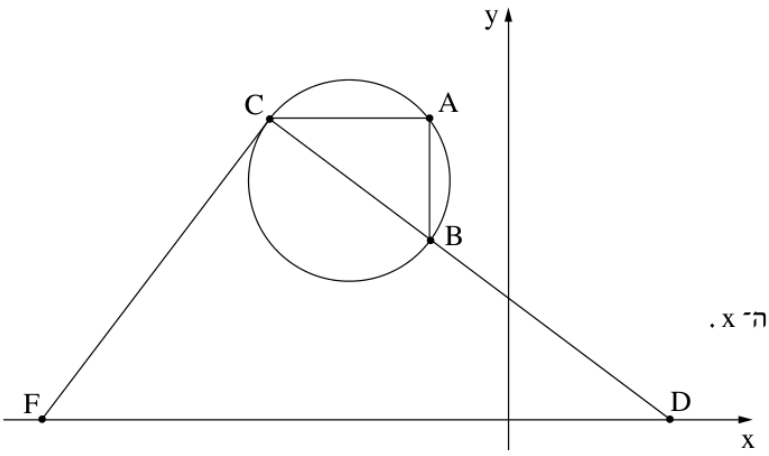
גאומטרייה וטריגונומטריה – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 4 יחידות, כיתה י״א (שאלון 471) • 6 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד א׳ • שאלה 5



5. בסרטוט שלפניכם משולש ABC החסום במעגל.

הצלע CB היא קוטר במעגל.

הצלע AB מקבילה לציר ה־ y.

המשך הצלע CB חותך את ציר ה־ x בנקודה D.

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל,

החותך את ציר ה־ x בנקודה F.

א. **(1)** הסבירו מדוע הצלע AC מקבילה לציר ה־ x.

(2) הוכיחו כי $\Delta ABC \sim \Delta CFD$.

נתון כי $D(8,0)$,

וכי משוואת המשיק CF היא $y=\frac{4}{3}x+31$.

ב. מצאו את אורך הצלע FD.

ג. **(1)** מצאו את משוואת הצלע CD.

(2) מצאו את אורך הצלע CD.

נתון כי יחס הדמיון בין המשולש ABC ובין המשולש CFD הוא $\frac{8}{25}$.

ד. חשבו את היקף המשולש ABC.

פתרון מלא

סעיף א (1)

CB קוטר, ולכן $\angle CAB = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה). כלומר $AC \perp AB$.

AB מקביל לציר ה־y, וציר ה־y מאונך לציר ה־x. ישר המאונך ל־AB מאונך גם לציר ה־y, ולכן AC מקביל לציר ה־x.

תשובה: $\angle CAB = 90^\circ$ (זווית היקפית על קוטר) ו־AB אנכי, לכן AC אופקי.

סעיף א (2)

נתבונן במשולשים ABC ו־CFD:

1. $\angle CAB = 90^\circ$ (סעיף א (1)), ו־$\angle FCD = 90^\circ$ (משיק מאונך לרדיוס/לקוטר בנקודת ההשקה; CD הוא המשך הקוטר CB). לכן $\angle CAB = \angle FCD$.
2. $\angle ACB = \angle CDF$ (זוויות מתחלפות בין הישרים המקבילים AC וציר ה־x, והחותך CD).

לכן $\triangle ABC \sim \triangle CFD$ (ז.ז).

תשובה: הוכחה: זווית ישרה + זוויות מתחלפות (ז.ז).

סעיף ב

F – חיתוך המשיק עם ציר ה־x ($y=0$):

$$\frac{4}{3}x + 31 = 0 \;\Rightarrow\; x = -23.25 \qquad F(-23.25, 0)$$

F ו־D על ציר ה־x:

$$FD = 8 - (-23.25) = 31.25$$

תשובה: $FD = 31.25$

סעיף ג (1)

$CD \perp CF$ (סעיף א (2)). שיפוע CF הוא $\frac{4}{3}$, ולכן $m_{CD} = -\frac{3}{4}$. דרך $D(8,0)$:

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 8) \;\Rightarrow\; y = -\frac{3}{4}x + 6$$

תשובה: $y = -\frac{3}{4}x + 6$

סעיף ג (2)

C היא נקודת החיתוך של CF ו־CD:

$$\frac{4}{3}x + 31 = -\frac{3}{4}x + 6 \;\Big/ \cdot 12 \;\Rightarrow\; 16x + 372 = -9x + 72 \;\Rightarrow\; 25x = -300 \;\Rightarrow\; x = -12$$

$$y = -\frac{3}{4} \cdot (-12) + 6 = 15 \qquad C(-12, 15)$$

$$CD = \sqrt{(8+12)^2 + (0-15)^2} = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25$$

תשובה: $CD = 25$

סעיף ד

נחשב את היקף המשולש CFD:

$$CF = \sqrt{(-12 + 23.25)^2 + 15^2} = \sqrt{126.5625 + 225} = \sqrt{351.5625} = 18.75$$

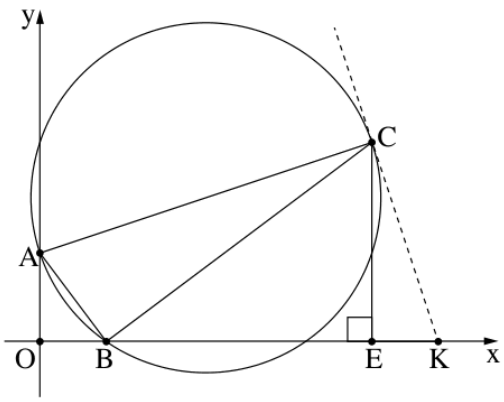
$$P_{CFD} = CF + FD + CD = 18.75 + 31.25 + 25 = 75$$

יחס ההיקפים של משולשים דומים שווה ליחס הדמיון:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{CFD}} = \frac{8}{25} \;\Rightarrow\; P_{ABC} = \frac{8}{25} \cdot 75 = 24$$

תשובה: היקף המשולש ABC הוא 24.

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 4



4. בסרטוט שלפניכם משולש ABC החסום במעגל. AC הוא קוטר במעגל.
הקודקוד A נמצא על ציר ה־y והקודקוד B נמצא על ציר ה־x.
דרך הנקודה C העבירו אנך לציר ה־x החותך אותו בנקודה E.
הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. **(1)** הוכיחו כי $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BCE$.

(2) הוכיחו כי $\Delta AOB \sim \Delta BEC$.

נתון כי יחס הדמיון בין המשולש BEC ובין המשולש AOB הוא 3,
וכי $B(9,0)$, $A(0,12)$.

ב. **(1)** מצאו את אורך הצלע BE.

(2) מצאו את שיעורי הקודקוד C.

בנקודה C העבירו משיק למעגל.

ג. מצאו את משוואת המשיק.

הנקודה K היא נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה־x.

ד. חשבו את שטח המרובע $ABKC$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

AC קוטר, ולכן $\angle ABC = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר).

הזוויות $\angle ABO,\ \angle ABC,\ \angle CBE$ יוצרות יחד זווית שטוחה (על ציר ה־x):

$$\angle ABO + 90^\circ + \angle CBE = 180^\circ \ \Rightarrow\ \angle ABO = 90^\circ - \angle CBE$$

במשולש BEC: $\angle BEC = 90^\circ$ (נתון $CE \perp$ ציר ה־x), ולכן $\angle BCE = 90^\circ - \angle CBE$ (סכום זוויות במשולש).

מכאן $\angle ABO = \angle BCE$.

תשובה: הוכחה: שתיהן משלימות את $\angle CBE$ ל־90°.

סעיף א (2)

במשולשים AOB ו־BEC:

1. $\angle AOB = \angle BEC = 90^\circ$ (הצירים מאונכים; CE אנך לציר ה־x).
2. $\angle ABO = \angle BCE$ (סעיף א (1)).

לכן $\triangle AOB \sim \triangle BEC$ (ז.ז).

תשובה: הוכחה: זווית ישרה + סעיף א (1) – ז.ז.

סעיף ב (1)

מהדמיון $\triangle AOB \sim \triangle BEC$ הצלעות המתאימות הן: $AO \leftrightarrow BE,\ OB \leftrightarrow EC,\ AB \leftrightarrow BC$.

$AO = 12$ ו־$OB = 9$. יחס הדמיון הוא 3, ולכן:

$$BE = 3 \cdot AO = 3 \cdot 12 = 36$$

תשובה: $BE = 36$

סעיף ב (2)

$$EC = 3 \cdot OB = 3 \cdot 9 = 27$$

$x_C = x_B + BE = 9 + 36 = 45$ ו־$y_C = EC = 27$.

תשובה: $C(45, 27)$

סעיף ג

המשיק בנקודה C מאונך לקוטר AC:

$$m_{AC} = \frac{27 - 12}{45 - 0} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

ולכן שיפוע המשיק הוא -3 (מכפלת שיפועים של ישרים מאונכים היא -1):

$$y - 27 = -3(x - 45) \;\Rightarrow\; y = -3x + 162$$

תשובה: $y = -3x + 162$

סעיף ד

K – חיתוך המשיק עם ציר ה־x: $0 = -3x + 162 \Rightarrow x = 54$, כלומר $K(54, 0)$ ו־$EK = 54 - 9 = 45$.

OA מונח על ציר ה־y ו־EC מאונך לציר ה־x, ולכן $OA \parallel EC$ (שני ישרים המאונכים לאותו ישר מקבילים זה לזה) והמרובע $OACE$ הוא טרפז (ישר־זווית, כי OE על ציר ה־x).

נחשב את שטח המרובע כטרפז $OACE$, פחות המשולש AOB, ועוד המשולש CEK:

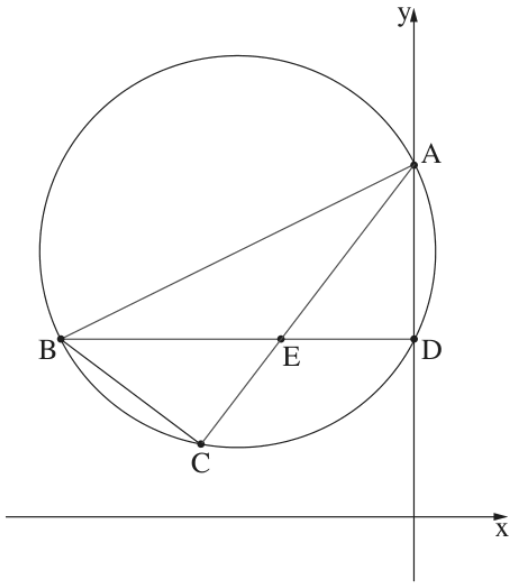
$$S_{OACE} = \frac{(OA + EC) \cdot OE}{2} = \frac{(12 + 27) \cdot 45}{2} = 877.5$$

$$S_{AOB} = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54 \qquad S_{CEK} = \frac{27 \cdot 9}{2} = 121.5$$

$$S_{ABKC} = 877.5 - 54 + 121.5 = 945$$

תשובה: $S_{ABKC} = 945$ **יח"ר**

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 5



5. נתון מעגל החותך את החלק החיובי של ציר ה־ y בנקודות A ו־ D, כמתואר בסרטוט.

BD ו־ AC הם מיתרים במעגל הנחתכים בנקודה E.

נתון כי המיתר BD מקביל לציר ה־ x.

א. **(1)** הסבירו מדוע AB הוא קוטר במעגל.

(2) הוכיחו כי $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DAC$.

נתון: $BE = AE$.

ב. הוכיחו כי $\triangle CBE \cong \triangle DAE$.

נתון: $E(-4.5\,,6)$, $AE = 7.5$.

ג. מצאו את שיעורי הנקודות B ו־ A.

הנקודה M היא מרכז המעגל.

ד. מצאו את משוואת המעגל.

ה. **(1)** מהו אורך הצלע BC? נמקו את תשובתכם.

(2) חשבו את היקף המרובע $BCEM$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

BD מקביל לציר ה־x, ו־AD מונח על ציר ה־y, ולכן $BD \perp AD$, כלומר $\angle ADB = 90^\circ$.

זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר, ולכן AB הוא קוטר במעגל.

תשובה: $\angle ADB = 90^\circ$ – זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר.

סעיף א (2)

$\angle CBD$ ו־$\angle DAC$ הן זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת CD, ולכן הן שוות.

תשובה: זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת.

סעיף ב

במשולשים CBE ו־DAE:

1. $BE = AE$ (נתון).
2. $\angle CBE = \angle DAE$ (סעיף א (2)).
3. $\angle BEC = \angle AED$ (זוויות קודקודיות).

לכן $\triangle CBE \cong \triangle DAE$ (ז.צ.ז).

תשובה: הוכחה לפי ז.צ.ז.

סעיף ג

BD מקביל לציר ה־x ו־D על ציר ה־y, ולכן $D(0,6)$ ו־$ED = 4.5$.

במשולש ישר הזווית ADE:

$$AD = \sqrt{AE^2 - ED^2} = \sqrt{7.5^2 - 4.5^2} = \sqrt{36} = 6 \;\Rightarrow\; A(0,\, 6+6) = A(0,12)$$

$BE = AE = 7.5$, ו־B על הישר $y = 6$ משמאל ל־E:

$$x_B = -4.5 - 7.5 = -12 \;\Rightarrow\; B(-12, 6)$$

תשובה: $A(0, 12)$, $B(-12, 6)$

סעיף ד

AB קוטר, ולכן המרכז M הוא אמצע AB:

$$M\left(\frac{0 - 12}{2}, \frac{12 + 6}{2}\right) = M(-6, 9)$$

$$R^2 = MA^2 = (0 + 6)^2 + (12 - 9)^2 = 36 + 9 = 45$$

תשובה: $(x + 6)^2 + (y - 9)^2 = 45$

סעיף ה (1)

מהחפיפה $\triangle CBE \cong \triangle DAE$ (סעיף ב): $BC = AD = 6$ (צלעות מתאימות מול זוויות שוות).

תשובה: $BC = 6$

סעיף ה (2)

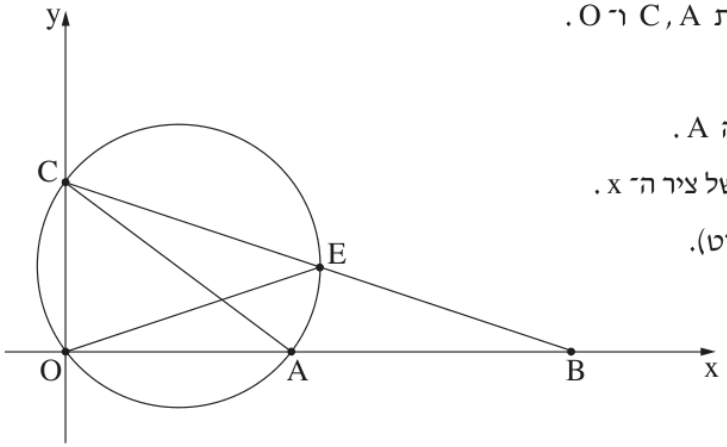
מהחפיפה גם $CE = DE = 4.5$. MB הוא רדיוס: $MB = \sqrt{45}$.

$$EM = \sqrt{(-4.5 + 6)^2 + (6 - 9)^2} = \sqrt{2.25 + 9} = \sqrt{11.25}$$

$$P_{BCEM} = BC + CE + EM + MB = 6 + 4.5 + \sqrt{11.25} + \sqrt{45} \approx 20.562$$

תשובה: $P \approx 20.562$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 4



4. בסרטוט שלפניכם מתואר מעגל, העובר דרך הנקודות C , A ו־ O .

O היא ראשית הצירים.

המעגל חותך את החלק החיובי של ציר ה־ x בנקודה A .

הנקודה B נמצאת מחוץ למעגל, על החלק החיובי של ציר ה־ x .

הקטע CB חותך את המעגל בנקודה E (ראו סרטוט).

נתון: $\sphericalangle EOB = \sphericalangle EBO$.

א. הוכיחו: $AC = AB$.

נתון: $A(4\ ,0)$, $C(0\ ,3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה B .

ג. **(1)** הוכיחו כי AC הוא קוטר במעגל.

(2) מצאו את משוואת המעגל.

נתון כי שיעור ה־ x של הנקודה E הוא 4.5 .

ד. פי כמה גדול שטח המשולש COB משטח המשולש EOB ?

ה. חשבו את גודל הזווית EOB .

פתרון מלא

סעיף א

נסמן $\angle EOB = \angle EBO = \beta$.

$\angle EOA$ ו־$\angle ECA$ הן זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת EA, ולכן $\angle ECA = \angle EOA = \beta$ (הזווית $\angle EOA$ היא הזווית $\angle EOB$, כי A על הקטע OB).

במשולש ACB: $\angle ACB = \angle ECA = \beta$ ו־$\angle ABC = \angle EBO = \beta$.

במשולש מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות, ולכן $AC = AB$.

תשובה: הוכחה: $\angle ACB = \angle ABC$ (זוויות היקפיות על הקשת EA).

סעיף ב

$$AC = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = 5 \ \Rightarrow \ AB = AC = 5$$

B על החלק החיובי של ציר ה־x, מימין ל־A: $x_B = 4 + 5 = 9$.

תשובה: $B(9,0)$

סעיף ג (1)

$\angle COA = 90^\circ$ (הזווית בין הצירים), והיא זווית היקפית במעגל. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר, ולכן AC קוטר.

תשובה: הוכחה: זווית היקפית ישרה $\angle COA$.

סעיף ג (2)

מרכז המעגל הוא אמצע הקוטר AC, והרדיוס הוא חצי מהקוטר:

$$M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = M(2,\ 1.5) \qquad R = \frac{AC}{2} = 2.5$$

תשובה: $(x-2)^2+(y-1.5)^2=6.25$

סעיף ד

משוואת CB (דרך $C(0,3)$ ו־$B(9,0)$): $m=\frac{0-3}{9-0}=-\frac{1}{3}$, ולכן $y=-\frac{1}{3}x+3$.

$x_E=4.5 \Rightarrow y_E=-1.5+3=1.5$, כלומר $E(4.5,\ 1.5)$.

לשני המשולשים אותו בסיס $OB=9$, והגבהים הם $y_C=3$ ו־$y_E=1.5$:

$$S_{COB}=\frac{9\cdot 3}{2}=13.5 \qquad S_{EOB}=\frac{9\cdot 1.5}{2}=6.75 \qquad \frac{13.5}{6.75}=2$$

תשובה: פי 2.

סעיף ה

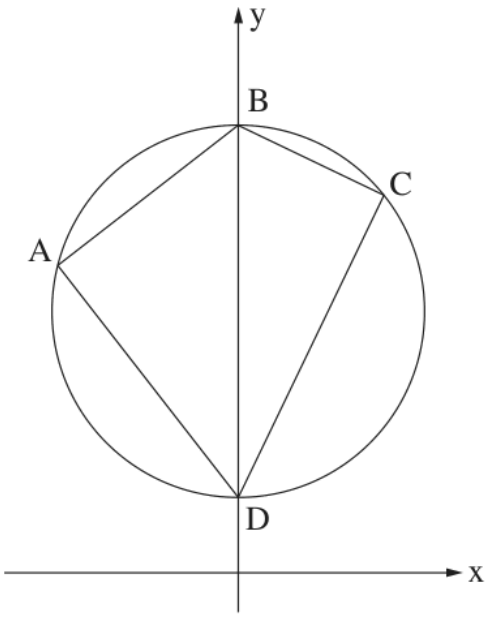
הישר OE עובר דרך $O(0,0)$ ו־$E(4.5,\ 1.5)$:

$$\tan\angle EOB=m_{OE}=\frac{1.5}{4.5}=\frac{1}{3} \ \Rightarrow\ \angle EOB\approx 18.43^\circ$$

תשובה: $\angle EOB\approx 18.43^\circ$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 4

4. המרובע ABCD שלפניכם חסום במעגל (ראו סרטוט).



נתון: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.

א. הוכיחו כי BD הוא קוטר במעגל.

נתון: $B(0,12)$, $D(0,2)$.

ב. מצאו את משוואת המעגל.

נתון כי שיפוע הצלע BC הוא $-\frac{1}{2}$.

ג. **(1)** מצאו את משוואת הצלע DC.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה C.

נתון כי הנקודה E היא אמצע הצלע DC.

ד. חשבו את שטח המשולש BCE.

ה. **(1)** חשבו את גודל הזווית BEC.

(2) חשבו את גודל הזווית DBE.

פתרון מלא

סעיף א

במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות הוא $180°$: $\angle A + \angle C = 180°$. נתון $\angle A = \angle C$, ולכן $\angle A = \angle C = 90°$.

$\angle BAD = 90°$ היא זווית היקפית הנשענת על המיתר BD. זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר, ולכן BD קוטר.

תשובה: הוכחה: $\angle A = \angle C = 90°$, זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר.

סעיף ב

המרכז הוא אמצע הקוטר BD, והרדיוס חצי ממנו:

$$M\left(0, \frac{12+2}{2}\right) = M(0,7) \qquad R = \frac{12-2}{2} = 5$$

תשובה: $x^2 + (y-7)^2 = 25$

סעיף ג (1)

$\angle BCD = 90°$ (סעיף א), כלומר $DC \perp BC$. $m_{BC} = -\frac{1}{2}$, ולכן $m_{DC} = 2$. הישר עובר דרך $D(0,2)$:

$$y = 2x + 2$$

תשובה: $y = 2x + 2$

סעיף ג (2)

משוואת BC (דרך $B(0,12)$): $y = -\frac{1}{2}x + 12$. נקודת החיתוך עם DC:

$$2x + 2 = -\frac{1}{2}x + 12 \;\Rightarrow\; 2.5x = 10 \;\Rightarrow\; x = 4, \quad y = 2 \cdot 4 + 2 = 10$$

תשובה: $C(4,10)$

סעיף ד

E אמצע DC: $E\left(\frac{0+4}{2},\frac{2+10}{2}\right)=E(2,6)$.

המשולש BCE ישר זווית ב־C ($\angle BCD=90^\circ$):

$$BC=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}\qquad CE=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$$

$$S_{BCE}=\frac{BC\cdot CE}{2}=\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}}{2}=10$$

תשובה: $S_{BCE}=10$ **יח"ר**

סעיף ה (1)

במשולש ישר הזווית BCE הניצבים שווים ($BC=CE=\sqrt{20}$), ולכן הוא שווה שוקיים וזוויות הבסיס שוות:

$$\angle BEC=\frac{180^\circ-90^\circ}{2}=45^\circ$$

תשובה: $\angle BEC=45^\circ$

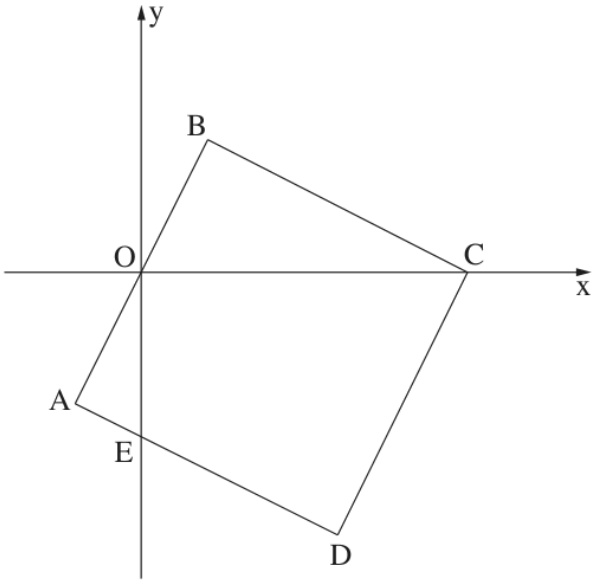
סעיף ה (2)

BD מונח על ציר ה־y. נוריד מ־$E(2,6)$ אנך לציר ה־y, לנקודה $(0,6)$. במשולש ישר הזווית שנוצר, הניצב שמול הזווית הוא 2 (המרחק של E מציר ה־y) והניצב שליד הזווית הוא $12-6=6$:

$$\tan\angle DBE=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \angle DBE\approx 18.43^\circ$$

תשובה: $\angle DBE\approx 18.43^\circ$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 5



5. נתון ריבוע $ABCD$.

הצלע AB עוברת דרך ראשית הצירים, O.

הצלע AD חותכת את ציר ה־y בנקודה E.

הקודקוד C מונח על ציר ה־x (ראו סרטוט).

א. **(1)** הוכיחו: $\sphericalangle AEO = \sphericalangle BOC$.

(2) הוכיחו: $\Delta OAE \sim \Delta CBO$.

נתון: הנקודה O היא אמצע הצלע AB.

ב. מצאו את היחס $\frac{BO}{AE}$.

נתון: $E(0,-5)$.

ג. מצאו את אורך הקטע OC ואת שיעורי הנקודה C.

נתון: שיפוע הצלע BC הוא $-\frac{1}{2}$.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ה. מצאו את שטח הריבוע $ABCD$.

ו. האם מתקיים: $\sphericalangle BCO = \sphericalangle OCE$? נמקו.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הנקודות A, O, B על ישר אחד, ולכן הזוויות $\angle AOE,\ \angle EOC,\ \angle COB$ יוצרות יחד זווית שטוחה.
$\angle EOC = 90^\circ$ (בין הצירים), ולכן:

$$\angle AOE + \angle BOC = 90^\circ$$

במשולש OAE: $\angle OAE = 90^\circ$ (זווית בריבוע), ולכן $\angle AEO + \angle AOE = 90^\circ$.
מכאן $\angle AEO = \angle BOC$ (שתיהן משלימות את $\angle AOE$ ל־90°).

תשובה: הוכחה.

סעיף א (2)

במשולשים OAE ו־CBO:

1. $\angle OAE = \angle CBO = 90^\circ$ (זוויות הריבוע).
2. $\angle AEO = \angle BOC$ (סעיף א (1)).

לכן $\triangle OAE \sim \triangle CBO$ (ז.ז).

תשובה: הוכחה לפי ז.ז.

סעיף ב

מהדמיון: $\frac{OA}{CB} = \frac{AE}{BO} = \frac{OE}{CO}$.
O אמצע AB, ולכן $OA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CB$ (צלעות הריבוע שוות). כלומר יחס הדמיון הוא $\frac{1}{2}$:

$$\frac{AE}{BO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BO}{AE} = 2$$

תשובה: $\frac{BO}{AE}=2$

סעיף ג

מאותו יחס דמיון: $\frac{OE}{OC}=\frac{1}{2}$. $OE=5$, ולכן:

$$OC=2\cdot 5=10$$

תשובה: $OC=10$, $C(10,0)$

סעיף ד

BC: שיפוע $-\frac{1}{2}$ דרך $C(10,0)$: $y=-\frac{1}{2}x+5$.

$AB\perp BC$ ועובר דרך $O(0,0)$, ולכן AB: $y=2x$. נקודת החיתוך:

$$2x=-\frac{1}{2}x+5\ \Rightarrow\ 2.5x=5\ \Rightarrow\ x=2,\quad y=4$$

תשובה: $B(2,4)$

סעיף ה

$$BC^2=(10-2)^2+(0-4)^2=64+16=80\ \Rightarrow\ S_{ABCD}=BC^2=80$$

תשובה: $S=80$ **יח"ר**

סעיף ו

$\angle BCO$ היא הזווית בין CB לציר ה־x. השיפוע של BC הוא $-\frac{1}{2}$, ולכן $\tan\angle BCO=\frac{1}{2}$.

במשולש ישר הזווית OCE (הזווית הישרה ב־O): $\tan\angle OCE=\frac{OE}{OC}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

לשתי הזוויות (החדות) אותו טנגנס, ולכן הן שוות: $\angle BCO=\angle OCE\approx 26.57^\circ$.

תשובה: כן – לשתיהן $\tan=\frac{1}{2}$.

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.