הסתברות – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 4 יחידות, כיתה י״א (שאלון 471) • 16 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 3

3. במפעל מסוים מייצרים מחשבים.

כל המחשבים שיוצרו במחזור ייצור מסוים נבדקו בשתי בדיקות איכות כדי לוודא שהם תקינים.

בבדיקה הראשונה נמצא ש־ 80% מן המחשבים הם תקינים.

אם מחשב נמצא תקין בבדיקה הראשונה, ההסתברות שבבדיקה השנייה הוא יימצא תקין היא 0.9 .

אם מחשב לא נמצא תקין בבדיקה הראשונה, ההסתברות שבבדיקה השנייה הוא יימצא תקין היא 0.35 .

בחרו באקראי מחשב שיוצר במחזור הייצור.

א. מהי ההסתברות שבדיוק באחת הבדיקות המחשב נמצא תקין?

ב. מהי ההסתברות שלפחות באחת הבדיקות המחשב נמצא תקין?

רק מחשב שנמצא תקין בשתי הבדיקות מועבר למכירה.

בחרו באקראי מחשב שיוצר במחזור הייצור.

ג. ידוע שהמחשב שנבחר נמצא תקין לפחות באחת הבדיקות. מהי ההסתברות שמחשב זה הועבר למכירה?

נתון כי במחזור ייצור זה ייצרו 250 מחשבים.

ד. מצאו את מספר המחשבים שהועברו למכירה במחזור ייצור זה.

מבין המחשבים שייצרו במחזור ייצור זה, בוחרים באקראי שני מחשבים זה אחר זה (הוצאה ללא החזרה).

ה. מהי ההסתברות שבדיוק מחשב אחד הועבר למכירה?

פתרון מלא

סעיף א

נבנה עץ הסתברויות (דיאגרמת עץ) לשתי הבדיקות:

בדיקה ראשונה	בדיקה שנייה	הסתברות
תקין (0.8)	תקין (0.9)	$0.8 \cdot 0.9 = 0.72$
תקין (0.8)	לא תקין (0.1)	$0.8 \cdot 0.1 = 0.08$
לא תקין (0.2)	תקין (0.35)	$0.2 \cdot 0.35 = 0.07$
לא תקין (0.2)	לא תקין (0.65)	$0.2 \cdot 0.65 = 0.13$

„בדיוק באחת הבדיקות תקין" – תקין בראשונה ולא בשנייה, או לא תקין בראשונה ותקין בשנייה:

$$0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.35 = 0.08 + 0.07 = 0.15$$

תשובה: 0.15

סעיף ב

המאורע המשלים ל„המחשב נמצא תקין לפחות באחת הבדיקות" הוא „המחשב לא נמצא תקין באף אחת מהבדיקות":

$$1 - 0.2 \cdot 0.65 = 1 - 0.13 = 0.87$$

תשובה: 0.87

סעיף ג

נסמן: A – המחשב הועבר למכירה (נמצא תקין בשתי הבדיקות), B – המחשב נמצא תקין לפחות באחת הבדיקות.

המאורע A מוכל במאורע B, ולכן $P(A \cap B) = P(A) = 0.72$.

המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(A/B)$. לפי נוסחת

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נציב:

$$P(A/B) = \frac{0.72}{0.87}$$
$$= \frac{72}{87} = \frac{24}{29} \approx 0.828$$

תשובה: $\frac{24}{29} \approx 0.828$

סעיף ד

ההסתברות שמחשב מועבר למכירה היא 0.72, ולכן:

$$250 \cdot 0.72 = 180$$

תשובה: 180 מחשבים.

סעיף ה

במחזור יש 180 מחשבים שהועברו למכירה ו־$250 - 180 = 70$ שלא הועברו. בוחרים שניים בלי החזרה.

„בדיוק אחד הועבר למכירה" – הראשון כן והשני לא, או להפך:

$$\frac{180}{250} \cdot \frac{70}{249} + \frac{70}{250} \cdot \frac{180}{249} = 2 \cdot \frac{180 \cdot 70}{250 \cdot 249} = \frac{25200}{62250} = \frac{168}{415} \approx 0.405$$

תשובה: $\frac{168}{415} \approx 0.405$

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד א׳ • שאלה 3

3. במשק חקלאי מסוים מגדלים שני סוגים של פלפלים: פלפלים גדולים ופלפלים קטנים.

מספר הפלפלים הגדולים גדול פי 4 ממספר הפלפלים הקטנים.

בוחרים באקראי פלפל אחד מבין כל הפלפלים במשק החקלאי.

א. מהי ההסתברות שהפלפל שנבחר הוא פלפל קטן?

הפלפלים הגדולים במשק החקלאי הם אדומים או צהובים,

והפלפלים הקטנים הם אדומים או ירוקים.

0.6 מן הפלפלים הגדולים הם אדומים.

0.75 מן הפלפלים הקטנים הם אדומים.

בוחרים באקראי פלפל אחד מבין כל הפלפלים במשק החקלאי.

ב. מהי ההסתברות שהפלפל שנבחר הוא פלפל גדול צהוב?

ג. **(1)** מהי ההסתברות שהפלפל שנבחר הוא פלפל אדום?

(2) ידוע שנבחר פלפל אדום. מהי ההסתברות שפלפל זה הוא פלפל גדול?

כל הפלפלים במשק החקלאי נשלחים לשני בתי אריזה א׳ ו־ ב׳.

לבית אריזה א׳ נשלחים כל הפלפלים האדומים, ולבית אריזה ב׳ נשלחים כל הפלפלים הצהובים וכל הפלפלים הירוקים.

ד. האם אחוז הפלפלים הגדולים בבית אריזה א׳ גדול או קטן מאחוז הפלפלים הגדולים בבית אריזה ב׳? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן את מספר הפלפלים הקטנים ב־k. אז מספר הגדולים הוא $4k$, ובסך הכול יש $5k$ פלפלים. ההסתברות לבחור פלפל קטן:

$$\frac{k}{5k} = \frac{1}{5} = 0.2$$

תשובה: 0.2

סעיף ב

הסתברות לפלפל גדול: 0.8. מן הגדולים 0.6 אדומים, ולכן $1 - 0.6 = 0.4$ צהובים. מן הקטנים 0.75 אדומים ו־0.25 ירוקים. נבנה עץ:

גודל	צבע	הסתברות
גדול (0.8)	אדום (0.6)	$0.8 \cdot 0.6 = 0.48$
גדול (0.8)	צהוב (0.4)	$0.8 \cdot 0.4 = 0.32$
קטן (0.2)	אדום (0.75)	$0.2 \cdot 0.75 = 0.15$
קטן (0.2)	ירוק (0.25)	$0.2 \cdot 0.25 = 0.05$

פלפל גדול וצהוב: $0.8 \cdot 0.4 = 0.32$.

תשובה: 0.32

סעיף ג (1)

פלפל אדום יכול להיות גדול או קטן:

$$0.8 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.75 = 0.48 + 0.15 = 0.63$$

תשובה: 0.63

סעיף ג (2)

נסמן: A – הפלפל גדול, B – הפלפל אדום.

המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נציב:

$$P(A/B) = \frac{0.48}{0.63}$$
$$= \frac{48}{63} = \frac{16}{21} \approx 0.762$$

תשובה: $\frac{16}{21} \approx 0.762$

סעיף ד

נסמן: A – הפלפל גדול, B – הפלפל אדום (כמו בסעיף ג (2)), ו־$\bar{B}$ – הפלפל אינו אדום (צהוב או ירוק).

לבית אריזה א' מגיעים כל האדומים, ולכן אחוז הגדולים בו הוא $P(A/B)$, שחישבנו בסעיף ג (2):

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$= \frac{0.48}{0.63} = \frac{16}{21}$$
$$\approx 0.762 = 76.2\%$$

לבית אריזה ב' מגיעים הצהובים (כולם גדולים) והירוקים (כולם קטנים), כלומר הפלפלים שאינם אדומים. אחוז הגדולים בו הוא $P(A/\bar{B})$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

גדול ולא אדום = גדול וצהוב: $P(A \cap \bar{B}) = 0.32$; $P(\bar{B}) = 0.32 + 0.05 = 0.37$. נציב:

$$P(A/\bar{B}) = \frac{0.32}{0.37} = \frac{32}{37}$$
$$\approx 0.865 = 86.5\%$$

$76.2\% < 86.5\%$, ולכן אחוז הפלפלים הגדולים בבית אריזה א' **קטן** מאחוז הגדולים בבית אריזה ב'.

תשובה: קטן (76.2% לעומת 86.5%).

בגרות חורף תשפ״ו (2026) • שאלה 3

3. ביישוב מסוים מעודדים משפחות למחזר בקבוקי זכוכית, אריזות פלסטיק ועוד. ביישוב זה מעודדים משפחות גם להתנדב במוסדות היישוב.

בסקר שנערך בקרב כל המשפחות ביישוב, נמצא כי חלק מן המשפחות ממחזרות, ושאר המשפחות אינן ממחזרות.

כמו כן חלק מן המשפחות ביישוב מתנדבות, והשאר אינן מתנדבות.

בוחרים באקראי משפחה מן היישוב. ההסתברות שמשפחה זו ממחזרת גדולה ב־ 0.44 מן ההסתברות שמשפחה זו אינה ממחזרת.

$\frac{5}{9}$ מן המשפחות שממחזרות הן משפחות מתנדבות.

א. **(1)** מצאו את אחוז המשפחות ביישוב שממחזרות.

(2) מצאו את אחוז המשפחות ביישוב שממחזרות וגם מתנדבות.

מספר המשפחות ביישוב שממחזרות וגם מתנדבות גדול פי 5 ממספר המשפחות ביישוב שאינן ממחזרות וגם אינן מתנדבות.

ב. בוחרים באקראי משפחה מן היישוב. מהי ההסתברות שמשפחה זו מתנדבת?

ג. בוחרים באקראי משפחה מן היישוב שמתנדבת. מהי ההסתברות שמשפחה זו אינה ממחזרת?

ביישוב זה יש 750 משפחות.

ד. מצאו כמה משפחות ביישוב ממחזרות <u>או</u> מתנדבות.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נסמן ב־p את ההסתברות שמשפחה ממחזרת. ההסתברות שאינה ממחזרת היא $1-p$:

$$p=(1-p)+0.44 \;\Rightarrow\; 2p=1.44 \;\Rightarrow\; p=0.72$$

תשובה: 72%

סעיף א (2)

$\frac{5}{9}$ מהממחזרות מתנדבות:

$$0.72\cdot\frac{5}{9}=0.4$$

תשובה: 40%

סעיף ב

המשפחות שאינן ממחזרות וגם אינן מתנדבות: $\frac{0.4}{5}=0.08$. נבנה טבלה דו־ממדית:

		מתנדבת	**לא מתנדבת**	**סך הכול**
ממחזרת		0.4	0.32	0.72
לא ממחזרת		0.2	0.08	0.28
סך הכול		0.6	0.4	1

לא ממחזרת ומתנדבת: $0.28-0.08=0.2$. ההסתברות שמשפחה מתנדבת:

$$0.4+0.2=0.6$$

תשובה: 0.6

סעיף ג

נסמן: A – המשפחה אינה ממחזרת, B – המשפחה מתנדבת. ידוע שהמשפחה מתנדבת, ולכן המבוקש הוא $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

מהטבלה בסעיף ב: $P(A \cap B) = 0.2$, $P(B) = 0.6$. נציב:

$$P(A/B) = \frac{0.2}{0.6}$$
$$= \frac{1}{3}$$

תשובה: $\frac{1}{3}$

סעיף ד

„ממחזרות **או** מתנדבות" – כל המשפחות פרט לאלה שאינן ממחזרות וגם אינן מתנדבות:

$$1 - 0.08 = 0.92 \qquad 0.92 \cdot 750 = 690$$

תשובה: 690 משפחות.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 3

3. בשתי מגירות א' ו־ ב' יש שני סוגי פירות: תפוחים ואגסים.

במגירה א' יש 5 תפוחים ו־ 11 אגסים.

במגירה ב' יש 4 תפוחים ו־ 6 אגסים.

מוציאים באקראי פרי אחד ממגירה א' ואחר כך מוציאים באקראי פרי אחד ממגירה ב'.

א. מהי ההסתברות להוציא שני פירות מסוגים שונים?

ב. **(1)** מהי ההסתברות להוציא לפחות תפוח אחד?

(2) ידוע שהוציאו לפחות תפוח אחד. מהי ההסתברות שהוציאו שני תפוחים?

החזירו כל פרי למגירה שממנה הוציאו אותו.

העבירו משתי המגירות את כל הפירות למגירה ג', שהייתה ריקה.

לאחר מכן הוסיפו x תפוחים למגירה ג'.

מוציאים באקראי שני פירות בזה אחר זה (ללא החזרה) ממגירה ג'.

נתון כי ההסתברות להוציא שני אגסים היא $\frac{8}{33}$.

ג. מצאו את הערך של x.

פתרון מלא

סעיף א

במגירה א' יש 16 פירות (5 תפוחים, 11 אגסים) ובמגירה ב' 10 פירות (4 תפוחים, 6 אגסים). ההוצאות בלתי תלויות.

שני פירות מסוגים שונים – תפוח מא' ואגס מב', או אגס מא' ותפוח מב':

$$\frac{5}{16}\cdot\frac{6}{10}+\frac{11}{16}\cdot\frac{4}{10}=\frac{30+44}{160}=\frac{74}{160}=\frac{37}{80}$$

תשובה: $\frac{37}{80}=0.4625$

סעיף ב (1)

המשלים של „לפחות תפוח אחד" הוא „שני אגסים":

$$1-\frac{11}{16}\cdot\frac{6}{10}=1-\frac{66}{160}=\frac{94}{160}=\frac{47}{80}$$

תשובה: $\frac{47}{80}=0.5875$

סעיף ב (2)

נסמן: A – הוציאו שני תפוחים, B – הוציאו לפחות תפוח אחד. ידוע ש־B התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

אם הוציאו שני תפוחים, הוציאו בוודאי לפחות תפוח אחד: A מוכל ב־B, ולכן $P(A \cap B) = P(A)$:

$$P(A) = \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{10} = \frac{20}{160}$$

מסעיף ב (1): $P(B) = \frac{94}{160}$. נציב:

$$P(A/B) = \frac{\frac{20}{160}}{\frac{94}{160}}$$

$$= \frac{20}{94} = \frac{10}{47}$$

תשובה: $\frac{10}{47} \approx 0.213$

סעיף ג

במגירה ג': $9 + x$ תפוחים ו־$5 + 4 + x = 11 + 6 = 17$ אגסים, ובסך הכול $26 + x$ פירות. מוציאים שני פירות בלי החזרה:

$$\frac{17}{26 + x} \cdot \frac{16}{25 + x} = \frac{8}{33}$$

$$(26 + x)(25 + x) = \frac{272 \cdot 33}{8} = 1122$$

$$x^2 + 51x + 650 = 1122 \;\Rightarrow\; x^2 + 51x - 472 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} =$$

$$\frac{-51 \pm \sqrt{2601 + 1888}}{2} = \frac{-51 \pm 67}{2}$$

$x = 8$ ($x = -59$ נפסל, כי x הוא מספר תפוחים).

תשובה: $x = 8$

בגרות קיץ תשפ״ה (2025) – מועד א׳ • שאלה 3

3. חלק מן התלמידים בשכבת י״א בבית ספר מסוים הם בנים והשאר הן בנות. חלק מן התלמידים בשכבה מתנדבים והשאר אינם מתנדבים.

75% מתלמידי השכבה מתנדבים.

$\frac{3}{5}$ מן התלמידים שמתנדבים הם בנות.

נתון כי מספר הבנות שמתנדבות גדול פי 3 ממספר הבנות שאינן מתנדבות.

א. מהי ההסתברות לבחור באקראי מן השכבה בת שמתנדבת?

ב. מצאו את אחוז הבנים בשכבה.

בוחרים באקראי תלמיד מן השכבה.

ג. ידוע שהתלמיד שנבחר הוא בן. מהי ההסתברות שהוא מתנדב?

בכתבה שהכינה דנה לעיתון השכבה היא כתבה:

"אחוז המתנדבות מבין הבנות בשכבה גדול מאחוז המתנדבים מבין הבנים בשכבה".

ד. האם המשפט שכתבה דנה נכון? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן: G – התלמיד הוא בת, B – התלמיד הוא בן, V – התלמיד מתנדב.

נתון: $P(V) = 0.75$, ומבין המתנדבים $\frac{3}{5}$ הם בנות, כלומר $P(G/V) = \frac{3}{5}$.

$$P(G \cap V) = P(V) \cdot P(G/V) = 0.75 \cdot \frac{3}{5} = 0.45$$

תשובה: 0.45

סעיף ב

מספר הבנות שמתנדבות גדול פי 3 ממספר הבנות שאינן מתנדבות, ולכן גם ההסתברויות מקיימות:

$$P(G \cap V) = 3 \cdot P(G \cap \bar{V}) \;\Rightarrow\; P(G \cap \bar{V}) = \frac{0.45}{3} = 0.15$$

$$P(G) = P(G \cap V) + P(G \cap \bar{V}) = 0.45 + 0.15 = 0.6$$

$$P(B) = 1 - 0.6 = 0.4$$

נשלים טבלה דו־ממדית:

	מתנדבים (V)	לא מתנדבים ($\bar{V}$)	סה״כ
בנות (G)	0.45	0.15	0.6
בנים (B)	0.30	0.10	0.4
סה״כ	0.75	0.25	1

תשובה: 40% מתלמידי השכבה הם בנים.

סעיף ג

המאורעות כמו בסעיף א: B – התלמיד הוא בן, V – התלמיד מתנדב. ידוע שהתלמיד שנבחר הוא בן, ולכן המבוקש הוא $P(V/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(V/B) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)}$$

מהטבלה: $P(B \cap V) = 0.75 - 0.45 = 0.30$, $P(B) = 0.4$. נציב:

$$P(V/B) = \frac{0.30}{0.4}$$
$$= 0.75$$

תשובה: 0.75

סעיף ד

המאורעות כמו בסעיף א: G – התלמיד הוא בת, B – התלמיד הוא בן, V – התלמיד מתנדב.

אחוז המתנדבות מבין הבנות הוא ההסתברות המותנית $P(V/G)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(V/G) = \frac{P(G \cap V)}{P(G)}$$

מהטבלה: $P(G \cap V) = 0.45$, $P(G) = 0.6$. נציב:

$$P(V/G) = \frac{0.45}{0.6}$$
$$= 0.75$$

אחוז המתנדבים מבין הבנים (סעיף ג): $P(V/B) = 0.75$.

שני האחוזים שווים (75%), ולכן המשפט של דנה **אינו נכון**.

תשובה: לא נכון – בשתי הקבוצות 75% מתנדבים.

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 3

3. בשכבת י"א בבית ספר מסוים לומדים בנים ובנות. לחלקם יש רישיון נהיגה ולשאר אין.

25% מתלמידי השכבה הם בנים שאין להם רישיון נהיגה.

ל־ $\frac{1}{3}$ מן הבנים בשכבה יש רישיון נהיגה.

א. מצאו את אחוז הבנים בשכבה.

ההסתברות לבחור באקראי מן השכבה בן שיש לו רישיון נהיגה שווה להסתברות לבחור באקראי מן השכבה בת שיש לה רישיון נהיגה.

ב. ידוע שנבחר באקראי תלמיד (בן או בת) מן השכבה שאין לו רישיון נהיגה. מהי ההסתברות שהתלמיד שנבחר הוא בן?

בשכבה זו יש 69 בנים.

ג. מצאו כמה תלמידים יש בשכבה סך הכול.

לשכבה הצטרפו 26 תלמידים חדשים (בנים ובנות).

בוחרים באקראי שני תלמידים מן השכבה בזה אחר זה (הוצאה ללא החזרה).

ההסתברות ששני התלמידים שנבחרו הם בנים היא $\frac{10}{77}$.

ד. מצאו כמה בנים הצטרפו לשכבה.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן: B – התלמיד הוא בן, G – התלמיד היא בת, L – יש לתלמיד רישיון נהיגה.

ל־$\frac{1}{3}$ מהבנים יש רישיון, ולכן ל־$\frac{2}{3}$ מהבנים **אין** רישיון: $P(\bar{L}/B)=\frac{2}{3}$. נתון $P(B\cap\bar{L})=0.25$:

$$P(B)\cdot\frac{2}{3}=0.25\ \Rightarrow\ P(B)=\frac{0.25\cdot 3}{2}=0.375$$

תשובה: 37.5% מתלמידי השכבה הם בנים.

סעיף ב

$$P(B\cap L)=P(B)-P(B\cap\bar{L})$$
$$=0.375-0.25=0.125$$

נתון שההסתברות לבחור בן עם רישיון שווה להסתברות לבחור בת עם רישיון: $P(G\cap L)=0.125$. נשלים טבלה:

	רישיון (L)	אין רישיון ($\bar{L}$)	סה"כ
בנים (B)	0.125	0.25	0.375
בנות (G)	0.125	0.5	0.625
סה"כ	0.25	0.75	1

המאורעות כמו בסעיף א: B – התלמיד הוא בן, $\bar{L}$ – אין לתלמיד רישיון נהיגה. ידוע שלתלמיד שנבחר אין רישיון, ולכן המבוקש הוא $P(B/\bar{L})$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(B/\bar{L})=\frac{P(B\cap\bar{L})}{P(\bar{L})}$$

מהטבלה: $P(B\cap\bar{L})=0.25$, $P(\bar{L})=0.75$. נציב:

$$P(B/\bar{L}) = \frac{0.25}{0.75}$$
$$= \frac{1}{3}$$

תשובה: $\frac{1}{3}$

סעיף ג

הבנים הם 37.5% מתלמידי השכבה. נסמן ב־N את מספר התלמידים בשכבה:

$$0.375 \cdot N = 69 \;\Rightarrow\; N = \frac{69}{0.375} = 184$$

תשובה: 184 תלמידים.

סעיף ד

אחרי ההצטרפות יש בשכבה $184 + 26 = 210$ תלמידים. נסמן ב־k את מספר הבנים שהצטרפו, כך שיש $69 + k$ בנים.

בחירה בזה אחר זה ללא החזרה:

$$P(\text{BB}) = \frac{69+k}{210} \cdot \frac{68+k}{209} = \frac{10}{77}$$
$$(69+k)(68+k) = \frac{10 \cdot 210 \cdot 209}{77} = 5700$$
$$k^2 + 137k + 4692 = 5700 \;\Rightarrow\; k^2 + 137k - 1008 = 0$$
$$k = \frac{-137 \pm \sqrt{137^2 + 4 \cdot 1008}}{2} = \frac{-137 \pm 151}{2}$$

$k = 7$ או $k = -144$ (נפסל, כי מספר בנים אינו שלילי).

בדיקה: $\frac{76}{210} \cdot \frac{75}{209} = \frac{5700}{43890} = \frac{10}{77}$ ✓

תשובה: הצטרפו 7 בנים.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 3

3. גלית ורועי משחקים משחק. כל סיבוב במשחק יכול להסתיים באחת משלוש האפשרויות האלה:

ניצחון של גלית, ניצחון של רועי או תיקו.

ההסתברות שגלית תנצח בסיבוב כלשהו גדולה פי 3 מן ההסתברות שרועי ינצח בסיבוב כלשהו.

ההסתברות שסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.28.

א. מצאו את ההסתברות שגלית תנצח בסיבוב כלשהו במשחק.

במשחק שגלית ורועי משחקים יש שני סיבובים. התוצאות של הסיבובים אינן תלויות זו בזו.

ב. מהי ההסתברות ששום סיבוב לא יסתיים בתיקו?

ג. מהי ההסתברות שגלית תנצח לפחות באחד מן הסיבובים?

ד. ידוע שגלית ניצחה לפחות באחד מן הסיבובים. מהי ההסתברות שאחד מן הסיבובים הסתיים בתיקו?

פתרון מלא

סעיף א

נסמן ב־p את ההסתברות שרועי ינצח בסיבוב. אז ההסתברות שגלית תנצח היא $3p$, וההסתברות לתיקו 0.28.
סכום ההסתברויות של כל התוצאות האפשריות הוא 1:

$$3p + p + 0.28 = 1 \;\Rightarrow\; 4p = 0.72 \;\Rightarrow\; p = 0.18$$

$$P(\text{G}) = 3 \cdot 0.18 = 0.54$$

תשובה: 0.54

סעיף ב

ההסתברות שסיבוב **לא** יסתיים בתיקו: $1 - 0.28 = 0.72$. הסיבובים בלתי תלויים, ולכן:

$$P = 0.72 \cdot 0.72 = 0.5184$$

תשובה: 0.5184

סעיף ג

נשתמש במאורע המשלים: גלית **לא** מנצחת באף סיבוב. ההסתברות שגלית לא תנצח בסיבוב היא $1 - 0.54 = 0.46$:

$$P(\text{at least one G}) = 1 - 0.46 \cdot 0.46 = 1 - 0.2116 = 0.7884$$

תשובה: 0.7884

סעיף ד

נסמן: A – גלית ניצחה לפחות באחד מהסיבובים, B – אחד מהסיבובים הסתיים בתיקו.

המאורע $A \cap B$: סיבוב אחד ניצחון של גלית והסיבוב השני תיקו – בשני סדרים אפשריים (גלית ואז תיקו, או תיקו ואז גלית):

$$P(A \cap B) = 2 \cdot 0.54 \cdot 0.28 = 0.3024$$

המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(B/A)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

לפי סעיף ג, $P(A) = 0.7884$. נציב:

$$P(B/A) = \frac{0.3024}{0.7884}$$
$$= \frac{28}{73} \approx 0.384$$

תשובה: $\frac{28}{73} \approx 0.384$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 3

3. במתחם דירות יש שני סוגי דירות – דירות הפונות לכיוון הפארק ודירות הפונות לכיוון הכביש.

ההסתברות שדירה במתחם פונה לכיוון הפארק היא $\frac{3}{4}$.

חלק מן הדירות במתחם משופצות, והשאר אינן משופצות.

מספר הדירות המשופצות גדול פי 4 ממספר הדירות שאינן משופצות.

28% מן הדירות הפונות לכיוון הכביש הן דירות משופצות.

א. בוחרים באקראי דירה מבין כל הדירות במתחם.

(1) מהי ההסתברות לבחור דירה משופצת?

(2) מהי ההסתברות לבחור דירה שגם פונה לכיוון הכביש וגם משופצת?

ב. בוחרים באקראי דירה מבין הדירות שאינן משופצות.

מהי ההסתברות שדירה זו פונה לכיוון הכביש?

35 דירות במתחם גם פונות לכיוון הכביש וגם משופצות.

ג. מצאו כמה דירות במתחם גם פונות לכיוון הפארק וגם משופצות.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נסמן: R – הדירה משופצת, P – הדירה פונה לפארק, K – הדירה פונה לכביש.

מספר הדירות המשופצות גדול פי 4 ממספר הדירות שאינן משופצות, ולכן $P(R) = 4P(\bar{R})$:

$$4P(\bar{R}) + P(\bar{R}) = 1 \;\Rightarrow\; P(\bar{R}) = 0.2 \;\Rightarrow\; P(R) = 0.8$$

תשובה: 0.8

סעיף א (2)

$P(K) = 1 - \frac{3}{4} = 0.25$, ו־28% מהדירות הפונות לכביש משופצות: $P(R/K) = 0.28$.

$$P(K \cap R) = P(K) \cdot P(R/K) = 0.25 \cdot 0.28 = 0.07$$

תשובה: 0.07

סעיף ב

נשלים טבלה דו־ממדית. כל משבצת חסרה מתקבלת מסכום השורה או העמודה:

$$P(P \cap R) = 0.8 - 0.07 = 0.73$$

$$P(P \cap \bar{R}) = 0.75 - 0.73 = 0.02$$

	משופצת (R)	לא משופצת ($\bar{R}$)	סה"כ
פארק (P)	0.73	0.02	0.75
כביש (K)	0.07	0.18	0.25
סה"כ	0.8	0.2	1

$$P(K \cap \bar{R}) = 0.25 - 0.07 = 0.18$$

נבחרת דירה מבין הדירות שאינן משופצות, כלומר ידוע שהתרחש $\bar{R}$ (הדירה אינה משופצת), ושואלים מה ההסתברות שהיא פונה לכביש (K). המבוקש: $P(K/\bar{R})$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(K/\bar{R}) = \frac{P(K \cap \bar{R})}{P(\bar{R})}$$

מהטבלה: $P(K \cap \bar{R}) = 0.18$, $P(\bar{R}) = 0.2$. נציב:

$$P(K/\bar{R}) = \frac{0.18}{0.2}$$
$$= 0.9$$

תשובה: 0.9

סעיף ג

35 דירות הן 7% מכל הדירות במתחם. נסמן ב־N את מספר הדירות:

$$0.07 \cdot N = 35 \;\Rightarrow\; N = 500$$

מהטבלה: $P(P \cap R) = 0.8 - 0.07 = 0.73$:

$$0.73 \cdot 500 = 365$$

תשובה: 365 דירות.

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 3

3. חנן משחק במשחק קליעה למטרה. במשחק זה יש שתי תוצאות אפשריות בלבד: קליעה או החטאה.

ההסתברות שחנן יקלע בניסיון הראשון היא $\frac{3}{5}$.

ההסתברות שחנן יקלע בניסיון השני תלויה בתוצאה של הניסיון הראשון:

אם חנן קולע בניסיון הראשון, ההסתברות שהוא יקלע בניסיון השני היא $\frac{2}{3}$.

אם חנן מחטיא בניסיון הראשון, ההסתברות שהוא יקלע בניסיון השני היא $\frac{7}{16}$.

לחנן יש שני ניסיונות קליעה למטרה.

א. מהי ההסתברות שחנן החטיא בניסיון הראשון וקלע בניסיון השני?

ב. **(1)** מהי ההסתברות שחנן קלע פעם אחת לפחות?

(2) ידוע שחנן קלע פעם אחת לפחות.

מהי ההסתברות שהוא קלע פעם אחת בדיוק?

גם לדני יש שני ניסיונות קליעה למטרה.

ההסתברות שדני יקלע בכל אחד מן הניסיונות היא p.

נתון כי ההסתברות שדני יקלע פעם אחת בדיוק שווה להסתברות שחנן יקלע פעם אחת בדיוק.

ג. מצאו את p (את שתי האפשרויות).

פתרון מלא

סעיף א

נבנה עץ הסתברויות לשני הניסיונות של חנן:

ניסיון ראשון	ניסיון שני	הסתברות
קליעה $\left(\frac{3}{5}\right)$	קליעה $\left(\frac{2}{3}\right)$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$
קליעה $\left(\frac{3}{5}\right)$	החטאה $\left(\frac{1}{3}\right)$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$
החטאה $\left(\frac{2}{5}\right)$	קליעה $\left(\frac{7}{16}\right)$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{16}=\frac{7}{40}$
החטאה $\left(\frac{2}{5}\right)$	החטאה $\left(\frac{9}{16}\right)$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{16}=\frac{9}{40}$

החטאה בראשון וקליעה בשני:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{16}=\frac{14}{80}=\frac{7}{40}$$

תשובה: $\frac{7}{40}$

סעיף ב (1)

המאורע המשלים ל„קלע פעם אחת לפחות" הוא „החטיא בשני הניסיונות":

$$1-\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{16}=1-\frac{9}{40}=\frac{31}{40}$$

תשובה: $\frac{31}{40}$

סעיף ב (2)

נסמן: A – חנן קלע פעם אחת בדיוק, B – חנן קלע פעם אחת לפחות.

„פעם אחת בדיוק" = קליעה ואז החטאה, או החטאה ואז קליעה:

$$P(A) = \frac{1}{5} + \frac{7}{40}$$
$$= \frac{8}{40} + \frac{7}{40} = \frac{15}{40}$$

המאורע A מוכל במאורע B, ולכן $P(A \cap B) = P(A)$.

המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נציב:

$$P(A/B) = \frac{\frac{15}{40}}{\frac{31}{40}}$$
$$= \frac{15}{31}$$

תשובה: $\frac{15}{31}$

סעיף ג

ההסתברות שחנן קלע פעם אחת בדיוק היא $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$ (סעיף ב (2)).

אצל דני ההסתברות לקליעה בכל ניסיון היא p ולהחטאה $1-p$. „פעם אחת בדיוק" – קליעה ואז החטאה או החטאה ואז קליעה:

$$p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

נשווה:

$$2p(1-p) = \frac{3}{8} \;\Rightarrow\; 2p - 2p^2 = \frac{3}{8} \;\; / \cdot 8$$
$$16p^2 - 16p + 3 = 0$$
$$p_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{32} = \frac{16 \pm 8}{32}$$
$$p_1 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}, \qquad p_2 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

שני הערכים בין 0 ל־1, ולכן שניהם מתאימים.

תשובה: $p = \frac{3}{4}$ **או** $p = \frac{1}{4}$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 3

3. בקלמר של דנה יש 25 עפרונות זהים בגודלם בשלושה צבעים:

15 עפרונות כחולים,

4 עפרונות אדומים,

6 עפרונות צהובים.

דנה מוציאה באקראי עיפרון מן הקלמר. אם העיפרון הוא כחול או אדום, היא מחזירה את העיפרון לקלמר.

אם העיפרון הוא צהוב, היא משאירה אותו מחוץ לקלמר.

לאחר מכן דנה מוציאה באקראי עיפרון נוסף מן הקלמר.

א. מהי ההסתברות שדנה תוציא שני עפרונות צהובים?

ב. **(1)** מהי ההסתברות שדנה תוציא שני עפרונות ב**אותו הצבע**?

(2) ידוע ששני העפרונות שהוציאה דנה הם באותו הצבע.

מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני עפרונות אדומים **או** שני עפרונות צהובים?

דנה החזירה את כל העפרונות לקלמר ונתנה לאחיה מן הקלמר x עפרונות כחולים, 3 עפרונות אדומים ו־ 2 עפרונות צהובים.

לאחר מכן היא הוציאה באקראי שני עפרונות מן הקלמר ללא החזרה.

נתון: ההסתברות שדנה הוציאה עיפרון צהוב ולאחריו עיפרון אדום היא $\frac{1}{60}$.

ג. מצאו את x .

פתרון מלא

סעיף א

בקלמר 25 עפרונות, מהם 6 צהובים. אם העיפרון הראשון צהוב, דנה **לא** מחזירה אותו, ולכן לפני ההוצאה השנייה נשארים 24 עפרונות, מהם 5 צהובים:

$$P = \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{30}{600} = \frac{1}{20} = 0.05$$

תשובה: 0.05

סעיף ב (1)

„אותו הצבע" – שני כחולים, או שני אדומים, או שני צהובים.

עיפרון כחול או אדום מוחזר לקלמר, ולכן בהוצאה השנייה ההסתברויות לא משתנות:

$$P(\text{2 blue}) = \frac{15}{25} \cdot \frac{15}{25} = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36$$

$$P(\text{2 red}) = \frac{4}{25} \cdot \frac{4}{25} = 0.16 \cdot 0.16 = 0.0256$$

שני צהובים – מסעיף א: 0.05.

$$P = 0.36 + 0.0256 + 0.05 = 0.4356$$

תשובה: 0.4356

סעיף ב (2)

נסמן: A – דנה הוציאה שני אדומים או שני צהובים, B – שני העפרונות באותו הצבע.

המאורע A מוכל במאורע B, ולכן $P(A \cap B) = P(A) = 0.0256 + 0.05 = 0.0756$.

המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נציב:

$$P(A/B) = \frac{0.0756}{0.4356}$$
$$= \frac{21}{121} \approx 0.1736$$

תשובה: $\frac{21}{121} \approx 0.1736$

סעיף ג

אחרי שדנה נתנה לאחיה x כחולים, 3 אדומים ו־2 צהובים, נשארו בקלמר:

כחולים: $15 - x$, אדומים: $4 - 3 = 1$, צהובים: $6 - 2 = 4$. סך הכול $25 - x - 5 = 20 - x$ עפרונות.

ההוצאה ללא החזרה. ההסתברות לצהוב ואחריו אדום:

$$\frac{4}{20 - x} \cdot \frac{1}{19 - x} = \frac{1}{60}$$
$$(20 - x)(19 - x) = 240$$
$$380 - 39x + x^2 = 240 \;\Rightarrow\; x^2 - 39x + 140 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 560}}{2} = \frac{39 \pm 31}{2} \;\Rightarrow\; x = 35 \;\text{ or }\; x = 4$$

$x = 35$ נפסל, כי בקלמר יש רק 15 עפרונות כחולים. לכן $x = 4$.

בדיקה: נשארו 16 עפרונות, $\frac{4}{16} \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{240} = \frac{1}{60}$ ✓

תשובה: $x = 4$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 3

3. אוניברסיטה גדולה בדקה את הקשר בין ההישגים הלימודיים של הסטודנטים באוניברסיטה ובין ציוני תעודת הבגרות שלהם.

20% מן הסטודנטים סיימו בהצטיינות את בחינות הבגרות, והשאר סיימו בציונים רגילים.

מבין הסטודנטים שסיימו את בחינות הבגרות בהצטיינות, 80% הגיעו להישגים גבוהים באוניברסיטה.

מבין הסטודנטים שסיימו את בחינות הבגרות בציונים רגילים, 25% הגיעו להישגים גבוהים באוניברסיטה.

א. בוחרים באקראי סטודנט מן האוניברסיטה.

מהי ההסתברות שהוא הגיע להישגים גבוהים באוניברסיטה?

ב. בוחרים באקראי סטודנט שהגיע להישגים גבוהים באוניברסיטה.

מהי ההסתברות שהוא סיים את בחינות הבגרות בציונים רגילים?

ג. לפניכם שתי טענות, (1)–(2), שפורסמו בתקשורת. קבעו בעבור כל אחת מהן אם היא נכונה, ונמקו את קביעתכם.

(1) מבין הסטודנטים שהגיעו להישגים גבוהים באוניברסיטה, רובם (מעל 50%) סיימו את בחינות הבגרות בהצטיינות.

(2) מבין הסטודנטים ש**לא** הגיעו להישגים גבוהים באוניברסיטה, רובם (מעל 50%) סיימו את בחינות הבגרות בציונים רגילים.

ד. רות וענבל הן סטודנטיות באוניברסיטה, והן סיימו את בחינות הבגרות בציונים רגילים.

מהי הסתברות שבדיוק אחת מהן הגיעה להישגים גבוהים באוניברסיטה?

פתרון מלא

סעיף א

נסמן: A – הסטודנט סיים את הבגרות בהצטיינות, B – הסטודנט הגיע להישגים גבוהים באוניברסיטה.

נתון: $P(A)=0.2$, ולכן $P(\bar{A})=0.8$; $P(B/A)=0.8$; $P(B/\bar{A})=0.25$.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=0.2\cdot 0.8=0.16$$

$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\cdot P(B/\bar{A})=0.8\cdot 0.25=0.2$$

נשלים טבלה דו־ממדית:

	A **(הצטיינות)**	$\bar{A}$ **(רגילים)**	**סה"כ**
B **(הישגים גבוהים)**	0.16	0.2	0.36
$\bar{B}$	0.04	0.6	0.64
סה"כ	0.2	0.8	1

$$P(B)=0.16+0.2=0.36$$

תשובה: 0.36

סעיף ב

המאורעות כמו בסעיף א: A – הסטודנט סיים את הבגרות בהצטיינות ($\bar{A}$ – בציונים רגילים), B – הסטודנט הגיע להישגים גבוהים באוניברסיטה.

ידוע שהסטודנט הגיע להישגים גבוהים, ושואלים מה ההסתברות שסיים בציונים רגילים, כלומר $P(\bar{A}/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(\bar{A}/B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}$$

מהטבלה בסעיף א: $P(\bar{A}\cap B)=0.2$, $P(B)=0.36$. נציב:

$$P(\bar{A}/B) = \frac{0.2}{0.36}$$
$$= \frac{5}{9} \approx 0.556$$

תשובה: $\frac{5}{9} \approx 0.556$

סעיף ג (1)

המאורעות כמו בסעיף א: A – הסטודנט סיים את הבגרות בהצטיינות, B – הסטודנט הגיע להישגים גבוהים באוניברסיטה.

צריך לבדוק את ההסתברות שסטודנט סיים בהצטיינות, בהינתן שהגיע להישגים גבוהים, כלומר $P(A/B)$.

לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

מהטבלה: $P(A \cap B) = 0.16$, $P(B) = 0.36$. נציב:

$$P(A/B) = \frac{0.16}{0.36}$$
$$= \frac{4}{9} \approx 0.444$$

$0.5 > \frac{4}{9}$: פחות מחצי מהסטודנטים שהגיעו להישגים גבוהים סיימו בהצטיינות.

תשובה: הטענה אינה נכונה ($50\% > \frac{4}{9}$).

סעיף ג (2)

המאורעות כמו בסעיף א: $\bar{A}$ – הסטודנט סיים את הבגרות בציונים רגילים, $\bar{B}$ – הסטודנט לא הגיע להישגים גבוהים באוניברסיטה.

צריך לבדוק את ההסתברות שסטודנט סיים בציונים רגילים, בהינתן שלא הגיע להישגים גבוהים, כלומר $P(\bar{A}/\bar{B})$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

מהטבלה: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.6$, $P(\bar{B}) = 0.64$. נציב:

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{0.6}{0.64}$$
$$= \frac{15}{16} = 0.9375$$

$0.5 > 0.9375$: רוב הסטודנטים שלא הגיעו להישגים גבוהים סיימו בציונים רגילים.

תשובה: הטענה נכונה ($\frac{15}{16} > 50\%$).

סעיף ד

כל אחת מהן סיימה בציונים רגילים, ולכן ההסתברות שכל אחת מהן תגיע להישגים גבוהים היא $P(B/\bar{A}) = 0.25$, והסתברות שלא – 0.75.

„בדיוק אחת" – רות כן ועינבל לא, או רות לא ועינבל כן:

$$0.25 \cdot 0.75 + 0.75 \cdot 0.25 = 0.1875 + 0.1875 = 0.375$$

תשובה: 0.375

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 3

3. בקופה יש 36 מטבעות: 18 מטבעות של שני שקלים,

12 מטבעות של חמישה שקלים,

ו־ 6 מטבעות של עשרה שקלים.

הוציאו מן הקופה באקראי שני מטבעות ללא החזרה.

א. מהי ההסתברות ששני המטבעות שהוציאו היו זהים?

ב. ידוע ששני המטבעות שהוציאו היו זהים.

מהי ההסתברות שהסכום של שני המטבעות שהוציאו היה גבוה מ־ 5 שקלים?

החזירו את כל המטבעות לקופה והוסיפו x מטבעות של עשרה שקלים לקופה.

נתון: לאחר ההוספה, ההסתברות להוציא מן הקופה באקראי ללא החזרה שני מטבעות של חמישה שקלים היא $\frac{1}{15}$.

ג. מצאו את x .

ד. האם ההסתברות להוציא מן הקופה באקראי (ללא החזרה) שני מטבעות זהים גדלה לאחר ההוספה,

קטנה או נשארה ללא שינוי? נמקו.

פתרון מלא

סעיף א

„שני מטבעות זהים" – שניהם של 2 ש"ח, או שניהם של 5 ש"ח, או שניהם של 10 ש"ח. ההוצאה ללא החזרה, ולכן בהוצאה השנייה יש 35 מטבעות ואחד פחות מהסוג שכבר יצא:

$$P=\frac{18}{36}\cdot\frac{17}{35}+\frac{12}{36}\cdot\frac{11}{35}+\frac{6}{36}\cdot\frac{5}{35}=\frac{306+132+30}{1260}=\frac{468}{1260}=\frac{13}{35}$$

תשובה: $\frac{13}{35}\approx 0.371$

סעיף ב

נסמן: A – סכום שני המטבעות גבוה מ־5 ש"ח, B – שני המטבעות זהים.

אם המטבעות זהים, הסכום הוא $2+2=4$, $5+5=10$ או $10+10=20$. הסכום גבוה מ־5 רק כששניהם של 5 ש"ח או שניהם של 10 ש"ח:

$$P(A\cap B)=\frac{12}{36}\cdot\frac{11}{35}+\frac{6}{36}\cdot\frac{5}{35}$$
$$=\frac{132+30}{1260}=\frac{162}{1260}$$

המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

מסעיף א: $P(B)=\frac{468}{1260}$. נציב:

$$P(A/B)=\frac{\frac{162}{1260}}{\frac{468}{1260}}$$
$$=\frac{162}{468}=\frac{9}{26}$$

תשובה: $\frac{9}{26}\approx 0.346$

סעיף ג

אחרי ההוספה יש בקופה $36+x$ מטבעות, ומספר המטבעות של 5 ש"ח לא השתנה (12). ההסתברות להוציא שני מטבעות של 5 ש"ח:

$$\frac{12}{36+x}\cdot\frac{11}{35+x}=\frac{1}{15}$$
$$(36+x)(35+x)=12\cdot 11\cdot 15=1980$$
$$x^2+71x+1260=1980\ \Rightarrow\ x^2+71x-720=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-71\pm\sqrt{5041+2880}}{2}=\frac{-71\pm 89}{2}\ \Rightarrow\ x=9\ \text{ or }\ x=-80$$

x הוא מספר מטבעות, ולכן $x=9$.

תשובה: $x=9$

סעיף ד

אחרי ההוספה יש בקופה 45 מטבעות: 18 של 2 ש"ח, 12 של 5 ש"ח ו־15 של 10 ש"ח.

$$P=\frac{18}{45}\cdot\frac{17}{44}+\frac{12}{45}\cdot\frac{11}{44}+\frac{15}{45}\cdot\frac{14}{44}=\frac{306+132+210}{1980}=\frac{648}{1980}=\frac{18}{55}\approx 0.327$$

לפני ההוספה ההסתברות הייתה $\frac{13}{35}\approx 0.371$ (סעיף א), ולכן היא **קטנה**.

תשובה: קטנה (מ־$\frac{13}{35}\approx 0.371$ ל־$\frac{18}{55}\approx 0.327$).

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 3

3. לשירה יש סל ובו x כדורים סך הכול. 12 מן הכדורים שבסל הם ירוקים והשאר אדומים.

נתון: ההסתברות להוציא 2 כדורים ירוקים בזה אחר זה עם החזרה היא 0.36.

א. מצאו את x.

שירה מוציאה באקראי כדור מן הסל.

אם הכדור אדום, היא מחזירה אותו לסל ושוב מוציאה באקראי כדור מן הסל.

אם הכדור ירוק, היא משאירה אותו בחוץ ושוב מוציאה באקראי כדור מן הסל.

ב. מהי ההסתברות ששירה תוציא **לפחות** כדור ירוק אחד?

ג. אם ידוע ששירה הוציאה **לפחות** כדור ירוק אחד, מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני כדורים בצבעים השונים זה מזה?

לשירה יש סל נוסף, ובו x כדורים (ה־x שמצאתם בסעיף **א**). גם בסל הזה 12 מן הכדורים הם ירוקים והשאר אדומים.

שירה מוציאה באקראי מן הסל הזה שני כדורים עם החזרה.

ד. מהי ההסתברות שכל ארבעת הכדורים שהוציאה שירה משני הסלים היו באותו הצבע?

פתרון מלא

סעיף א

עם החזרה ההסתברות להוציא כדור ירוק זהה בכל הוצאה: $\frac{12}{x}$.

$$\left(\frac{12}{x}\right)^2 = 0.36 \;\Rightarrow\; \frac{12}{x} = 0.6 \;\Rightarrow\; x = 20$$

(בסל 12 כדורים ירוקים ו־8 אדומים.)

תשובה: $x = 20$

סעיף ב

נסמן G – ירוק, R – אדום. המשלים של „לפחות כדור ירוק אחד" הוא „שני כדורים אדומים". אם הראשון אדום הוא מוחזר, ולכן:

$$P(RR) = \frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20} = 0.16$$
$$1 - P(RR) = 1 - 0.16 = 0.84$$

תשובה: 0.84

סעיף ג

נסמן: A – שירה הוציאה שני כדורים בצבעים שונים, B – שירה הוציאה לפחות כדור ירוק אחד. ידוע ש־B התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

בשני כדורים בצבעים שונים יש בהכרח כדור ירוק אחד, כלומר A מוכל ב־B, ולכן $P(A \cap B) = P(A)$.

שני כדורים בצבעים שונים – RG או GR:

- RG: הראשון אדום ומוחזר, ולכן $P(RG) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{20} = 0.24$.
- GR: הראשון ירוק ונשאר בחוץ, נשארו 19 כדורים ובהם 8 אדומים: $P(GR) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{24}{95}$.

$$P(A \cap B) = P(A) = 0.24 + \frac{24}{95}$$
$$= \frac{234}{475}$$

מסעיף ב: $P(B) = 0.84$. נציב:

$$P(A/B) = \frac{\frac{234}{475}}{0.84}$$
$$= \frac{78}{133} \approx 0.586$$

תשובה: $\frac{78}{133} \approx 0.586$

סעיף ד

ארבעת הכדורים באותו צבע: שני הכדורים מהסל הראשון ושני הכדורים מהסל השני כולם ירוקים, או כולם אדומים.

מהסל הראשון (לפי השיטה של שירה):

$$P(GG) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{33}{95} \qquad P(RR) = 0.16$$

מהסל השני (עם החזרה): $P(GG) = 0.6^2 = 0.36$, $P(RR) = 0.4^2 = 0.16$.

$$P = \frac{33}{95} \cdot 0.36 + 0.16 \cdot 0.16 = \frac{1789}{11875} \approx 0.151$$

תשובה: ≈ 0.151

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 3

3. חברה מסוימת מִיינה מועמדים לעבודה בחברה.

כדי להתקבל לעבודה בחברה, המועמדים צריכים לעבור בהצלחה את שלושת שלבי המיון.

מי שלא עבר בהצלחה את השלב הראשון, לא המשיך לשלב השני, ומי שלא עבר בהצלחה את השלב השני, לא המשיך לשלב השלישי.

שלבי המיון היו:

שלב ראשון: מבחן התאמה

שלב שני: ריאיון אישי

שלב שלישי: סדנה קבוצתית

כל המועמדים שעברו בהצלחה את **כל** שלושת השלבים התקבלו לעבודה בחברה.

נתון:

75% מן המועמדים עברו בהצלחה את מבחן ההתאמה.

50% מן המועמדים שעברו בהצלחה את מבחן ההתאמה, עברו בהצלחה את הריאיון האישי.

40% מן המועמדים שעברו בהצלחה את הריאיון האישי, עברו בהצלחה את הסדנה הקבוצתית.

א. בחרו באקראי מועמד. מהי ההסתברות שהוא התקבל לעבודה בחברה?

ב. נטע וגלי השתתפו במיונים האלה. מהי ההסתברות שלכל היותר אחת מהן **התקבלה** לעבודה בחברה?

ג. גם עדי השתתפה במיונים. מהי ההסתברות שהיא עברה בהצלחה את הריאיון האישי, אם ידוע שהיא **לא** התקבלה לעבודה בחברה?

ד. ידוע כי 170 מועמדים מבין כל המועמדים לא התקבלו לעבודה בחברה.

כמה מועמדים התקבלו לעבודה בחברה?

פתרון מלא

סעיף א

כדי להתקבל, המועמד צריך לעבור את שלושת השלבים, זה אחר זה:

$$0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.15$$

תשובה: 0.15

סעיף ב

„לכל היותר אחת התקבלה" הוא המשלים של „שתיהן התקבלו". המיונים של נטע ושל גלי בלתי תלויים:

$$1 - 0.15 \cdot 0.15 = 1 - 0.0225 = 0.9775$$

תשובה: 0.9775

סעיף ג

נסמן: A – עדי עברה את הריאיון האישי, B – עדי לא התקבלה. נעזר בעץ:

- עברה את הריאיון: $P(A) = 0.75 \cdot 0.5 = 0.375$.
- עברה את הריאיון ולא התקבלה (נכשלה בסדנה): $P(A \cap B) = 0.375 \cdot 0.6 = 0.225$.

- לא התקבלה: $P(B) = 1 - 0.15 = 0.85$.

המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נציב:

$$P(A/B) = \frac{0.225}{0.85}$$
$$= \frac{9}{34} \approx 0.265$$

תשובה: $\frac{9}{34} \approx 0.265$

סעיף ד

85% מהמועמדים לא התקבלו, והם 170 מועמדים:

$$N = \frac{170}{0.85} = 200 \qquad 200 - 170 = 30$$

תשובה: 30 מועמדים.

בגרות חורף נבצרים תשפ״ב (2022) • שאלה 1

1. בסקר שנערך בין בני נוער בארץ בנושא ״נוער בזמן הקורונה: עיסוקים מרכזיים״ השתתפו 800 בנים ו- 1,200 בנות.

אחת השאלות בסקר התייחסה להקדשת הזמן ללימודים (שיעורים בזום, הכנת מטלות ושיעורי בית). על פי הסקר התברר כי 75% מהבנים ו- 80% מהבנות הקדישו זמן ללימודים בתקופת משבר הקורונה. נבחר באופן אקראי משתתף בסקר.

א. מהי ההסתברות שנבחר בן שהקדיש זמן ללימודים?

ב. מהי ההסתברות שנבחר משתתף (בן או בת) שלא הקדיש זמן ללימודים?

ג. ידוע שנבחר משתתף שלא הקדיש זמן ללימודים. מהי ההסתברות שנבחר בן?

בכתבה בעיתון על הסקר נכתב כי מקרב בני הנוער שלא הקדישו זמן ללימודים, אחוז הבנים היה גבוה מזה של הבנות.

ד. האם על פי הסקר האמירה בכתבה נכונה? נמק.

פתרון מלא

סעיף א

בסקר השתתפו $800 + 1200 = 2000$ בני נוער. נסמן: A – ״נבחר בן״, L – ״המשתתף הקדיש זמן ללימודים״.

$$P(A) = \frac{800}{2000} = 0.4 \qquad P(\bar{A}) = \frac{1200}{2000} = 0.6$$

$P(L/A) = 0.75$, כלומר 75% מהבנים הקדישו זמן ללימודים, ו־$P(L/\bar{A}) = 0.8$: 80% מהבנות. אפשר לסדר את הנתונים בטבלה (במספרי משתתפים):

	הקדיש זמן	לא הקדיש זמן	סה״כ
בנים	600	200	800
בנות	960	240	1,200
סה״כ	1,560	440	2,000

ההסתברות שנבחר בן שהקדיש זמן ללימודים:

$$P(A \cap L) = P(A) \cdot P(L/A) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3$$

(בדיקה בטבלה: $\frac{600}{2000} = 0.3$.)

תשובה: 0.3

סעיף ב

לא הקדישו זמן ללימודים: 25% מהבנים ו־20% מהבנות.

$$P(\bar{L}) = P(A) \cdot P(\bar{L}/A) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{L}/\bar{A}) = 0.4 \cdot 0.25 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.1 + 0.12 = 0.22$$

(בטבלה: $\frac{200+240}{2000} = \frac{440}{2000} = 0.22$.)

תשובה: 0.22

סעיף ג

המאורעות כמו בסעיף א: A – ״נבחר בן״, $\bar{L}$ – ״המשתתף לא הקדיש זמן ללימודים״.

ידוע שהמשתתף לא הקדיש זמן ללימודים, ולכן המבוקש הוא $P(A/\bar{L})$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/\bar{L}) = \frac{P(A \cap \bar{L})}{P(\bar{L})}$$

מסעיף ב: $P(A \cap \bar{L}) = 0.1$, $P(\bar{L}) = 0.22$. נציב:

$$P(A/\bar{L}) = \frac{0.1}{0.22}$$
$$= \frac{5}{11} \approx 0.455$$

(בדיקה בטבלה: מתוך 440 שלא הקדישו זמן, 200 בנים: $\frac{200}{440} = \frac{5}{11}$.)

תשובה: $\frac{5}{11} \approx 0.455$

סעיף ד

המאורעות כמו בסעיף א: $\bar{A}$ – „נבחרה בת", $\bar{L}$ – „המשתתף לא הקדיש זמן ללימודים".

הכתבה מדברת על החלק של הבנים **מקרב** מי שלא הקדישו זמן ללימודים, כלומר על הסתברות מותנית. את $P(A/\bar{L}) = \frac{5}{11}$ מצאנו בסעיף ג. נחשב גם את החלק של הבנות, $P(\bar{A}/\bar{L})$, לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(\bar{A}/\bar{L}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{L})}{P(\bar{L})}$$

מסעיף ב: $P(\bar{A} \cap \bar{L}) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12$, $P(\bar{L}) = 0.22$. נציב:

$$P(\bar{A}/\bar{L}) = \frac{0.12}{0.22}$$
$$= \frac{6}{11} \approx 0.545$$

(אפשר גם במאורע המשלים: $\frac{6}{11} = 1 - \frac{5}{11}$; בטבלה: $\frac{240}{440} = \frac{6}{11}$.)

$\frac{6}{11} > \frac{5}{11}$, כלומר מבין מי שלא הקדישו זמן ללימודים יש יותר בנות מבנים (כ־45.5% בנים לעומת כ־54.5% בנות). לכן האמירה בכתבה אינה נכונה.

שימו לב: נכון ש־25% מהבנים לא הקדישו זמן ללימודים לעומת 20% מהבנות – אבל הכתבה מדברת על אחוז הבנים **מקרב** בני הנוער שלא הקדישו זמן, וזה $\frac{5}{11}$ בלבד.

תשובה: לא נכונה: מבין מי שלא הקדישו זמן, $\frac{5}{11}$ בנים לעומת $\frac{6}{11}$ בנות.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 3

3. במרכז הקהילתי יש שני חוגים בלבד: חוג כדורגל וחוג טניס. אפשר להשתתף בחוג **אחד בלבד** מבין שני החוגים האלה.

סך כל הבנים המשתתפים בשני החוגים האלה זהה לסך כל הבנות המשתתפות בהם.

80% מן הבנים משתתפים בחוג כדורגל.

מספר הבנות המשתתפות בחוג טניס גדול פי 3 ממספר הבנות המשתתפות בחוג כדורגל.

בוחרים באקראי משתתף בחוגים (בן או בת).

א. מהי ההסתברות שנבחר בן המשתתף בחוג כדורגל?

ב. אם ידוע שנבחר משתתף בחוג טניס, מהי ההסתברות שנבחר בן?

ידוע כי בשני החוגים במרכז הקהילתי יש 200 משתתפים (בנים ובנות) סך הכול.

ג. **(1)** כמה משתתפים סך הכול (בנים ובנות) יש בחוג טניס?

(2) מבין כל המשתתפים בחוגים (בנים ובנות) בוחרים באקראי שניים בזה אחר זה (ללא החזרה).

מהי ההסתברות ששניהם משתתפים בחוג טניס?

דייק 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן: A – „נבחר בן", $\bar{A}$ – „נבחרה בת", B – „המשתתף בחוג כדורגל", $\bar{B}$ – „המשתתף בחוג טניס" (כל משתתף בחוג אחד בלבד).

מספר הבנים שווה למספר הבנות, ולכן $P(A) = P(\bar{A}) = 0.5$.

80% מהבנים בכדורגל: $P(B/A) = 0.8$, ולכן:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4 \qquad P(A \cap \bar{B}) = 0.5 - 0.4 = 0.1$$

מספר הבנות בטניס גדול פי 3 ממספר הבנות בכדורגל. נסמן $P(\bar{A} \cap B) = p$, אז $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 3p$:

$$p + 3p = 0.5 \;\Rightarrow\; p = 0.125 \qquad 3p = 0.375$$

	בנים (A)	בנות ($\bar{A}$)	סה"כ
כדורגל (B)	0.4	0.125	0.525
טניס ($\bar{B}$)	0.1	0.375	0.475
סה"כ	0.5	0.5	1

ההסתברות שנבחר בן המשתתף בחוג כדורגל: $P(A \cap B) = 0.4$.

תשובה: 0.4

סעיף ב

המאורעות כמו בסעיף א: A – „נבחר בן", $\bar{B}$ – „המשתתף בחוג טניס".

ידוע שנבחר משתתף בחוג טניס, ולכן המבוקש הוא ההסתברות המותנית $P(A/\bar{B})$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

מהטבלה: $P(A \cap \bar{B}) = 0.1$, $P(\bar{B}) = 0.1 + 0.375 = 0.475$. נציב:

$$P(A/\bar{B}) = \frac{0.1}{0.475}$$
$$= \frac{4}{19} \approx 0.211$$

תשובה: $\frac{4}{19} \approx 0.211$

סעיף ג (1)

מספר המשתתפים בחוג טניס הוא $P(\bar{B})$ כפול מספר המשתתפים בשני החוגים:

$$0.475 \cdot 200 = 95$$

תשובה: 95 משתתפים

סעיף ג (2)

בוחרים שניים בלי החזרה: בבחירה הראשונה 95 משתתפי טניס מתוך 200, ובשנייה נשארו 94 מתוך 199:

$$P = \frac{95}{200} \cdot \frac{94}{199} = \frac{8930}{39{,}800} = \frac{893}{3980} \approx 0.224$$

תשובה: ≈ 0.224

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.