סדרות – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 4 יחידות, כיתה י״א (שאלון 471) • 5 שאלות

בגרות חורף תשפ״ג (2023) • שאלה 1

1. יוסי רץ במסלול מסוים. בדקה הראשונה הוא רץ 75 מטרים.

בכל דקה, החל מן הדקה השנייה, הוא רץ מרחק הגדול פי 1.02 מן המרחק שרץ בדקה שקדמה לה.

בתשובותיכם על הסעיפים שלפניכם דייקו שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א. **(1)** מהו המרחק שרץ יוסי במשך הדקה הרביעית?

(2) מהו המרחק הכולל שרץ יוסי במשך ארבע הדקות הראשונות של הריצה?

ב. כתבו נוסחה לחישוב המרחק הכולל שרץ יוסי במשך n הדקות הראשונות של הריצה.

ג. יוסי רוצה לרוץ $2{,}500$ מטרים סך הכול, אך לרשותו עומדות 25 דקות בלבד לעשות זאת.

הסבירו מדוע לא יצליח יוסי לעבור $2{,}500$ מטרים ב־25 דקות.

ד. דני רץ באותו המסלול. בדקה הראשונה הוא רץ מרחק מסוים.

גם הוא רץ בכל דקה, החל מן הדקה השנייה, מרחק הגדול פי 1.02 מן המרחק שרץ בדקה שקדמה לה.

חשבו מהו המרחק הקצר ביותר שעליו לרוץ בדקה הראשונה כדי לעבור מרחק של $2{,}500$ מטרים ב־25 דקות.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המרחקים שיוסי רץ בכל דקה יוצרים סדרה הנדסית: האיבר הראשון $a_1 = 75$ והמנה $q = 1.02$ (כל דקה – פי 1.02 מהקודמת).

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \;\Rightarrow\; a_4 = 75 \cdot 1.02^3 = 75 \cdot 1.061208 \approx 79.59$$

תשובה: 79.59 מטרים.

סעיף א (2)

סכום ארבעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \;\Rightarrow\; S_4 = \frac{75(1.02^4 - 1)}{1.02 - 1} = \frac{75 \cdot 0.08243216}{0.02} \approx 309.12$$

תשובה: 309.12 מטרים.

סעיף ב

$$S_n = \frac{75(1.02^n - 1)}{0.02} = 3750\,(1.02^n - 1)$$

תשובה: $S_n = 3750(1.02^n - 1)$ **מטרים.**

סעיף ג

נחשב לפי הנוסחה מסעיף ב את המרחק הכולל ב־25 דקות:

$$S_{25} = 3750\,\left(1.02^{25} - 1\right) \approx 3750 \cdot 0.6406 \approx 2402.27$$

ב־25 דקות יוסי רץ רק כ־2,402.27 מטרים, פחות מ־2,500 מטרים, ולכן הוא לא יצליח לעבור 2,500 מטרים בזמן שעומד לרשותו.

תשובה: ב־25 דקות הוא רץ רק כ־2,402.27 מ׳ < 2,500 מ׳.

סעיף ד

נסמן ב־a_1 את המרחק שדני רץ בדקה הראשונה. המנה זהה: $q = 1.02$. נדרוש שהמרחק הכולל ב־25 דקות יהיה לפחות 2,500 מטרים:

$$\frac{a_1(1.02^{25} - 1)}{0.02} \geq 2500$$

$$a_1 \geq \frac{2500 \cdot 0.02}{1.02^{25} - 1} = \frac{50}{0.640606} \approx 78.05$$

תשובה: כ־78.05 מטרים.

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 1

1. נועם התאמן לקראת תחרות שחייה.

בכל אימון, החל מן האימון השני, שחה נועם 50 מטר יותר מבאימון שקדם לו.

ידוע כי המרחק ששחה נועם באימון השמיני גדול פי 2 מן המרחק ששחה באימון הראשון.

א. מצאו כמה מטרים שחה נועם באימון הראשון.

ב. **(1)** האם ייתכן שבאחד האימונים שחה נועם 830 מטר בדיוק? נמקו.

(2) מצאו באיזה אימון שחה נועם $1{,}000$ מטר בדיוק.

אחרי האימון שבו שחה נועם $1{,}000$ מטר בפעם הראשונה, החליט נועם לשנות את שיטת האימון שלו ולשחות בכל אחד מן האימונים שבאו אחריו $1{,}000$ מטר בדיוק.

ידוע כי עד לתחרות שחה נועם בכל האימונים $25{,}450$ מטר סך הכול.

ג. כמה אימונים סך הכול התאמן נועם לקראת התחרות?

פתרון מלא

סעיף א

המרחקים יוצרים סדרה חשבונית עם הפרש $d = 50$. נסמן ב־a_1 את המרחק באימון הראשון:

$$a_8 = a_1 + 7d = a_1 + 350$$

$$a_8 = 2a_1 \;\Rightarrow\; a_1 + 350 = 2a_1 \;\Rightarrow\; a_1 = 350$$

תשובה: 350 מטר.

סעיף ב (1)

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 350 + 50(n-1)$$

$$350 + 50(n-1) = 830 \;\Rightarrow\; 50(n-1) = 480 \;\Rightarrow\; n - 1 = 9.6 \;\Rightarrow\; n = 10.6$$

n חייב להיות מספר טבעי (מספר האימון), ולכן אין אימון שבו שחה נועם 830 מטר בדיוק.

תשובה: לא ייתכן – מתקבל $n = 10.6$, שאינו מספר טבעי.

סעיף ב (2)

$$350 + 50(n-1) = 1000 \;\Rightarrow\; 50(n-1) = 650 \;\Rightarrow\; n - 1 = 13 \;\Rightarrow\; n = 14$$

תשובה: באימון ה־14.

סעיף ג

סכום המרחקים ב־14 האימונים הראשונים (סכום סדרה חשבונית):

$$S_{14} = \frac{14\,(a_1 + a_{14})}{2} = \frac{14\,(350 + 1000)}{2} = 9450$$

אחרי האימון ה־14 שחה נועם 1,000 מטר בכל אימון. נסמן ב־k את מספר האימונים האלה:

$$9450 + 1000k = 25450 \;\Rightarrow\; 1000k = 16000 \;\Rightarrow\; k = 16$$

$$14 + 16 = 30$$

תשובה: 30 אימונים.

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 1

1. נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 84 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$$

א. **(1)** האם הסדרה הנתונה חשבונית או הנדסית? נמקו את תשובתכם.

(2) כִּתבו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה.

ב. **(1)** כמה איברים חיוביים יש בסדרה?

(2) כִּתבו את ערכו של האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ג. נתון כי סכום האיברים השליליים בסדרה שווה ל־ -552 .

כמה איברים סך הכול יש בסדרה הנתונה?

פתרון מלא

סעיף א (1)

לפי כלל הנסיגה $a_{n+1} - a_n = -2$ לכל n: ההפרש בין כל שני איברים סמוכים קבוע.

תשובה: חשבונית, עם הפרש $d = -2$.

סעיף א (2)

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 84 + (n-1)\cdot(-2) = 86 - 2n$$

תשובה: $a_n = 86 - 2n$

סעיף ב (1)

$$86 - 2n > 0 \;\Rightarrow\; n < 43$$

האיברים $a_1, \ldots, a_{42}$ חיוביים ($a_{42} = 2$), ו־$a_{43} = 0$ אינו חיובי.

תשובה: 42 איברים חיוביים.

סעיף ב (2)

$a_{43} = 0$, ולכן האיבר השלילי הראשון הוא a_{44}:

$$a_{44} = 86 - 88 = -2$$

תשובה: $a_{44} = -2$

סעיף ג

האיברים השליליים הם $-2, -4, -6, \ldots$ – סדרה חשבונית עם $b_1 = -2$, $d = -2$. נסמן ב־k את מספרם:

$$S_k = \frac{k\,[2\cdot(-2) + (k-1)(-2)]}{2} = -k(k+1) = -552$$

$$k^2 + k - 552 = 0 \;\Rightarrow\; k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2208}}{2} = \frac{-1 \pm 47}{2} \;\Rightarrow\; k = 23$$

בסדרה: 42 איברים חיוביים, האיבר 0, ו־23 איברים שליליים:

$$42 + 1 + 23 = 66$$

תשובה: 66 איברים.

בגרות חורף נבצרים תשפ״ב (2022) • שאלה 3

3. עדי מתאמנת לקראת מרוץ של 42 ק״מ.
לפי תוכנית האימונים, בשבוע הראשון תרוץ עדי 6 ק״מ, בכל שבוע תרוץ 1.5 ק״מ יותר מאשר בשבוע שקדם לו, ובשבוע האחרון תרוץ 42 ק״מ.

א. כמה שבועות תימשך תוכנית האימונים של עדי?

ב. כמה קילומטרים תרוץ עדי בשבוע ה- 20 לאימונים?

לאחר שעדי רצה 20 שבועות התברר לה כי המרוץ המתוכנן הוקדם בשבועיים, ולכן שינתה את תוכנית האימונים: אחרי השבוע ה- 20 היא תרוץ בכל שבוע 2 ק״מ יותר מאשר בשבוע שקדם לו.

ג. האם לפי התוכנית לאחר השינוי עדי תרוץ 42 ק״מ בשבוע האחרון? נמק.

ד. כמה קילומטרים סך הכול תרוץ עדי במהלך כל האימונים?

פתרון מלא

סעיף א

המרחקים השבועיים יוצרים סדרה חשבונית: $a_1 = 6$, $d = 1.5$, והאיבר האחרון $a_n = 42$. לפי נוסחת האיבר הכללי:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$42 = 6 + 1.5(n-1) \;\Rightarrow\; 36 = 1.5(n-1) \;\Rightarrow\; n-1 = 24 \;\Rightarrow\; n = 25$$

תשובה: 25 שבועות

סעיף ב

$$a_{20} = a_1 + 19d = 6 + 19 \cdot 1.5 = 34.5$$

תשובה: 34.5 ק״מ

סעיף ג

המרוץ הוקדם בשבועיים, ולכן התוכנית נמשכת $25 - 2 = 23$ שבועות. אחרי השבוע ה־20 נשארו 3 שבועות (21, 22, 23), ובכל אחד מהם עדי רצה 2 ק״מ יותר מבשבוע הקודם:

שבוע 21: $34.5 + 2 = 36.5$ שבוע 22: $36.5 + 2 = 38.5$ שבוע 23: $38.5 + 2 = 40.5$

(או: סדרה חשבונית עם $b_1 = 36.5$, $d = 2$: $b_3 = 36.5 + 2 \cdot 2 = 40.5$.)

בשבוע האחרון עדי רצה 40.5 ק״מ, ולא 42 ק״מ.

תשובה: לא – בשבוע האחרון (ה־23) היא רצה 40.5 ק״מ.

סעיף ד

נחשב בשני חלקים. 20 השבועות הראשונים – סכום סדרה חשבונית:

$$S_n = \frac{n\,[2a_1 + (n-1)d]}{2} \qquad S_{20} = \frac{20\,[2 \cdot 6 + 19 \cdot 1.5]}{2} = \frac{20 \cdot 40.5}{2} = 405$$

שלושת השבועות האחרונים (סעיף ג):

$$36.5 + 38.5 + 40.5 = 115.5$$

סך הכול:

$$405 + 115.5 = 520.5$$

תשובה: 520.5 ק״מ

בגרות חורף תשפ״ב (2022) • שאלה 1

1. יוסי רוצה לקנות אופנוע. מחיר האופנוע הוא $43{,}650$ שקלים.

הוא מתלבט בין שתי הצעות שהוצעו לו לשלם בעבור האופנוע בתשלומים.

הצעה ראשונה: התשלומים שונים זה מזה.

כל תשלום (מלבד התשלום הראשון) גבוה מן התשלום הקודם לו במספר שקלים קבוע.

על פי ההצעה הזאת:

ההפרש בין התשלום השישי ובין התשלום השני הוא 200 שקלים.

התשלום התשיעי גבוה פי 1.2 מן התשלום הראשון.

א. מצא את התשלום הראשון.

ב. מצא את מספר התשלומים שישלם יוסי בעבור האופנוע לפי ההצעה הראשונה.

הצעה שנייה: התשלומים שווים זה לזה.

מספר התשלומים שיהיה על יוסי לשלם בעבור האופנוע זהה בשתי ההצעות (מספר התשלומים שמצאת בסעיף **ב**).

ג. מצא כמה מן התשלומים שעל יוסי לשלם לפי ההצעה הראשונה נמוכים מן התשלום הקבוע שעליו לשלם לפי ההצעה השנייה.

פתרון מלא

סעיף א

לפי ההצעה הראשונה התשלומים יוצרים סדרה חשבונית (כל תשלום גבוה מקודמו בסכום קבוע d). נשתמש ב־$a_n = a_1 + (n-1)d$.

ההפרש בין התשלום השישי לשני:

$$a_6 - a_2 = (a_1 + 5d) - (a_1 + d) = 4d = 200 \;\Rightarrow\; d = 50$$

התשלום התשיעי גבוה פי 1.2 מהראשון:

$$a_1 + 8d = 1.2a_1 \;\Rightarrow\; 8 \cdot 50 = 0.2a_1 \;\Rightarrow\; 400 = 0.2a_1 \;\Rightarrow\; a_1 = 2000$$

תשובה: 2,000 ש״ח

סעיף ב

סכום כל התשלומים הוא מחיר האופנוע, $S_n = 43{,}650$:

$$S_n = \frac{n\left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2} \qquad \frac{n\left[2 \cdot 2000 + 50(n-1)\right]}{2} = 43{,}650$$

$$n(4000 + 50n - 50) = 87{,}300 \;\Rightarrow\; 50n^2 + 3950n - 87{,}300 = 0 \;\; / : 50$$

$$n^2 + 79n - 1746 = 0 \;\Rightarrow\; n = \frac{-79 \pm \sqrt{79^2 + 4 \cdot 1746}}{2} = \frac{-79 \pm 115}{2}$$

$n = 18$ או $n = -97$. מספר התשלומים חייב להיות מספר טבעי, ולכן $n = 18$.

תשובה: 18 תשלומים

סעיף ג

בהצעה השנייה יש גם 18 תשלומים שווים, ולכן כל תשלום הוא:

$$43{,}650 : 18 = 2425$$

נמצא כמה תשלומים בהצעה הראשונה קטנים מ־2,425:

$a_n < 2425 \;\Rightarrow\; 2000 + 50(n-1) < 2425 \;\Rightarrow\; 50(n-1) < 425 \;\Rightarrow\; n-1 < 8.5 \;\Rightarrow\; n < 9.5$

כלומר התשלומים 1 עד 9 (התשלום התשיעי הוא $2000 + 8 \cdot 50 = 2400$ והעשירי כבר 2450).

תשובה: 9 תשלומים

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.