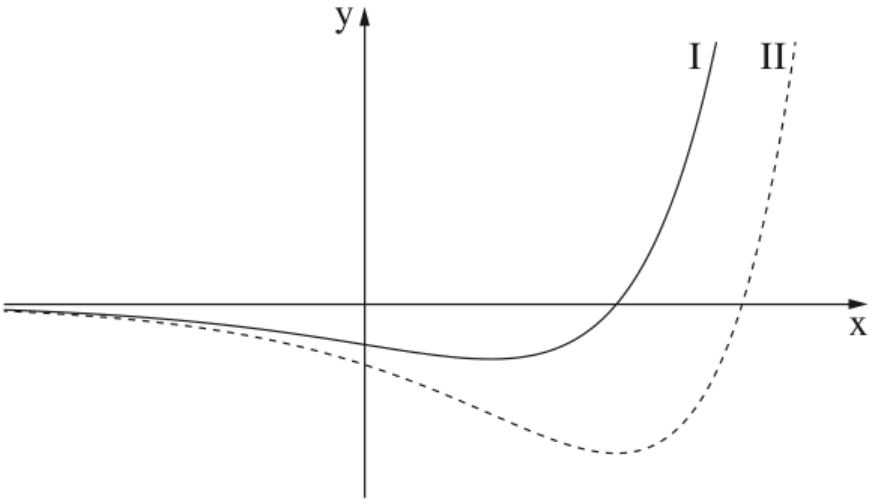
תשובה: $c=3+\frac{1}{e^2}$ **או** $c=3-\frac{e^4}{2}$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 5

5. בסרטוט שלפניכם מתוארים שני גרפים: I , II .

אחד מהם הוא גרף הפונקצייה $f(x)$, והאחר הוא גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

כל אחד מן הגרפים חותך את ציר ה־ x בנקודה אחת בלבד.



א. איזה מן הגרפים I , II מתאים לגרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמקו.

נתון: $f(x) = (x-3) \cdot e^x$.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = -f'(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ו. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ y .

פתרון מלא

סעיף א

בנקודת הקיצון של $f(x)$ הנגזרת מתאפסת, כלומר גרף הנגזרת חותך את ציר ה־x בדיוק מתחת לנקודת הקיצון של $f(x)$.

גרף I חותך את ציר ה־x בדיוק במקום שבו לגרף II יש נקודת מינימום. בנוסף, משמאל לנקודה זו גרף I שלילי וגרף II יורד, ומימין לה גרף I חיובי וגרף II עולה. לכן I הוא גרף הנגזרת ו־II הוא גרף הפונקציה.

(להפך זה לא מתאים: לגרף I יש מינימום, אבל במקום הזה גרף II אינו חותך את ציר ה־x.)

תשובה: גרף I.

סעיף ב

$(x-3)$ ו־e^x מוגדרים לכל x.

תשובה: כל x.

סעיף ג

חיתוך עם ציר ה־y:

$$f(0) = (0-3)\cdot e^0 = -3$$

חיתוך עם ציר ה־x: $e^x > 0$, לכן $x-3=0$, כלומר $x=3$.

תשובה: $(0,-3)$, $(3,0)$

סעיף ד

לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = 1\cdot e^x + (x-3)e^x$$
$$= (x-2)e^x$$

$e^x > 0$, לכן הסימן של $f'(x)$ נקבע לפי $x-2$: שלילי עבור $x<2$ וחיובי עבור $x>2$.

x	$x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

תשובה: עלייה: $x>2$

ירידה: $x<2$.

סעיף ה

$g(x) = -f'(x) = (2-x)e^x$ – הגרף שלו הוא שיקוף של גרף I (גרף הנגזרת) ביחס לציר ה־x.

נקודות חשובות: $g(0)=2$; $g(x)=0$ ב־$x=2$; $g'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$, ולכן מקסימום ב־$(1,e)$; כאשר $x\to-\infty$ הגרף מתקרב לציר ה־x (מלמעלה), ועבור $x>2$ הגרף יורד ל־$-\infty$.

סקיצה של g(x)=(2-x)e^x: מקסימום (e,1), חותך ב־(0,2) ו־(2,0)

תשובה: ראו סקיצה: שיקוף של גרף I ביחס לציר ה־x.

סעיף ו

הגרפים של $f'(x)$ ו־$g(x) = -f'(x)$ נחתכים כאשר $f'(x)=0$, כלומר ב־$x=2$. השטח חסום בין $x=0$ (ציר ה־y) ל־$x=2$; בתחום זה $g(x) > 0 > f'(x)$.

הגרפים של f'(x) ו־g(x) והשטח ביניהם מ־x=0 עד x=2

$$S = \int_0^2 [g(x) - f'(x)]\,dx$$
$$S = \int_0^2 -2f'(x)\,dx$$

הפונקציה הקדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$:

$$S = -2\,[f(2) - f(0)]$$
$$= -2\left(-e^2 - (-3)\right)$$
$$S = 2e^2 - 6 \approx 8.778$$

תשובה: $2e^2 - 6 \approx 8.778$ **יחידות שטח**

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 3

3. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$?

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$, המקיימת $g(x)=-2f(x)$ לכל x.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ במערכת הצירים שבה סרטטתם את גרף הפונקצייה $f(x)$.

נסמן ב־ S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x=3$.

ז. הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי הישר $x=3$. נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

$f(x)=\frac{x^2}{e^x}$. המכנה e^x חיובי תמיד ולא מתאפס, לכן הפונקציה מוגדרת לכל x.

תשובה: כל x

סעיף ב

$$\frac{x^2}{e^x}=0 \;\Rightarrow\; x^2=0 \;\Rightarrow\; x=0$$

תשובה: $(0,\,0)$

סעיף ג

נגזור לפי כלל המנה:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-x^2\cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(2x-x^2)}{e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0,\;\; x_2=2$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<0$	$-$	↘
0	0	מינימום
$0<x<2$	$+$	↗
2	0	מקסימום

$x > 2$ $-$ ↘

(למשל $f'(-1) = -3e < 0$, $f'(1) = \frac{1}{e} > 0$, $f'(3) = -\frac{3}{e^3} < 0$.)

$$f(0) = 0 \qquad f(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0.54$$

תשובה: מינימום $(0,\ 0)$, מקסימום $\left(2,\ \frac{4}{e^2}\right)$

סעיף ד

לפי טבלת הסימנים בסעיף ג:

עלייה: $0 < x < 2$.

ירידה: $x < 0$ וגם $x > 2$.

תשובה: עולה: $0 < x < 2$

יורדת: $x < 0$, $x > 2$.

סעיף ה

הפונקציה אינה שלילית ($x^2 \geq 0$, $e^x > 0$), נוגעת בציר ה־x רק בראשית (מינימום), עולה עד המקסימום $\left(2,\ \frac{4}{e^2}\right)$ ואחר כך יורדת ומתקרבת לציר ה־x. כאשר $x \to -\infty$ הפונקציה גדלה מאוד.

סקיצה של f(x)

תשובה:

סקיצה של f(x)

סעיף ו

$g(x) = -2f(x)$: כל ערך של f מוכפל ב־-2. הגרף של g הוא שיקוף של גרף f ביחס לציר ה־x, „מתוח" פי 2:

- נקודת החיתוך $(0, 0)$ נשארת – והיא נקודת מקסימום של g.
- המקסימום של f הופך למינימום של g: $\left(2, -\frac{8}{e^2}\right)$.
- $g(x) \leq 0$ לכל x.

הגרפים של f(x) ו-g(x) והשטח ביניהם

תשובה:

הגרפים של f(x) ו-g(x)

סעיף ז

S הוא השטח בין גרף f לציר ה־x, מ־$x = 0$ עד $x = 3$ ($f \geq 0$):

$$S = \int_0^3 f(x)\,dx$$

השטח המבוקש הוא בין גרף f (מעל) לגרף g (מתחת), מ־$x = 0$ (שם הגרפים נפגשים) עד $x = 3$:

$$\int_0^3 \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

$$= \int_0^3 \big(f(x) + 2f(x)\big)dx$$

$$= 3\int_0^3 f(x)\,dx = 3S$$

(במילים: השטח בין g לציר ה־x גדול פי 2 מ־S, כי g הוא f מוכפל ב־2 והפוך. יחד עם S שמעל הציר מקבלים $S + 2S = 3S$.)

תשובה: $3S$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 3

3. נתונה הפונקצייה $f(x) = (4 - 3x) \cdot e^{3x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$?

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

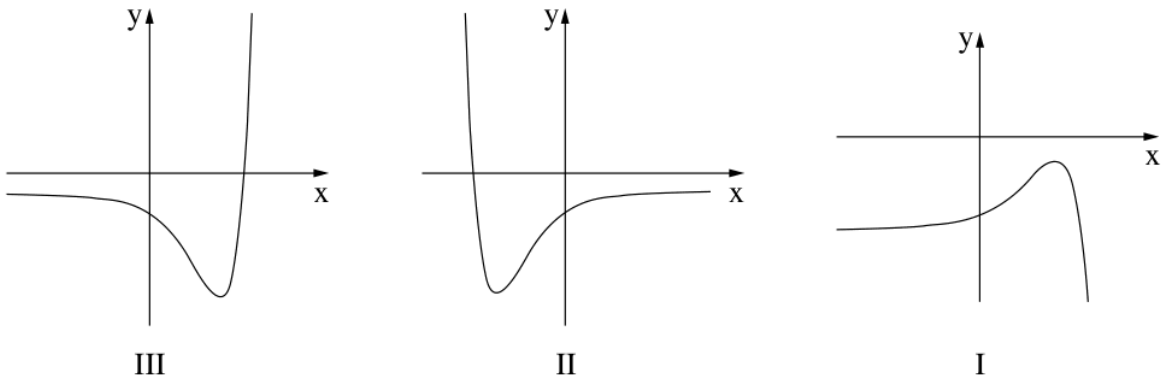
(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = -2 \cdot f(x) - 1$.

ה. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) אחד מן הגרפים I–III שלפניכם מתאר את גרף הפונקצייה $g(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



פתרון מלא

סעיף א

הביטוי $4 - 3x$ מוגדר לכל x, וגם e^{3x} מוגדר לכל x. לכן הפונקציה מוגדרת לכל x.

תשובה: כל x

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y – נציב $x = 0$:

$$f(0) = (4 - 0) \cdot e^0 = 4$$

חיתוך עם ציר ה־x – נפתור $f(x) = 0$. מכיוון ש־$e^{3x} > 0$ תמיד:

$$4 - 3x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{4}{3}$$

תשובה: עם ציר ה־y: $(0,\ 4)$
עם ציר ה־x: $\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$

סעיף ג (1)

נגזור לפי כלל המכפלה $(u \cdot v)' = u'v + uv'$:

$$f'(x) = -3 \cdot e^{3x} + (4 - 3x) \cdot 3e^{3x}$$
$$f'(x) = e^{3x}(-3 + 12 - 9x)$$
$$f'(x) = (9 - 9x)e^{3x}$$

תמיד $e^{3x} > 0$, לכן $f'(x) = 0$ רק כאשר $9 - 9x = 0$, כלומר $x = 1$.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < 1$	+	עולה ↗
$x = 1$	0	מקסימום
$x > 1$	–	יורדת ↘

(למשל $f'(0) = 9 > 0$, $f'(2) = -9e^6 < 0$.)

$$f(1) = (4-3)e^3 = e^3 \approx 20.09$$

תשובה: מקסימום: $\left(1,\ e^3\right) \approx (1,\ 20.09)$

סעיף ג (2)

לפי טבלת הסימנים בסעיף ג (1):

עלייה: $x < 1$ (שם $f'(x) > 0$).

ירידה: $x > 1$ (שם $f'(x) < 0$).

תשובה: עלייה: $x < 1$

ירידה: $x > 1$

סעיף ד

נשתמש בכל מה שמצאנו: חיתוך עם הצירים $(0, 4)$, $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, מקסימום $(1,\ 20.09)$.

כאשר $x \to -\infty$ הביטוי e^{3x} שואף ל־0 מהר יותר משהביטוי $4 - 3x$ גדל, ולכן $f(x) \to 0$ מלמעלה – הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה אופקית משמאל. כאשר $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$.

סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

תשובה: ראו סקיצה.

אסימפטוטה $y = 0$ משמאל, מקסימום $(1,\ 20.09)$, חיתוך $(0,\ 4)$ ו־$\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$.

סעיף ה (1)

נגזור את $g(x) = -2f(x) - 1$:

$$g'(x) = -2f'(x)$$

לכן $g'(x) = 0$ בדיוק כאשר $f'(x) = 0$, כלומר ב־$x = 1$. הסימן של $g'(x)$ הפוך לסימן של $f'(x)$:

x	$g'(x)$	$g(x)$
$x < 1$	–	יורדת ↘
$x = 1$	0	מינימום
$x > 1$	+	עולה ↗

$$g(1) = -2f(1) - 1 = -2e^3 - 1$$
$$g(1) \approx -41.17$$

תשובה: מינימום: $\left(1,\ -2e^3 - 1\right) \approx (1,\ -41.17)$

סעיף ה (2)

נבדוק את תכונות הגרף של $g(x)$:

• ל־$g(x)$ יש **מינימום** ב־$x = 1$, כלומר מימין לציר ה־y.

• כאשר $x \to -\infty$: $f(x) \to 0$, ולכן $g(x) \to -2 \cdot 0 - 1 = -1$. כלומר משמאל יש אסימפטוטה אופקית $y = -1$, מתחת לציר ה־x.

• כאשר $x \to \infty$: $f(x) \to -\infty$, ולכן $g(x) \to \infty$.

גרף I – יש לו מקסימום ולא מינימום, ולכן נפסל.

גרף II – נקודת המינימום משמאל לציר ה־y והגרף שואף לאינסוף משמאל, ולכן נפסל.

גרף III – אסימפטוטה אופקית שלילית משמאל, מינימום מימין לציר ה־y ועלייה לאינסוף מימין. מתאים.

תשובה: גרף III.

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 5

5. הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה, $f'(x)$, מוגדרות לכל x.

נתון: $f'(x) = e^x - e^{2-x}$.

א. מצאו את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

נתון כי הפונקצייה $f(x)$ חיובית לכל x.

ב. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ג. קבעו איזו מן האפשרויות (1)–(4) שלפניכם יכולה לתאר את הפונקצייה $f(x)$. נמקו.

$$f(x) = e^x - e^{2-x} + c \quad (1)$$

$$f(x) = e^x + \frac{1}{2}e^{2-x} + c \quad (2)$$

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}e^{2-x} + c \quad (3)$$

$$f(x) = e^x + e^{2-x} + c \quad (4)$$

c הוא פרמטר.

דרך נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ העבירו אנך לציר ה־ x.

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי האנך, ועל ידי הצירים הוא $e^2 + e - 1$.

ד. **(1)** מצאו את c.

(2) מצאו את ערך ה־ y של נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$.

פתרון מלא

סעיף א

נמצא היכן הנגזרת מתאפסת:

$$f'(x) = e^x - e^{2-x} = 0$$
$$e^x = e^{2-x}$$

בסיסים שווים, ולכן המעריכים שווים:

$$x = 2 - x \;\Rightarrow\; 2x = 2 \;\Rightarrow\; x = 1$$

נקבע את סוג הקיצון בעזרת טבלת סימנים של $f'(x)$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < 1$	–	יורדת ↘
$x = 1$	0	מינימום
$x > 1$	+	עולה ↗

(למשל $f'(0) = 1 - e^2 < 0$, $f'(2) = e^2 - 1 > 0$.)

תשובה: $x=1$, נקודת מינימום.

סעיף ב

מה שידוע לנו על $f(x)$:

• מוגדרת לכל x.

• יורדת עבור $x<1$ ועולה עבור $x>1$ – מינימום ב־$x=1$.

• חיובית לכל x – כל הגרף מעל ציר ה־x (גם נקודת המינימום).

סקיצה אפשרית (הגובה המדויק של המינימום עוד לא ידוע בשלב זה):

סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה f(x)

תשובה: ראו סקיצה: גרף מעל ציר ה־x, יורד עד מינימום ב־$x=1$ ואחר כך עולה.

סעיף ג

$f(x)$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)$:

$$f(x)=\int \left(e^{x}-e^{2-x}\right)dx$$

הפונקציה הקדומה של e^{2-x} היא $\frac{e^{2-x}}{-1}=-e^{2-x}$, ולכן:

$$f(x)=e^{x}-\left(-e^{2-x}\right)+c$$
$$f(x)=e^{x}+e^{2-x}+c$$

זו אפשרות (4).

בדיקה – נגזור כל אפשרות (נזכור $\left(e^{2-x}\right)'=-e^{2-x}$):

(1): $e^{x}+e^{2-x}$ – לא מתאים.

(2): $e^{x}-\frac{1}{2}e^{2-x}$ – לא מתאים.

(3): $e^{x}+\frac{1}{2}e^{2-x}$ – לא מתאים.

(4): $e^{x}-e^{2-x}$ – מתאים.

תשובה: אפשרות (4): $f(x)=e^{x}+e^{2-x}+c$

סעיף ד (1)

האנך לציר ה־x עובר דרך נקודת הקיצון, כלומר זה הישר $x=1$. הצירים והאנך תוחמים את הקטע $0\le x\le 1$, ו־$f(x)$ חיובית, לכן:

השטח מתחת לגרף f(x) בין x=0 ל-x=1

$$S=\int_{0}^{1}\left(e^{x}+e^{2-x}+c\right)dx$$
$$=\left[e^{x}-e^{2-x}+cx\right]_{0}^{1}$$
$$=(e-e+c)-\left(1-e^{2}+0\right)$$
$$=c-1+e^{2}$$

נשווה לשטח הנתון:

$$c-1+e^{2}=e^{2}+e-1$$
$$c=e$$

תשובה: $c=e$

סעיף ד (2)

עם $c = e$:

$$f(x) = e^x + e^{2-x} + e$$

נציב $x = 1$:

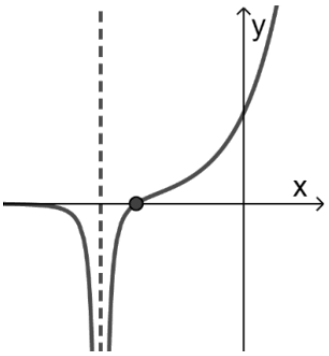
$$f(1) = e^1 + e^{2-1} + e = 3e$$
$$f(1) \approx 8.15$$

תשובה: $y = 3e \approx 8.15$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 5

5. הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות בתחום $x \neq -2$.

לפניך סרטוט של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה-x בנקודה אחת $(a,0)$. a הוא קבוע.

א. הבע באמצעות a את שיעור ה-x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

נתון גם כי: $f(x)=\frac{e^{2x}}{x+2}$.

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ורשום את הערך של a.

ג. רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ה. מצא את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה-x של הפונקציה $f(x)$.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ז. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ציר ה-x וציר ה-y.

פתרון מלא

סעיף א

נקודת קיצון של $f(x)$ יכולה להיות רק במקום שבו $f'(x)=0$. לפי הסרטוט, הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה־x רק בנקודה $(a,\ 0)$.

מהסרטוט: משמאל ל־a (בין האסימפטוטה $x=-2$ לבין a) הגרף של $f'(x)$ מתחת לציר ה־x, כלומר $f'(x)<0$ ו־$f(x)$ יורדת. מימין ל־a הגרף מעל ציר ה־x, כלומר $f'(x)>0$ ו־$f(x)$ עולה.

מעבר מירידה לעלייה – נקודת מינימום.

תשובה: $x=a$, נקודת מינימום.

סעיף ב

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{x+2}$$

נגזור לפי כלל המנה $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(x+2)-e^{2x}\cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}(2x+4-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}(2x+3)}{(x+2)^2}$$

תמיד $e^{2x}>0$ ו־$(x+2)^2>0$ בתחום, לכן $f'(x)=0$ רק כאשר:

$$2x+3=0\ \Rightarrow\ x=-1.5$$

$$f(-1.5)=\frac{e^{-3}}{-1.5+2}$$

$$= \frac{e^{-3}}{0.5} = \frac{2}{e^3}$$
$$f(-1.5) \approx 0.1$$

לפי סעיף א זו נקודת מינימום, ו־$a = -1.5$.

תשובה: מינימום $\left(-1.5,\ \frac{2}{e^3}\right) \approx (-1.5,\ 0.1)$
$a = -1.5$

סעיף ג

הסימן של $f'(x)$ נקבע לפי $2x + 3$ (שאר הגורמים חיוביים), ובהתאם לסרטוט של $f(x)$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < -2$	−	יורדת ↘
$x = -2$	לא מוגדרת	לא מוגדרת
$-2 < x < -1.5$	−	יורדת ↘
$x = -1.5$	0	מינימום
$x > -1.5$	+	עולה ↗

תשובה: עלייה: $x > -1.5$
ירידה: $x < -2$ **או** $-2 < x < -1.5$

סעיף ד

חיתוך עם ציר ה־y – נציב $x = 0$:

$$f(0) = \frac{e^0}{0 + 2} = \frac{1}{2}$$

חיתוך עם ציר ה־x – צריך $f(x) = 0$, כלומר המונה $e^{2x} = 0$. אבל $e^{2x} > 0$ לכל x, ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה־x.

תשובה: עם ציר ה־y: $(0,\ 0.5)$
עם ציר ה־x: אין.

סעיף ה

המכנה $x + 2$ מתאפס ב־$x = -2$, והמונה שם שונה מאפס ($e^{-4} \neq 0$). לכן כאשר $x \to -2$ הפונקציה שואפת לאינסוף (או למינוס אינסוף), והישר $x = -2$ הוא אסימפטוטה אנכית.

תשובה: $x = -2$

סעיף ו

נשתמש במה שמצאנו: אסימפטוטה $x = -2$, מינימום $\left(-1.5,\ \frac{2}{e^3}\right)$, חיתוך $(0,\ 0.5)$, ותחומי עלייה וירידה.

בדיקות נוספות: כאשר $x \to -\infty$, $e^{2x} \to 0$ והמכנה שלילי, לכן $f(x) \to 0$ מלמטה (למשל $f(-5) \approx -1.5 \cdot 10^{-5}$) – הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה אופקית משמאל. כאשר $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$ (למשל $f(5) \approx 3146$).

משמאל ל־$x = -2$ הפונקציה שלילית ויורדת ל־$-\infty$; מימין ל־$x = -2$ היא חיובית.

סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ז

הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה־x ב־$x=-1.5$, ובקטע $-1.5 \leq x \leq 0$ הוא מעל ציר ה־x. לכן השטח המבוקש:

השטח בין הגרף של f'(x), ציר x וציר y

$$S = \int_{-1.5}^{0} f'(x)\,dx$$

$f(x)$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)$:

$$S = f(0) - f(-1.5)$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{2}{e^3} \approx 0.4$$

תשובה: $S = \frac{1}{2} - \frac{2}{e^3} \approx 0.4$

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 4

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{8}{e^x}+\frac{e^x}{2}+c$, c הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך ראשית הצירים.

ב. מצא את c .

הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של c שמצאת בסעיף ב, וענה על הסעיפים ג–ו.

ג. מצא את שיעורי נקודת החיתוך הנוספת של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ד. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נסמן ב־ S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ועל ידי ציר ה־ x .

נסמן ב־ S_1 את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $-f(x)$, ועל ידי ציר ה־ x .

נסמן ב־ S_2 את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $2\cdot f(x)$, ועל ידי ציר ה־ x .

ו. בעבור כל אחד מן השטחים S_1 ו־ S_2 קבע אם הוא גדול מ־ S , קטן ממנו או שווה לו.

פתרון מלא

סעיף א

$e^x > 0$ לכל x, לכן המכנה e^x אף פעם לא מתאפס, וגם e^x מוגדר לכל x. תחום ההגדרה: כל x.

תשובה: כל x

סעיף ב

הגרף עובר בראשית הצירים, לכן $f(0)=0$:

$$\frac{8}{e^0}+\frac{e^0}{2}+c=0$$
$$8+0.5+c=0$$
$$c=-8.5$$

מעכשיו:

$$f(x)=\frac{8}{e^x}+\frac{e^x}{2}-8.5$$

תשובה: $c=-8.5$

סעיף ג

נשווה ל־0 ונכפול ב־$2e^x$ (חיובי):

$$\frac{8}{e^x}+\frac{e^x}{2}-8.5=0 \;\Big/\cdot 2e^x$$

$$16 + e^{2x} - 17e^x = 0$$

נסמן $t = e^x$ ($t > 0$):

$$t^2 - 17t + 16 = 0$$
$$(t-1)(t-16) = 0$$
$$t = 1 \;\Rightarrow\; e^x = 1 \;\Rightarrow\; x = 0$$
$$t = 16 \;\Rightarrow\; e^x = 16 \;\Rightarrow\; x = \ell n16$$

$x = 0$ היא ראשית הצירים (נתונה), לכן נקודת החיתוך הנוספת היא $(\ell n16,\ 0)$, כלומר בערך $(2.77,\ 0)$.

תשובה: $(\ell n16,\ 0) \approx (2.77,\ 0)$

סעיף ד

נכתוב $\frac{8}{e^x} = 8e^{-x}$ ונגזור:

$$f'(x) = -8e^{-x} + \frac{e^x}{2}$$
$$f'(x) = -\frac{8}{e^x} + \frac{e^x}{2}$$

נשווה ל־0 ונכפול ב־$2e^x$:

$$-16 + e^{2x} = 0 \;\Rightarrow\; e^{2x} = 16$$
$$e^x = 4 \;\Rightarrow\; x = \ell n4 \approx 1.39$$
$$f(\ell n4) = \frac{8}{4} + \frac{4}{2} - 8.5 = -4.5$$

נבדוק סימן נגזרת משני הצדדים, למשל $f'(0) = -8 + 0.5 < 0$ ו־$f'(3) = -0.4 + 10.04 > 0$:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < \ell n4$ –		יורדת ↘
$x = \ell n4$ 0		מינימום
$x > \ell n4$ +		עולה ↗

לכן $(\ell n4,\ -4.5)$ היא נקודת מינימום.

תשובה: מינימום: $(\ell n4,\ -4.5) \approx (1.39,\ -4.5)$

סעיף ה

נשתמש בנקודות החיתוך $(0,0)$ ו־$(\ell n16, 0)$ ובמינימום $(\ell n4, -4.5)$. כאשר $x \to \infty$ האיבר $\frac{e^x}{2}$ גדל ללא גבול, וכאשר $x \to -\infty$ האיבר $\frac{8}{e^x}$ גדל ללא גבול – לכן $f(x) \to \infty$ בשני הצדדים ואין אסימפטוטות אופקיות.

סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

תשובה: ראו סקיצה.
מינימום $(\ell n4,\ -4.5)$, חיתוך עם ציר x ב־0 וב־$\ell n16$.
סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

סעיף ו

S הוא השטח בין גרף $f(x)$ לציר ה־x, בתחום $0 \le x \le \ell n16$ (שם הגרף מתחת לציר).

הגרפים של f(x), -f(x) ו־2f(x) והשטח S

S_1: הגרף של $-f(x)$ הוא שיקוף של הגרף של $f(x)$ ביחס לציר ה־x. שיקוף לא משנה שטחים, ונקודות החיתוך עם ציר ה־x נשארות אותן נקודות, לכן $S_1 = S$.

S_2: לגרף של $2f(x)$ אותן נקודות חיתוך עם ציר ה־x, אבל כל ערך y מוכפל ב־2, כלומר המרחק מציר ה־x בכל נקודה כפול. לכן $S_2 = 2S$, ובפרט $S_2 > S$.

(בעזרת אינטגרל: $S_1 = \int_0^{\ell n16}(-f(x))\,dx = S$, ו־$S_2 = \int_0^{\ell n16}(-2f(x))\,dx = 2S$.)

תשובה: $S_1 = S$

$S_2 = 2S$**, כלומר** $S_2 > S$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.