בעיות קיצון – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 4 יחידות, כיתה י״א (שאלון 471) • 12 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 8

8. אדריכלית נוף תכננה מתחם ציבורי.

המתחם מורכב משלושה חלקים המחוברים זה לזה:

מבואה – המלבן $ABCD$

שביל גישה – המלבן $BEFC$

גן פסלים – הריבוע $EGHK$

הנקודות A, B, E, G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.



אורך הקטע AG הוא 8 מטרים.

אורך הצלע EG גדול פי 2 מאורך הצלע AB.

נסמן ב־ x את אורך הצלע AB.

א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע BE.

נתון כי שטח המבואה הוא 1 מ״ר.

ב. **(1)** הביעו באמצעות x את אורך הצלע AD.

(2) הביעו באמצעות x את השטח הכולל של המתחם.

ג. מצאו את הערך של x שבעבורו השטח הכולל של המתחם הוא מינימלי.

ד. האם ייתכן שהשטח הכולל של המתחם הוא 9 מ״ר? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

$AB = x$ ו־$EG = 2x$. כל הקטעים על הישר AG שאורכו 8 מטרים:

$$AB + BE + EG = 8 \;\Rightarrow\; x + BE + 2x = 8 \;\Rightarrow\; BE = 8 - 3x$$

(כדי שהאורך יהיה חיובי: $0 < x < \frac{8}{3}$.)

תשובה: $BE = 8 - 3x$

סעיף ב (1)

שטח המלבן $ABCD$ הוא $AB \cdot AD = 1$:

$$x \cdot AD = 1 \;\Rightarrow\; AD = \frac{1}{x}$$

תשובה: $AD = \frac{1}{x}$

סעיף ב (2)

במלבן $BEFC$ הרוחב הוא $BC = AD = \frac{1}{x}$. נחבר את שטחי שלושת החלקים:

$$S_{ABCD} = 1$$

$$S_{BEFC} = BE \cdot BC = (8 - 3x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{8}{x} - 3$$

$$S_{EGHK} = EG^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

$$S(x) = 1 + \frac{8}{x} - 3 + 4x^2 = 4x^2 + \frac{8}{x} - 2$$

תשובה: $S(x) = 4x^2 + \frac{8}{x} - 2$

סעיף ג

נגזור ונשווה לאפס:

$$S'(x) = 8x - \frac{8}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; 8x^3 = 8 \;\Rightarrow\; x = 1$$

x	$0 < x < 1$	1	$1 < x < \frac{8}{3}$
$S'(x)$	$-$	0	$+$
$S(x)$	↘	min	↗

(למשל $S'(0.5) = 4 - 32 < 0$, $S'(2) = 16 - 2 > 0$.) לכן השטח מינימלי בעבור $x = 1$.

תשובה: $x = 1$ **מטר.**

סעיף ד

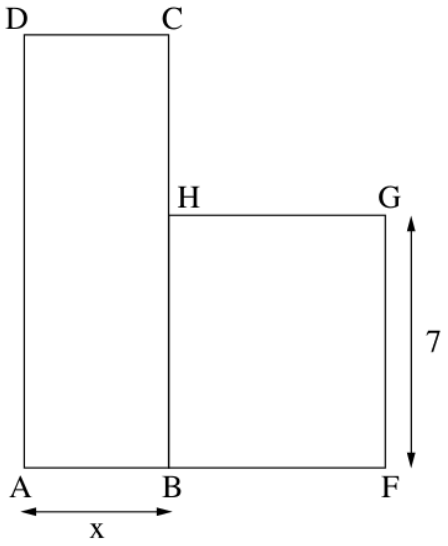
השטח המינימלי (בעבור $x = 1$) הוא:

$$S(1) = 4 \cdot 1^2 + \frac{8}{1} - 2 = 10$$

זה הערך הקטן ביותר האפשרי של השטח הכולל, ו־$10 > 9$. לכן השטח הכולל לא יכול להיות 9 מ״ר.

תשובה: לא – השטח המינימלי הוא 10 מ״ר.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתוארת גינה ציבורית המחולקת לשני מתחמים.
מתחם ABCD ובו דשא, ומתחם BFGH ובו מתקנים לילדים.
כל אחד מן המתחמים הוא בצורת מלבן.
נסמן ב־ x את אורך הצלע AB.
נתון כי אורך הצלע GF הוא 7 מטרים,
וכי אורך הצלע BF גדול ב־ 2 מטרים מאורך הצלע AB.
את המתחם ABCD הקיפו בגדר שאורכה 32 מטרים.

א. **(1)** הביעו באמצעות x את אורך הצלע AD.

(2) הביעו באמצעות x את שטח המתחם $ABCD$.

ב. הביעו באמצעות x את היחס בין שטח המתחם ABCD
ובין שטח המתחם $BFGH$.

ג. מצאו את הערך של x שבעבורו היחס בין שטח המתחם ABCD ובין שטח המתחם BFGH הוא מקסימלי.

פתרון מלא

סעיף א (1)

היקף המלבן $ABCD$ הוא 32 מטרים:

$$2(AB+AD)=32 \;\Rightarrow\; x+AD=16 \;\Rightarrow\; AD=16-x$$

תשובה: $AD=16-x$

סעיף א (2)

$$S_{ABCD}=AB\cdot AD=x(16-x)=16x-x^2$$

תשובה: $S_{ABCD}=16x-x^2$

סעיף ב

$BF=x+2$ ו־$GF=7$, ולכן $S_{BFGH}=7(x+2)=7x+14$. היחס:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BFGH}}=\frac{16x-x^2}{7x+14}$$

תשובה: $\frac{16x-x^2}{7x+14}$

סעיף ג

נסמן $f(x)=\frac{16x-x^2}{7x+14}$, בתחום $0<x<16$. נגזור (נגזרת של מנה):

$$f'(x)=\frac{(16-2x)(7x+14)-7(16x-x^2)}{(7x+14)^2}=\frac{-7x^2-28x+224}{(7x+14)^2}=$$
$$\frac{-7(x^2+4x-32)}{(7x+14)^2}$$

$$x^2+4x-32=0 \;\Rightarrow\; (x+8)(x-4)=0 \;\Rightarrow\; x=4$$

($x=-8$ נפסל כי $x>0$.)

x	$0<x<4$	4	$4<x<16$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	max	↘

היחס מקסימלי בעבור $x=4$ (ואז היחס הוא $\frac{8}{7}=\frac{48}{42}$).

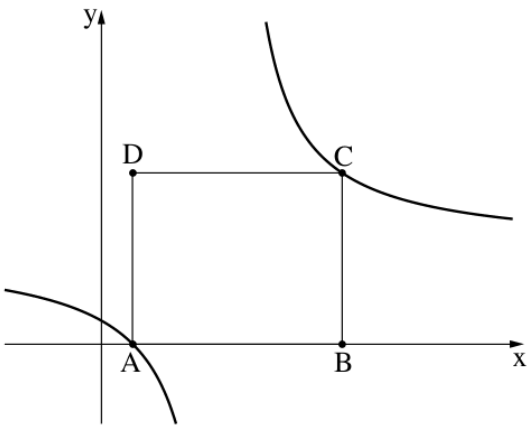
תשובה: $x=4$ **מטרים.**

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 8

8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=\frac{6x-12}{x-8}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.



הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום $x>8$.

מן הנקודה C העבירו אנך לציר ה־ x החותך אותו בנקודה B.

הנקודה D נמצאת ברביע הראשון כך ש־ $ABCD$ הוא מלבן.

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה C.

ג. הביעו באמצעות t את היקף המלבן $ABCD$.

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו

היקף המלבן $ABCD$ הוא מינימלי.

ה. האם ייתכן שהיקף המלבן $ABCD$ הוא 50 ? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

$$x-8\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 8$$

תשובה: $x\neq 8$

סעיף א (2)

אנכית: $x=8$ (המכנה מתאפס, והמונה $6\cdot 8-12=36\neq 0$).

אופקית: המונה והמכנה מאותה מעלה, ולכן $y=\frac{6}{1}=6$.

תשובה: $x=8$, $y=6$

סעיף ב

$$\frac{6x-12}{x-8}=0 \;\Rightarrow\; 6x-12=0 \;\Rightarrow\; x=2$$

תשובה: $A(2,0)$

סעיף ג

$C\left(t,\ \frac{6t-12}{t-8}\right)$ עם $t>8$, ו־$B(t,0)$. צלעות המלבן:

$$AB=t-2 \qquad BC=\frac{6t-12}{t-8}$$

$$P=2(t-2)+\frac{2(6t-12)}{t-8}=\frac{(2t-4)(t-8)+12t-24}{t-8}=\frac{2t^2-8t+8}{t-8}$$

תשובה: $P(t)=\frac{2t^2-8t+8}{t-8}$

סעיף ד

נגזור $P(t)=2t-4+\frac{12t-24}{t-8}$:

$$P'(t) = 2 + \frac{12(t-8) - (12t-24)}{(t-8)^2} = 2 - \frac{72}{(t-8)^2}$$

$$P'(t) = 0 \;\Rightarrow\; (t-8)^2 = 36 \;\Rightarrow\; t - 8 = 6 \;\; (t > 8) \;\Rightarrow\; t = 14$$

t	$8 < t < 14$	14	$t > 14$
$P'(t)$	$-$	0	$+$
$P(t)$	↘	min	↗

תשובה: $t = 14$

סעיף ה

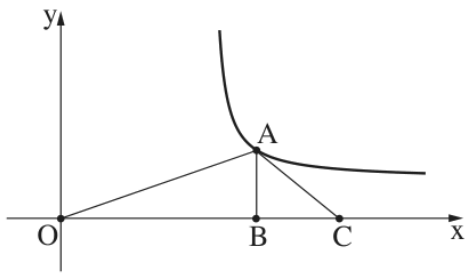
ההיקף המינימלי:

$$P(14) = \frac{2 \cdot 196 - 8 \cdot 14 + 8}{14 - 8} = \frac{288}{6} = 48$$

כאשר t מתקרב ל־8 מימין או גדל מאוד, ההיקף גדל ללא גבול. לכן ההיקף מקבל כל ערך שגדול מ־48 (או שווה לו), ובפרט גם את הערך 50.

תשובה: כן – ההיקף המינימלי הוא 48, ו־$50 > 48$.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=\frac{x-3}{x-4}$ בתחום $x>4$.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום $x>4$.

מן הנקודה A העבירו אנך לציר ה־x, החותך אותו בנקודה B.

הנקודה C נמצאת על ציר ה־x מימין לנקודה B.

נתון: $OB=2\cdot BC$.

נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה A.

א. **(1)** הביעו באמצעות t את אורך הקטע OC.

(2) הביעו באמצעות t את שטח המשולש AOC.

ב. מצאו את הערך של t שבעבורו שטח המשולש AOC הוא מינימלי.

פתרון מלא

סעיף א (1)

A על הגרף ושיעור ה־x שלה הוא t, ולכן $B(t,0)$ ו־$OB=t$. נתון $OB=2\cdot BC$, ולכן $BC=\frac{t}{2}$:

$$OC=OB+BC=t+\frac{t}{2}=1.5t$$

תשובה: $OC=1.5t$

סעיף א (2)

AB הוא הגובה לצלע OC במשולש AOC, ואורכו שיעור ה־y של A: $AB=\frac{t-3}{t-4}$ (חיובי בתחום $t>4$).

$$S_{AOC}=\frac{OC\cdot AB}{2}=\frac{1.5t\cdot\frac{t-3}{t-4}}{2}=\frac{3t(t-3)}{4(t-4)}=\frac{3t^2-9t}{4t-16}$$

תשובה: $S(t)=\frac{3t^2-9t}{4t-16}$

סעיף ב

נגזור לפי נגזרת של מנה:

$$S'(t)=\frac{(6t-9)(4t-16)-4(3t^2-9t)}{(4t-16)^2}=\frac{12t^2-96t+144}{(4t-16)^2}=\frac{12(t-2)(t-6)}{(4t-16)^2}$$

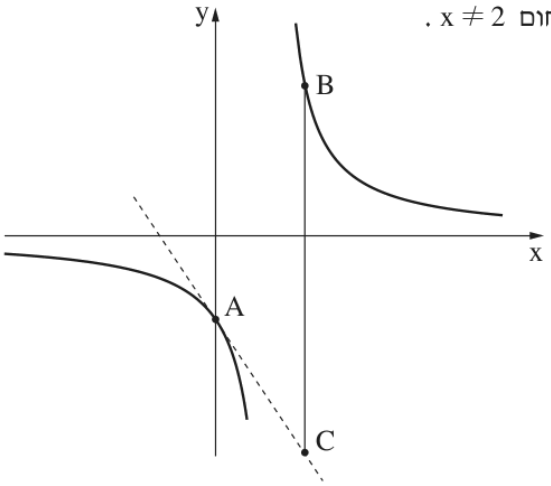
$S'(t)=0\Rightarrow t=2$ או $t=6$. בתחום $t>4$ רק $t=6$.

t	$4<t<6$	6	$t>6$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	↘	min	↗

(השטח המינימלי: $S(6)=\frac{3\cdot36-54}{8}=6.75$.)

תשובה: $t=6$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=\frac{a}{x-2}$, המוגדרת בתחום $x\neq 2$.

a הוא פרמטר שונה מ־ 0.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ y.

דרך הנקודה A העבירו משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי שיפוע המשיק הוא -1.5.

א. מצאו את הערך של a.

הציבו $a=6$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ב–ג.

ב. מצאו את משוואת המשיק.

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, בתחום $x>2$.

הנקודה C נמצאת על המשיק כך שהקטע BC מקביל לציר ה־ y.

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה B.

ג. **(1)** הביעו באמצעות t את אורך הקטע BC.

(2) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע BC הוא מינימלי.

פתרון מלא

סעיף א

נגזור את $f(x)=\frac{a}{x-2}$ (a קבוע):

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x-2)-a\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{-a}{(x-2)^2}$$

הנקודה A נמצאת על ציר ה־y, ולכן $x_A=0$. שיפוע המשיק בנקודה A הוא $f'(0)$, ונתון שהוא -1.5:

$$f'(0)=\frac{-a}{(0-2)^2}=-\frac{a}{4}=-1.5\ \Rightarrow\ a=6$$

תשובה: $a=6$

סעיף ב

כעת $f(x)=\frac{6}{x-2}$. שיעורי הנקודה A:

$$f(0)=\frac{6}{0-2}=-3\ \Rightarrow\ A(0,-3)$$

המשיק עובר דרך $A(0,-3)$ ושיפועו -1.5:

$$y-(-3)=-1.5(x-0)$$
$$y=-1.5x-3$$

תשובה: $y=-1.5x-3$

סעיף ג (1)

B על גרף הפונקצייה ו־$x_B=t$ (כאשר $t>2$), לכן $B\left(t,\ \frac{6}{t-2}\right)$.

BC מקביל לציר ה־y, ולכן גם $x_C=t$. C על המשיק, לכן $C(t,\ -1.5t-3)$.

B נמצאת מעל C (לפי הסרטוט), ולכן אורך הקטע הוא ההפרש בין שיעורי ה־y:

$$BC = y_B - y_C = \frac{6}{t-2} - (-1.5t - 3) = \frac{6}{t-2} + 1.5t + 3$$

תשובה: $BC = \frac{6}{t-2} + 1.5t + 3$

סעיף ג (2)

נסמן $g(t) = \frac{6}{t-2} + 1.5t + 3$ בתחום $t > 2$, ונגזור:

$$g'(t) = \frac{-6}{(t-2)^2} + 1.5$$

נשווה לאפס:

$$\frac{6}{(t-2)^2} = 1.5 \;\Rightarrow\; (t-2)^2 = 4$$

לכן $t - 2 = 2$ או $t - 2 = -2$, כלומר $t = 4$ או $t = 0$. בתחום $t > 2$ רק $t = 4$ מתאים.

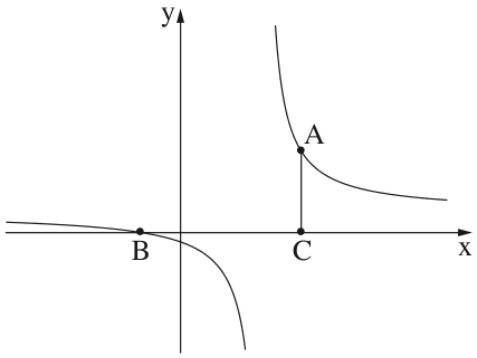
נבדוק את סוג הקיצון בטבלה (למשל $g'(3) = -6 + 1.5 < 0$, $g'(6) = -\frac{6}{16} + 1.5 > 0$):

t	$2 < t < 4$	4	$t > 4$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	min	↗

לכן בעבור $t = 4$ אורך הקטע BC מינימלי (ואז $BC = \frac{6}{2} + 6 + 3 = 12$).

תשובה: $t = 4$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=\frac{x+2}{x-4}$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע הראשון.

הנקודה C נמצאת על ציר ה־x כך שהקטע AC מקביל לציר ה־y.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־x.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה שטח המשולש ABC הוא מינימלי.

(2) מצאו את השטח המינימלי של המשולש ABC.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה אינו יכול להיות אפס: $x-4\neq 0$.

תשובה: $x\neq 4$

סעיף א (2)

אסימפטוטה אנכית: המכנה מתאפס ב־$x=4$, והמונה שם שווה ל־$6\neq 0$, ולכן $x=4$.

אסימפטוטה אופקית: החזקות הגבוהות במונה ובמכנה שוות (x), והיחס בין המקדמים שלהן הוא $\frac{1}{1}=1$, ולכן $y=1$.

תשובה: $x=4$, $y=1$

סעיף ב

נציב $f(x)=0$: שבר שווה לאפס כאשר המונה שווה לאפס (והמכנה לא):

$$x+2=0 \;\Rightarrow\; x=-2$$

תשובה: $B(-2,\ 0)$

סעיף ג (1)

נסמן את שיעור ה־x של A ב־t. A ברביע הראשון על הענף הימני של הגרף, ולכן $t>4$, ו־$A\left(t,\ \frac{t+2}{t-4}\right)$, $C(t,\ 0)$.

המשולש ABC ישר זווית ב־C (AC מקביל לציר ה־y ו־BC על ציר ה־x):

$$BC=t-(-2)=t+2 \qquad AC=\frac{t+2}{t-4}$$

$$S(t)=\frac{BC\cdot AC}{2}=\frac{(t+2)^2}{2(t-4)}$$

נגזור לפי כלל הנגזרת של מנה:

$$S'(t)=\frac{2(t+2)\cdot 2(t-4)-(t+2)^2\cdot 2}{4(t-4)^2}=\frac{2(t+2)\big(2(t-4)-(t+2)\big)}{4(t-4)^2}=\frac{(t+2)(t-10)}{2(t-4)^2}$$

נשווה לאפס: $t=10$ או $t=-2$ (נפסל, כי $t>4$).

t	$4<t<10$	10	$t>10$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	↘	min	↗

$$y_A=\frac{10+2}{10-4}=2$$

תשובה: $A(10,\ 2)$

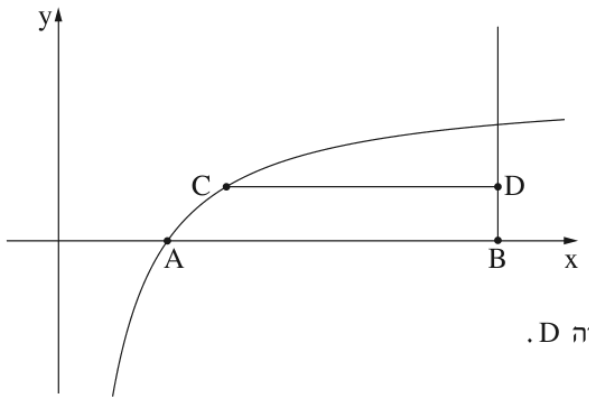
סעיף ג (2)

$$S(10)=\frac{(10+2)^2}{2(10-4)}=\frac{144}{12}=12$$

(בדיקה: $BC=12$, $AC=2$, $\frac{12\cdot 2}{2}=12$.)

תשובה: השטח המינימלי הוא 12.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 8



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=3-\frac{6}{x}$,
בתחום $x>0$.
גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה A.
מן הנקודה $B(8,0)$ העבירו אנך לציר ה־ x.
C היא נקודה כלשהי על גרף הפונקצייה $f(x)$.
נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה C, $2<t<8$.
מן הנקודה C העבירו ישר המקביל לציר ה־ x וחותך את האנך בנקודה D.

א. מצאו את שיעורי הנקודות A, C ו־ D.
הביעו את תשובותיכם באמצעות t, אם יש צורך.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה C שבעבורה שטח המשולש ACD הוא מקסימלי.

ג. קבעו אם ייתכן ששטח המשולש ACD שווה ל־ 1. נמקו את קביעתכם.

פתרון מלא

סעיף א

A: נציב $f(x)=0$:

$$3-\frac{6}{x}=0 \;\Rightarrow\; \frac{6}{x}=3 \;\Rightarrow\; x=2 \;\Rightarrow\; A(2,0)$$

C: C על גרף הפונקציה ו־$x_C=t$, לכן $C\left(t,\ 3-\frac{6}{t}\right)$.

D: D על האנך לציר ה־x דרך $B(8,0)$, כלומר $x_D=8$, ו־CD מקביל לציר ה־x, כלומר $y_D=y_C$:

$$D\left(8,\ 3-\frac{6}{t}\right)$$

תשובה: $A(2,0)$, $C\left(t,\ 3-\frac{6}{t}\right)$, $D\left(8,\ 3-\frac{6}{t}\right)$

סעיף ב

במשולש ACD נבחר את CD כבסיס (מקביל לציר ה־x). הגובה מ־A (שעל ציר ה־x) לבסיס הוא שיעור ה־y של C:

$$CD=8-t \qquad h=3-\frac{6}{t}$$

$$S(t)=\frac{(8-t)\left(3-\frac{6}{t}\right)}{2}=\frac{24-\frac{48}{t}-3t+6}{2}=15-1.5t-\frac{24}{t}$$

נגזור ונשווה לאפס:

$$S'(t)=-1.5+\frac{24}{t^2}=0 \;\Rightarrow\; t^2=16 \;\Rightarrow\; t=4$$

($t=-4$ נפסל, כי $2<t<8$.)

t	$2<t<4$	4	$4<t<8$
$S'(t)$	$+$	0	$-$
$S(t)$	↗	max	↘

$$y_C = 3 - \frac{6}{4} = 1.5$$

(השטח המקסימלי: $S(4) = 15 - 6 - 6 = 3$.)

תשובה: $C(4,\ 1.5)$

סעיף ג

לפי סעיף ב, השטח המקסימלי הוא $S(4) = 3$. כאשר t מתקרב ל־2 (הגובה שואף ל־0) או ל־8 (הבסיס שואף ל־0), השטח מתקרב ל־0. הפונקציה $S(t)$ רציפה, ולכן היא מקבלת כל ערך בין 0 ל־3 – גם את הערך 1.

בדיקה:

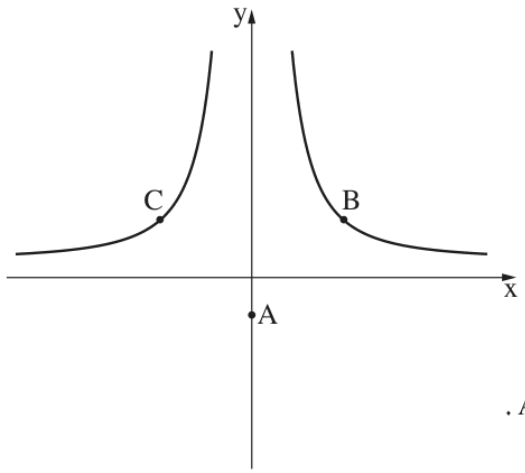
$$15 - 1.5t - \frac{24}{t} = 1 \ \Rightarrow\ 1.5t^2 - 14t + 24 = 0 \ \Rightarrow\ 3t^2 - 28t + 48 = 0$$

$$t = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 576}}{6} = \frac{28 \pm \sqrt{208}}{6}$$

$t \approx 2.26$ או $t \approx 7.07$ – שני הערכים בתחום $2 < t < 8$.

תשובה: כן (למשל בעבור $t \approx 2.26$ או $t \approx 7.07$).

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 8



8. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{48}{x^2}+1$.

נתונה הנקודה A, ששיעוריה הם $(0,-2)$.

הנקודות B ו־C נמצאות על גרף הפונקצייה $f(x)$, כמתואר בסרטוט.

הישר BC מקביל לציר ה־x.

נסמן את שיעור ה־x של הנקודה B ב־t, $t>0$.

א. הביעו באמצעות t את שיעורי הנקודות B ו־C.

ב. מצאו את ערכו של t שבעבורו שטח המשולש ABC הוא מינימלי.

ג. בעבור הערך של t שמצאתם בסעיף ב, מצאו את היקף המשולש ABC.

פתרון מלא

סעיף א

B על גרף הפונקציה ו־$x_B=t$:

$$B\left(t,\ \frac{48}{t^2}+1\right)$$

BC מקביל לציר ה־x, ולכן ל־C אותו שיעור y. הפונקציה זוגית ($f(-x)=f(x)$, כי $(-x)^2=x^2$), ולפי הסרטוט C על הענף השמאלי, ולכן $x_C=-t$:

$$C\left(-t,\ \frac{48}{t^2}+1\right)$$

תשובה: $B\left(t,\ \frac{48}{t^2}+1\right)$, $C\left(-t,\ \frac{48}{t^2}+1\right)$

סעיף ב

בסיס המשולש: $BC=t-(-t)=2t$. הגובה מ־$A(0,-2)$ לבסיס BC (ישר אופקי) הוא ההפרש בשיעורי ה־y:

$$h=\frac{48}{t^2}+1-(-2)=\frac{48}{t^2}+3$$

$$S(t)=\frac{2t\cdot\left(\frac{48}{t^2}+3\right)}{2}=\frac{48}{t}+3t\qquad(t>0)$$

נגזור ונשווה לאפס:

$$S'(t)=-\frac{48}{t^2}+3=0\ \Rightarrow\ t^2=16\ \Rightarrow\ t=4$$

($t=-4$ נפסל, כי $t>0$.)

t	$0<t<4$	4	$t>4$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	↘	min	↗

תשובה: $t=4$

סעיף ג

בעבור $t=4$: $y_B=\frac{48}{16}+1=4$, כלומר $B(4,4)$, $C(-4,4)$, $A(0,-2)$.

$BC = 4 - (-4) = 8$

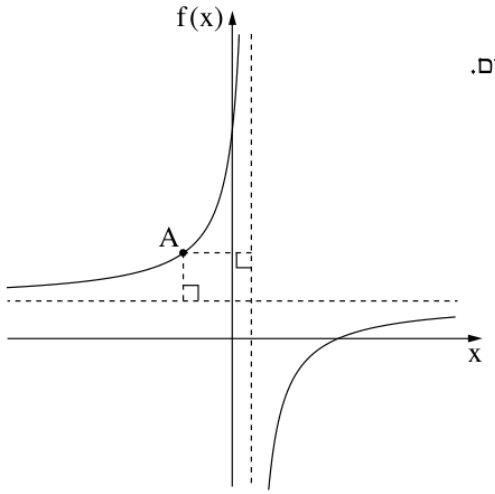
$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

המשולש שווה שוקיים (A על ציר ה־y, ו־B, C סימטריות לו), ולכן $AC = AB = \sqrt{52}$:

$P = 8 + 2\sqrt{52} \approx 8 + 14.42 = 22.42$

תשובה: $8 + 2\sqrt{52} \approx 22.42$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 8



8. לפניכם סרטוט של גרף הפונקצייה $f(x)=\frac{9}{1-x}+2$, המוגדרת לכל $x\neq 1$.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

מנקודה A , הנמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע השני,
העבירו אנכים לאסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ כך שהאסימפטוטות
והאנכים יוצרים מלבן.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן מינימלי.

ג. חשבו את שטח המלבן בעבור שיעורי הנקודה A שמצאתם בסעיף ב.

פתרון מלא

סעיף א

אסימפטוטה אנכית: המכנה מתאפס כאשר $1-x=0$, כלומר $x=1$ (והמונה 9 אינו מתאפס), ולכן $x=1$.

אסימפטוטה אופקית: כאשר $x\to\pm\infty$, השבר $\frac{9}{1-x}$ שואף ל־0, ולכן $f(x)\to 0+2=2$, כלומר $y=2$.

תשובה: $x=1$, $y=2$

סעיף ב

נסמן את הנקודה $A\left(x,\ \frac{9}{1-x}+2\right)$. היא ברביע השני, ולכן $x<0$.

צלעות המלבן הן המרחקים מ־A לאסימפטוטות:

הצלע האופקית (מ־A עד הישר $x=1$): $1-x$ (כי $x<1$).

הצלע האנכית (מ־A עד הישר $y=2$): $\frac{9}{1-x}=\left(\frac{9}{1-x}+2\right)-2$.

היקף המלבן:

$$P(x)=2(1-x)+2\cdot\frac{9}{1-x}=2-2x+\frac{18}{1-x},\qquad x<0$$

נגזור (הנגזרת של $\frac{18}{1-x}$ היא $\frac{18}{(1-x)^2}$):

$$P'(x)=-2+\frac{18}{(1-x)^2}$$

$$P'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{18}{(1-x)^2}=2\ \Rightarrow\ (1-x)^2=9$$

$$1-x=3\ \Rightarrow\ x=-2$$

או

$$1-x=-3\ \Rightarrow\ x=4$$

$x=4$ נפסל (צריך $x<0$), ולכן $x=-2$. בדיקת סוג הקיצון:

$$x\quad -3\qquad -2\qquad -1$$

$P'(x)$ 0 $-2+\frac{18}{16}<0$ $-2+\frac{18}{4}>0$

$P(x)$ יורדת מינימום עולה

שיעור ה־y של A:

$$f(-2)=\frac{9}{1-(-2)}+2=\frac{9}{3}+2=5$$

תשובה: $A(-2,5)$

סעיף ג

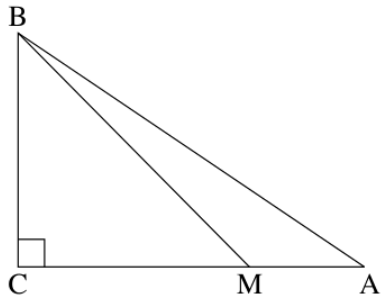
בעבור $A(-2,5)$ צלעות המלבן הן:

$$1-(-2)=3, \qquad 5-2=3$$
$$S=3\cdot 3=9$$

(המלבן שהתקבל הוא ריבוע.)

תשובה: 9 **יחידות שטח.**

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 8



8. ABC הוא משולש ישר זווית, $\sphericalangle ACB = 90^o$. שטח המשולש ABC הוא 72.

M היא נקודה על הצלע AC כך שמתקיים $MC = 2MA$ (ראו סרטוט).

נסמן את אורך הקטע MA ב־ x.

א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע BC.

ב. **(1)** מצאו את x שבעבורו סכום ריבועי מרחקי הנקודה M משלושת קודקודי המשולש $(MA^2 + MB^2 + MC^2)$ הוא מינימלי.

(2) האם ייתכן שהסכום $MA^2 + MB^2 + MC^2$ הוא 300? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

$MA = x$ ו־$MC = 2MA = 2x$, ולכן $AC = MC + MA = 3x$.

במשולש ישר הזווית ABC הניצבים הם AC ו־BC:

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = 72 \;\Rightarrow\; \frac{3x \cdot BC}{2} = 72 \;\Rightarrow\; BC = \frac{144}{3x} = \frac{48}{x}$$

תשובה: $BC = \frac{48}{x}$

סעיף ב (1)

נבטא כל אחד מהמחוברים באמצעות x:

$MA^2 = x^2$, $MC^2 = (2x)^2 = 4x^2$.

במשולש ישר הזווית MCB ($\angle C = 90°$), לפי משפט פיתגורס:

$$MB^2 = MC^2 + BC^2 = 4x^2 + \frac{2304}{x^2}$$

לכן הסכום הוא:

$$f(x) = x^2 + \left(4x^2 + \frac{2304}{x^2}\right) + 4x^2 = 9x^2 + \frac{2304}{x^2}, \qquad x > 0$$

נגזור:

$$f'(x) = 18x - \frac{4608}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 18x = \frac{4608}{x^3} \;\Rightarrow\; x^4 = 256 \;\Rightarrow\; x = 4 \quad (x > 0)$$

x	1	4	5
$f'(x)$	$18 - 4608 < 0$	0	$90 - \frac{4608}{125} > 0$
$f(x)$	יורדת	מינימום	עולה

תשובה: $x = 4$

סעיף ב (2)

הערך המינימלי של הסכום מתקבל ב־$x = 4$:

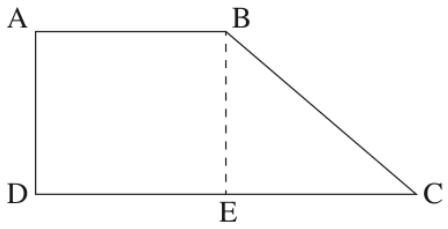
$$f(4) = 9 \cdot 16 + \frac{2304}{16} = 144 + 144 = 288$$

הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $0 < x < 4$ ועולה בתחום $x > 4$, וכאשר x מתקרב ל־0 או גדל מאוד, $f(x)$ גדלה מאוד. לכן $f(x)$ מקבלת כל ערך שגדול מ־288 – ובפרט את הערך 300 (שהוא גדול מ־288).

(בדיקה: $9x^2 + \frac{2304}{x^2} = 300$ מתקיים בעבור $x = 2\sqrt{3} \approx 3.46$ ובעבור $x = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4.62$.)

תשובה: כן, ייתכן – כי 300 גדול מהערך המינימלי 288.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 8



8. המרובע $ABCD$ הוא טרפז ישר זווית, $AB \parallel DC$ (ראו סרטוט).

גובה הטרפז BE **חוצה** את הבסיס DC.

שטח הטרפז הוא $12\sqrt{2}$.

נסמן ב־x את אורך הצלע AB.

א. הביעו באמצעות x את אורך גובה הטרפז.

ב. מצאו את x שבעבורו סכום ריבועֵי השוקיים של הטרפז $(AD^2 + BC^2)$ הוא מינימלי.

ג. האם ייתכן שסכום ריבועֵי השוקיים של הטרפז הוא 30? נמקו.

פתרון מלא

סעיף א

$ABED$ הוא מלבן ($AB \parallel DE$, ו־AD, BE מאונכים לבסיסים), ולכן $DE = AB = x$ (צלעות נגדיות במלבן שוות).

הגובה BE חוצה את DC, ולכן $EC = DE = x$ ו־$DC = 2x$.

נסמן ב־h את גובה הטרפז ונציב בנוסחת שטח טרפז:

$$S = \frac{(AB + DC)\cdot h}{2} \;\Rightarrow\; 12\sqrt{2} = \frac{(x + 2x)\cdot h}{2} = \frac{3x\cdot h}{2}$$

$$24\sqrt{2} = 3x\cdot h \;\Rightarrow\; h = \frac{8\sqrt{2}}{x}$$

תשובה: $h = BE = \frac{8\sqrt{2}}{x}$

סעיף ב

$AD = BE = h$ (צלעות נגדיות במלבן), ולכן:

$$AD^2 = \left(\frac{8\sqrt{2}}{x}\right)^2 = \frac{128}{x^2}$$

במשולש ישר הזווית BEC, לפי משפט פיתגורס:

$$BC^2 = BE^2 + EC^2 = \frac{128}{x^2} + x^2$$

סכום ריבועי השוקיים:

$$f(x) = \frac{128}{x^2} + \frac{128}{x^2} + x^2 = \frac{256}{x^2} + x^2, \qquad x > 0$$

נגזור:

$$f'(x) = -\frac{512}{x^3} + 2x$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x = \frac{512}{x^3} \;\Rightarrow\; x^4 = 256 \;\Rightarrow\; x = 4 \quad (x > 0)$$

x	3	4	5
$f'(x)$	$-\frac{512}{27} + 6 < 0$	0	$-\frac{512}{125} + 10 > 0$
$f(x)$	יורדת	מינימום	עולה

תשובה: $x = 4$

סעיף ג

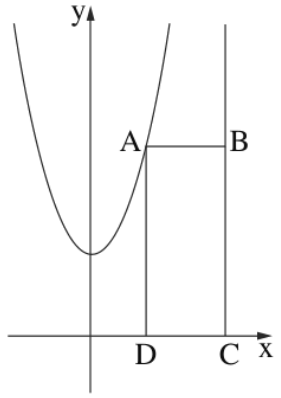
הסכום המינימלי מתקבל ב־$x = 4$:

$$f(4) = \frac{256}{16} + 16 = 16 + 16 = 32$$

זהו הערך הקטן ביותר שהסכום יכול לקבל, כלומר תמיד $AD^2 + BC^2 \geq 32$. המספר 30 קטן מ־32, ולכן הסכום לא יכול להיות 30.

תשובה: לא ייתכן – הסכום המינימלי הוא 32, ו־$30 < 32$.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 8



8. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+3$ ונתון הישר $x=5$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ בריבוע הראשון משמאל לישר.

מן הנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה־x וחותך את הישר הנתון בנקודה B.

הנקודות C ו־D נמצאות על ציר ה־x כך שהמרובע ABCD הוא מלבן (ראה סרטוט).

נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה A.

א. מצא את הערך של t שבעבורו שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.

ב. האם ייתכן מלבן ABCD שנבנה באופן המתואר ושטחו הוא 30? נמק.

פתרון מלא

סעיף א

הנקודה A על גרף הפונקציה: $A(t,\ t^2+3)$. A בריבוע הראשון ומשמאל לישר $x=5$, ולכן $0<t<5$.

B על הישר $x=5$ ובגובה של A: $B(5,\ t^2+3)$. לכן $D(t,0)$ ו־$C(5,0)$.

צלעות המלבן:

$$AB=5-t \qquad AD=t^2+3$$

פונקציית השטח:

$$S(t)=(5-t)(t^2+3)=5t^2+15-t^3-3t=-t^3+5t^2-3t+15$$

$$S'(t)=-3t^2+10t-3$$

$S'(t)=0$:

$$3t^2-10t+3=0 \ \Rightarrow\ t=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm8}{6}$$

$t=3$ או $t=\frac{1}{3}$

t	$0<t<\frac{1}{3}$	$t=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<t<3$	$t=3$	$3<t<5$
$S'(t)$	−	0	+	0	−
$S(t)$	יורדת		מינימום עולה		מקסימום יורדת

ב־$t=3$ השטח מקסימלי:

$$S(3)=(5-3)(9+3)=2\cdot12=24$$

תשובה: $t=3$ (השטח המקסימלי 24)

סעיף ב

לפי טבלת סעיף א, השטח המקסימלי בתחום $0<t<5$ הוא $S(3)=24$ (בקצוות: $S(0)=15$ ו־$S(5)=0$, שניהם קטנים מ־24).

לכן כל מלבן שנבנה באופן המתואר הוא בעל שטח של 24 לכל היותר, ולא ייתכן מלבן ששטחו 30.

תשובה: לא – השטח המקסימלי הוא 24 < 30.

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.