חקירת פונקציות ואינטגרלים – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 4 יחידות, כיתה י"א (שאלון 471) • 36 שאלות

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{4x^2}{x^2-9}+a$.

a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

נתון כי גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה־x בנקודה שבה $x=\sqrt{3}$.

ג. מצאו את הערך של a.

הַציבו $a=2$ בפונקצייה $f(x)$ וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(4) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x-7)$.

ו. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(2) האם הפונקצייה $g(x)$ היא זוגית? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

המכנה אינו יכול להיות אפס:

$$x^2-9\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 3,\; x\neq -3$$

תשובה: כל x פרט ל־$x=\pm 3$.

סעיף ב

תחום ההגדרה סימטרי ביחס ל־0, ולכל x בתחום:

$$f(-x)=\frac{4(-x)^2}{(-x)^2-9}+a=\frac{4x^2}{x^2-9}+a=f(x)$$

לכן $f(x)$ פונקציה זוגית.

תשובה: $f(-x)=f(x)$ **לכל** x **בתחום – הפונקציה זוגית.**

סעיף ג

הנקודה $(\sqrt{3},0)$ על הגרף, ולכן $f(\sqrt{3})=0$:

$$\frac{4\cdot 3}{3-9}+a=0 \;\Rightarrow\; -2+a=0 \;\Rightarrow\; a=2$$

תשובה: $a=2$

סעיף ד (1)

עם $a=2$: $f(x)=\frac{4x^2}{x^2-9}+2=\frac{4x^2+2x^2-18}{x^2-9}=\frac{6x^2-18}{x^2-9}$.

חיתוך עם ציר ה־x ($y=0$): $6x^2-18=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$): $f(0)=\frac{0}{-9}+2=2$.

תשובה: $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$, $(0,2)$

סעיף ד (2)

נגזור (נגזרת של מנה):

$$f'(x)=\frac{8x\left(x^2-9\right)-4x^2\cdot 2x}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{-72x}{\left(x^2-9\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=0,\quad f(0)=2$$

x	$x<-3$	$-3<x<0$	0	$0<x<3$	$x>3$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	↗	↗	max	↘	↘

תשובה: $\max(0,2)$

סעיף ד (3)

לפי טבלת הסימנים של $f'(x)$ (המכנה $\left(x^2-9\right)^2$ תמיד חיובי, ולכן הסימן נקבע לפי $-72x$):

תשובה: עלייה: $x<-3$ **וגם** $-3<x<0$**. ירידה:** $0<x<3$ **וגם** $x>3$**.**

סעיף ד (4)

אסימפטוטות אנכיות – איפוס המכנה (המונה $6x^2-18$ שונה מאפס שם): $x=3,\ x=-3$.

אסימפטוטה אופקית – המונה והמכנה מאותה מעלה, ולכן y שווה למנת המקדמים של x^2:

$$y=\frac{6}{1}=6$$

תשובה: $x=3$**,** $x=-3$**,** $y=6$

סעיף ה

לפי כל מה שמצאנו (חיתוכים, מקסימום ב־$(0,2)$, אסימפטוטות $x=\pm 3$ ו־$y=6$, וסימטריה ביחס לציר ה־y):

סקיצה של גרף הפונקציה f(x) עם אסימפטוטות x=3, x=-3, y=6 ומקסימום ב־(0,2)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ו (1)

הגרף של $g(x)=f(x-7)$ מתקבל מהגרף של $f(x)$ בהזזה של 7 יחידות ימינה. לכן האסימפטוטות האנכיות זזות ימינה ב־7, והאסימפטוטה האופקית לא משתנה:

$$x = -3 + 7 = 4, \qquad x = 3 + 7 = 10, \qquad y = 6$$

תשובה: $x = 4$**,** $x = 10$**,** $y = 6$

סעיף ו (2)

לא. תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא כל x פרט ל־$x = 4$ ו־$x = 10$ – הוא אינו סימטרי ביחס ל־0: למשל $g(4)$ לא מוגדר, אבל $g(-4) = f(-11)$ מוגדר. לכן לא ייתכן ש־$g(-x) = g(x)$ לכל x.

(גם בגרף: ציר הסימטריה של g הוא הישר $x = 7$, ולא ציר ה־y.)

תשובה: לא – תחום ההגדרה אינו סימטרי (ציר הסימטריה הוא $x = 7$**).**

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=2x-4\sqrt{5x-16}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

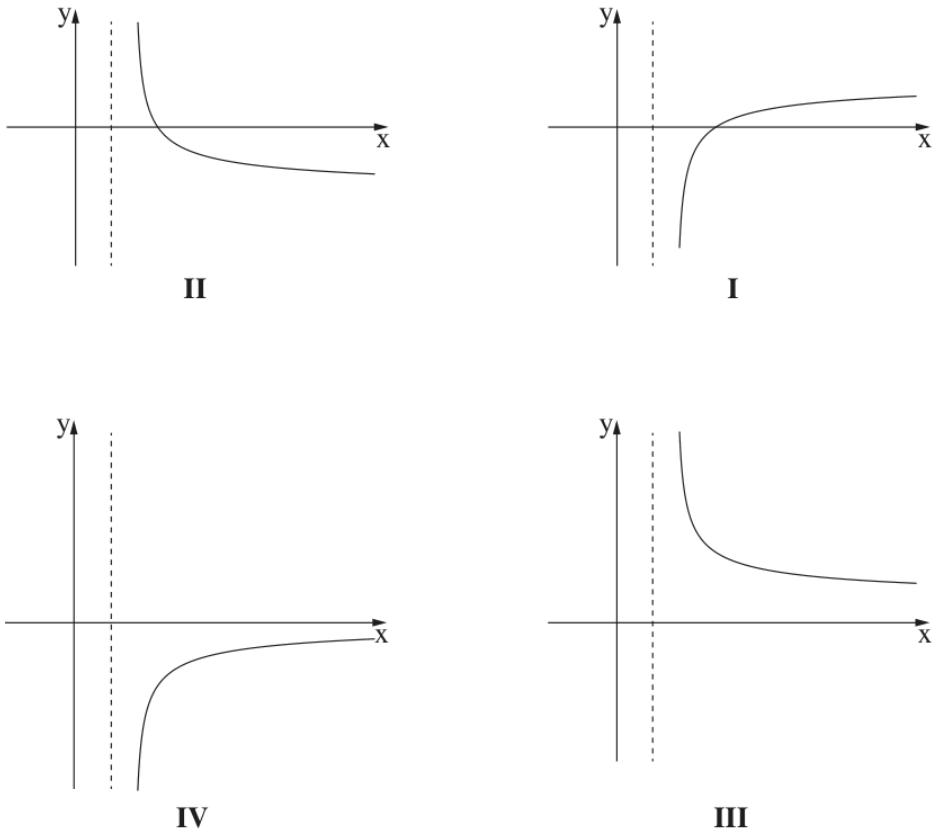
ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום $x>3.2$.

ה. **(1)** קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=4$ ו־ $x=13$.



פתרון מלא

סעיף א

הביטוי שבתוך השורש חייב להיות אי־שלילי:

$$5x-16\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq 3.2$$

תשובה: $x\geq 3.2$

סעיף ב

נציב $y=0$:

$$2x-4\sqrt{5x-16}=0 \;\Rightarrow\; 2x=4\sqrt{5x-16} \;\Rightarrow\; x=2\sqrt{5x-16}$$

נעלה בריבוע (שני האגפים אי־שליליים בתחום):

$$x^2 = 4(5x-16) \;\Rightarrow\; x^2 - 20x + 64 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-256}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2}$$

$x = 16$ או $x = 4$. בדיקה: $f(4) = 8 - 4\sqrt{4} = 0$ ✓, $f(16) = 32 - 4\sqrt{64} = 0$ ✓.

תשובה: $(4,0)$, $(16,0)$

סעיף ג

נגזור:

$$f'(x) = 2 - 4 \cdot \frac{5}{2\sqrt{5x-16}} = 2 - \frac{10}{\sqrt{5x-16}}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{5x-16} = 5 \;\Rightarrow\; 5x - 16 = 25 \;\Rightarrow\; x = 8.2$$

$$f(8.2) = 16.4 - 4 \cdot 5 = -3.6$$

x	3.2	$3.2 < x < 8.2$	8.2	$x > 8.2$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘ max		↗ min

(למשל $f'(4) = 2 - \frac{10}{2} = -3 < 0$ ו־$f'(13) = 2 - \frac{10}{7} > 0$.)

בקצה התחום: $f(3.2) = 6.4 - 4 \cdot 0 = 6.4$, והפונקציה יורדת מיד אחריו – זו נקודת מקסימום (קצה).

תשובה: $\min(8.2,\ -3.6)$, $\max(3.2,\ 6.4)$ **(נקודת קצה).**

סעיף ד

סקיצה של f(x): מתחילה ב־(3.2,6.4), יורדת דרך (4,0) למינימום (8.2,-3.6) ועולה דרך (16,0)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה (1)

מתכונות $f'(x) = 2 - \frac{10}{\sqrt{5x-16}}$:

- $f'(x) < 0$ ב־$3.2 < x < 8.2$ ו־$f'(x) > 0$ ב־$x > 8.2$: הגרף חותך את ציר ה־x בנקודה אחת ועובר משלילי לחיובי.
- כאשר x מתקרב ל־3.2 מימין, $\frac{10}{\sqrt{5x-16}}$ גדל מאוד ולכן $f'(x) \to -\infty$.
- הפונקציה $f'(x)$ עולה (ככל ש־x גדל, $\frac{10}{\sqrt{5x-16}}$ קטן).

רק גרף I מתאים לכל התכונות האלה.

תשובה: גרף I.

סעיף ה (2)

$f(x)$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)$. בין $x = 4$ ל־$x = 8.2$ הגרף של f' מתחת לציר ה־x, ובין 8.2 ל־13 מעליו – לכן מחשבים כל חלק בנפרד:

השטח בין גרף הנגזרת לציר x בין x=4 ל־x=13

$$f(4) = 0, \quad f(8.2) = -3.6, \quad f(13) = 26 - 4\sqrt{49} = -2$$

$$S_1 = -\int_4^{8.2} f'(x)\,dx = -\big(f(8.2) - f(4)\big) = -(-3.6 - 0) = 3.6$$

$$S_2 = \int_{8.2}^{13} f'(x)\,dx = f(13) - f(8.2) = -2 - (-3.6) = 1.6$$

$$S = S_1 + S_2 = 3.6 + 1.6 = 5.2$$

תשובה: $S = 5.2$ **יח״ר**

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{72-18x}{x^2+9}-1$, המוגדרת לכל x.

א. מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה־ x של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

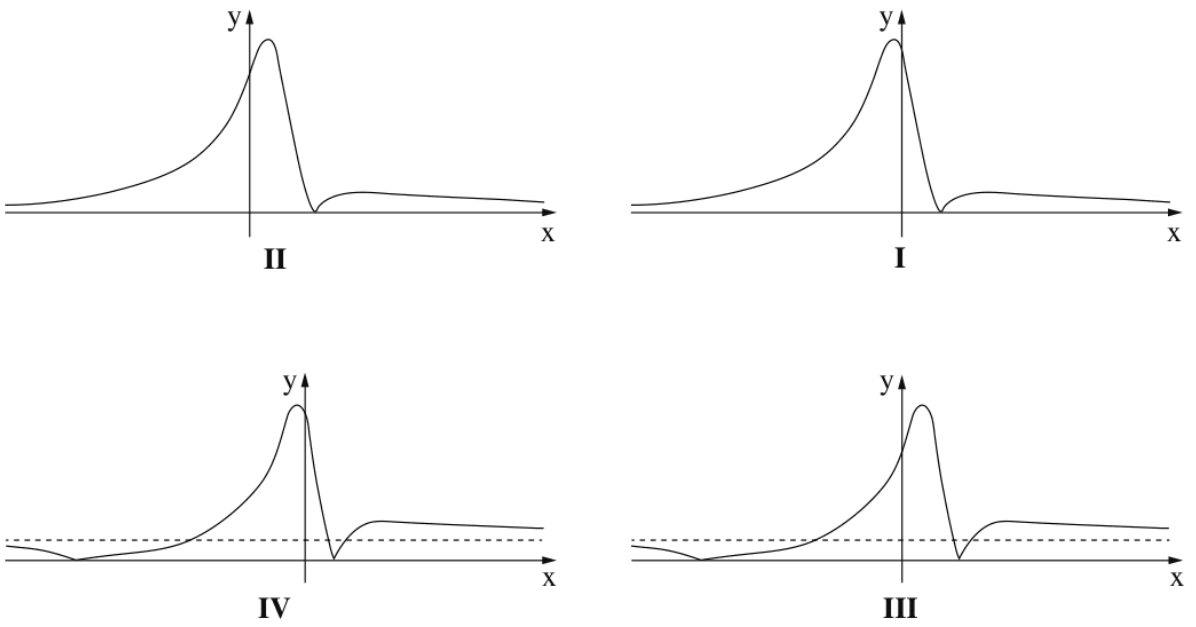
(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=|f(x)|$, המוגדרת לכל x.

ה. **(1)** מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה־ x של הפונקצייה $g(x)$.

(2) קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.



פתרון מלא

סעיף א

כאשר $x \to \pm\infty$, המעלה של המונה $72-18x$ (מעלה 1) קטנה מהמעלה של המכנה x^2+9 (מעלה 2), ולכן השבר שואף ל־0:

$$\frac{72-18x}{x^2+9} \to 0 \;\Rightarrow\; f(x) \to 0-1=-1$$

תשובה: $y=-1$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y: $f(0)=\frac{72}{9}-1=8-1=7$.

חיתוך עם ציר ה־x:

$$\frac{72-18x}{x^2+9}=1 \;\Rightarrow\; 72-18x=x^2+9 \;\Rightarrow\; x^2+18x-63=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-18\pm\sqrt{324+252}}{2}=\frac{-18\pm 24}{2} \;\Rightarrow\; x=3,\quad x=-21$$

תשובה: $(0,7)$, $(3,0)$, $(-21,0)$

סעיף ג (1)

נגזור (נגזרת של מנה; הנגזרת של -1 היא 0):

$$f'(x)=\frac{-18(x^2+9)-(72-18x)\cdot 2x}{(x^2+9)^2}=\frac{18x^2-144x-162}{(x^2+9)^2}=\frac{18(x^2-8x-9)}{(x^2+9)^2}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x^2-8x-9=0 \;\Rightarrow\; (x-9)(x+1)=0 \;\Rightarrow\; x=9,\; x=-1$$

x	$x<-1$	-1	$-1<x<9$	9	$x>9$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$$f(-1)=\frac{72+18}{10}-1=8, \qquad f(9)=\frac{72-162}{90}-1=-2$$

תשובה: $\max(-1,8)$, $\min(9,-2)$

סעיף ג (2)

לפי טבלת הסימנים בסעיף ג (1) (המכנה $(x^2+9)^2$ תמיד חיובי):

תשובה: עלייה: $x<-1$ **וגם** $x>9$**. ירידה:** $-1<x<9$**.**

סעיף ד

סקיצה של f(x): מקסימום (-1,8), מינימום (9,-2), חיתוכים (-21,0), (3,0), (0,7), אסימפטוטה y=-1

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה (1)

$g(x)=|f(x)|$. כאשר $x\to\pm\infty$, $f(x)\to -1$, ולכן $g(x)\to |-1|=1$.

תשובה: $y=1$

סעיף ה (2)

תכונות של $g(x)=|f(x)|$:

- $g(x)\geq 0$, והגרף נוגע בציר ה־x בנקודות האפס של f: $x=-21$ ו־$x=3$.
- האסימפטוטה האופקית היא $y=1$ (קו מקווקו מעל ציר ה־x) – לכן גרפים I ו־II, שבהם הגרף מתקרב לציר ה־x, נפסלים.
- נקודת המקסימום $(-1,8)$ של f נשארת מקסימום של g, והיא נמצאת **משמאל** לציר ה־y – לכן גרף III (שבו הפסגה מימין לציר ה־y) נפסל.

תשובה: גרף IV.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(a-x)\cdot\sqrt{3x-6}$.

a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי הנקודה $(5\ ,\ 9)$ נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=8$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ו.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

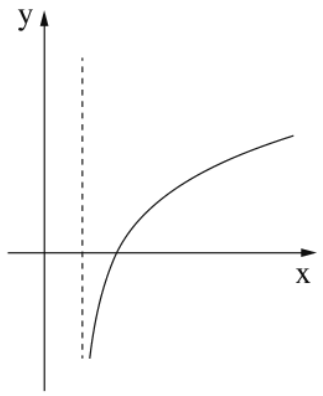
ד. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

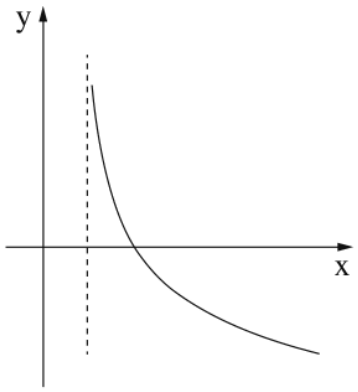
פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום $x>2$.

ו. **(1)** קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמקו את קביעתכם.

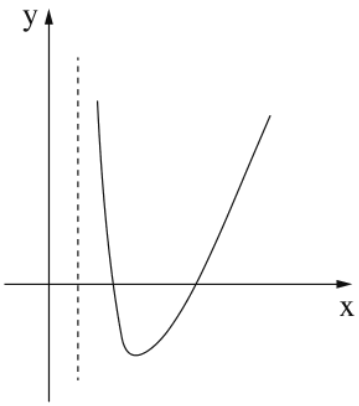
(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x=20$.



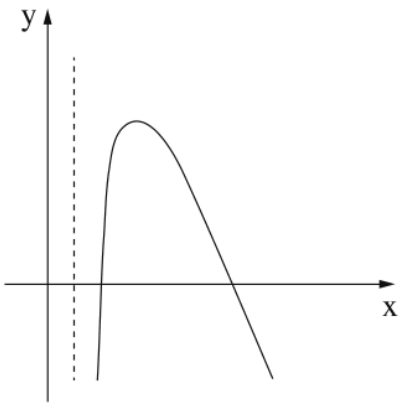
II



I



IV



III

פתרון מלא

סעיף א

הביטוי שבתוך השורש חייב להיות אי־שלילי:

$$3x-6\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq 2$$

תשובה: $x\geq 2$

סעיף ב

הנקודה $(5,9)$ על הגרף, ולכן $f(5)=9$:

$$(a-5)\sqrt{15-6}=9 \;\Rightarrow\; 3(a-5)=9 \;\Rightarrow\; a=8$$

תשובה: $a=8$

סעיף ג

$f(x)=(8-x)\sqrt{3x-6}$. מכפלה שווה לאפס כאשר אחד הגורמים שווה לאפס:

$$8-x=0\Rightarrow x=8 \qquad \sqrt{3x-6}=0\Rightarrow x=2$$

תשובה: $(2,0)$, $(8,0)$

סעיף ד

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x)=-\sqrt{3x-6}+(8-x)\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x-6}}=\frac{-2(3x-6)+3(8-x)}{2\sqrt{3x-6}}=\frac{36-9x}{2\sqrt{3x-6}}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 36-9x=0 \;\Rightarrow\; x=4, \qquad f(4)=4\sqrt{6}\approx 9.8$$

x	$2<x<4$	4	$x>4$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗ min		↘ max

בקצה התחום $f(2)=0$ והפונקציה עולה מיד אחריו – נקודת מינימום (קצה).

תשובה: $\min(2,0)$, $\max(4,\ 4\sqrt{6})$

סעיף ה

סקיצה של f(x): מתחילה ב־(2,0), עולה למקסימום (4, 4√6), יורדת דרך (8,0)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ו (1)

מתכונות $f'(x)=\frac{36-9x}{2\sqrt{3x-6}}$:

- כאשר x מתקרב ל־2 מימין, המכנה שואף ל־0 והמונה חיובי, ולכן $f'(x)\to+\infty$.
- $f'(x)>0$ ב־$2<x<4$, $f'(4)=0$, ו־$f'(x)<0$ ב־$x>4$.
- $f'(x)$ יורדת לאורך כל התחום.

רק גרף I מתאים.

תשובה: גרף I.

סעיף ו (2)

השטח המוגבל בין גרף $f'(x)$, ציר ה־x והישר $x=20$ נמצא בין $x=4$ ל־$x=20$, מתחת לציר ה־x:

השטח בין גרף הנגזרת לציר x מ־x=4 עד x=20

$f(x)$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)$:

$$S = -\int_{4}^{20} f'(x)\,dx = -\big(f(20) - f(4)\big)$$

$$f(20) = (8-20)\sqrt{54} = -12 \cdot 3\sqrt{6} = -36\sqrt{6}, \qquad f(4) = 4\sqrt{6}$$

$$S = -(-36\sqrt{6} - 4\sqrt{6}) = 40\sqrt{6} \approx 97.98$$

תשובה: $S = 40\sqrt{6} \approx 97.98$ **יח"ר**

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{a}{(x-4)^2}$, המוגדרת בתחום $x\neq 4$.

a הוא פרמטר חיובי.

נתון כי בנקודה שבה $x=6$, שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ הוא -3.

א. מצאו את הערך של a.

הציבו $a=12$, וענו על הסעיפים ב–ה.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

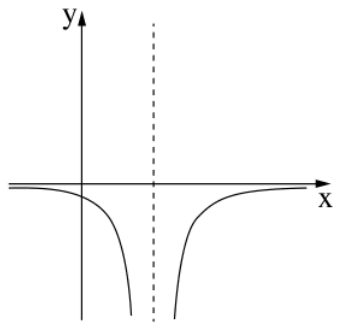
תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. **(1)** קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

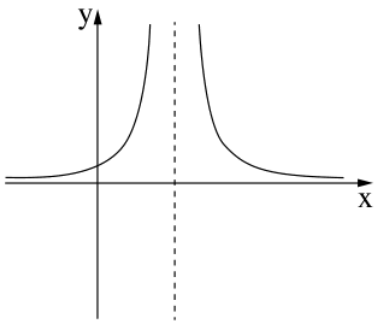
(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x=3$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי ציר ה־ y.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f'(x)+2$.

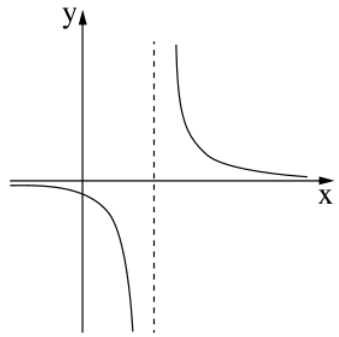
ה. בכמה גדול השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי הישר $x=3$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי ציר ה־ y, מן השטח שמצאתם בסעיף ד(2)? נמקו את תשובתכם.



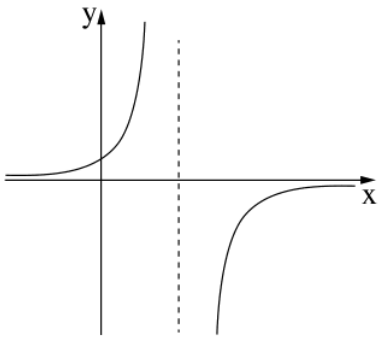
II



I



IV



III

פתרון מלא

סעיף א

נגזור: $f(x)=a(x-4)^{-2}$, ולכן

$$f'(x)=-2a(x-4)^{-3}=\frac{-2a}{(x-4)^3}$$

שיפוע המשיק בנקודה $x=6$ הוא -3:

$$f'(6)=\frac{-2a}{2^3}=-\frac{a}{4}=-3\ \Rightarrow\ a=12$$

תשובה: $a=12$

סעיף ב (1)

$f(x)=\frac{12}{(x-4)^2}$.

חיתוך עם ציר ה־y: $f(0)=\frac{12}{16}=0.75$.

חיתוך עם ציר ה־x: המונה 12 אינו מתאפס, ולכן אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

תשובה: $(0,\ 0.75)$; אין חיתוך עם ציר ה־x.

סעיף ב (2)

אנכית: המכנה מתאפס ב־$x=4$ (והמונה לא).

אופקית: מעלת המונה (0) קטנה ממעלת המכנה (2), ולכן $y=0$.

תשובה: $x=4$, $y=0$

סעיף ב (3)

$$f'(x)=\frac{-24}{(x-4)^3}$$

x	$x<4$	$x>4$
$(x-4)^3$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

תשובה: עלייה: $x<4$. ירידה: $x>4$.

סעיף ג

סקיצה של f(x)=12/(x-4)^2: אסימפטוטות x=4 ו־y=0, חיתוך (0,0.75)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ד (1)

מתכונות $f'(x)=\frac{-24}{(x-4)^3}$:

- ב־$x<4$: $f'(x)>0$, וכאשר x מתקרב ל־4 משמאל $f'(x)\to+\infty$.
- ב־$x>4$: $f'(x)<0$, וכאשר x מתקרב ל־4 מימין $f'(x)\to-\infty$.
- כאשר $x\to\pm\infty$, $f'(x)\to 0$.

הגרף המתאים הוא גרף III.

תשובה: גרף III.

סעיף ד (2)

בתחום $0 \le x \le 3$ מתקיים $f'(x) > 0$ (הגרף מעל ציר ה־x). $f(x)$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)$:

השטח בין גרף הנגזרת, ציר x, ציר y והישר x=3

$$S = \int_0^3 f'(x)\,dx = f(3) - f(0) = \frac{12}{1} - \frac{12}{16} = 12 - 0.75 = 11.25$$

תשובה: $S = 11.25$ **יח״ר**

סעיף ה

$g(x) = f'(x) + 2$, ובתחום $0 \le x \le 3$ גם $g(x) > 0$. השטח המבוקש:

$$\int_0^3 \big(f'(x) + 2\big)dx = \int_0^3 f'(x)\,dx + \int_0^3 2\,dx = 11.25 + 2 \cdot 3 = 11.25 + 6$$

כלומר השטח גדול ב־6 מן השטח שבסעיף ד (2): הגרף של g הוא הגרף של f' מוזז 2 יחידות למעלה, ונוסף מלבן ברוחב 3 ובגובה 2.

תשובה: ב־6 יח״ר (השטח הוא 17.25).

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{7-x}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

(3) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = f(x+a)$, a הוא פרמטר.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת מקסימום פנימית בנקודה שבה $x = 8.6$.

ג. **(1)** מצאו את הערך של a . נמקו את תשובתכם.

(2) מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$?

פתרון מלא

סעיף א (1)

$$7 - x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq 7$$

תשובה: $x \leq 7$

סעיף א (2)

$x^2 \cdot \sqrt{7-x} = 0$ כאשר $x^2 = 0$ או $\sqrt{7-x} = 0$:

$$x = 0 \qquad x = 7$$

תשובה: $(0,0)$, $(7,0)$

סעיף א (3)

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = 2x\sqrt{7-x} + x^2 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{7-x}} = \frac{4x(7-x) - x^2}{2\sqrt{7-x}} = \frac{x(28-5x)}{2\sqrt{7-x}}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, \quad x = 5.6$$

x	$x<0$	0	$0<x<5.6$	5.6	$5.6<x<7$	7
$-f'(x)$		$+$	0	$-$		
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘	min

$$f(0) = 0, \qquad f(5.6) = 5.6^2 \cdot \sqrt{1.4} \approx 37.11, \qquad f(7) = 0$$

תשובה: $\min(0,0)$, $\max(5.6,\ 37.11)$, $\min(7,0)$ **(קצה).**

סעיף ב

סקיצה של $f(x)=x^2\sqrt{7-x}$: מינימום (0,0), מקסימום (5.6,37.11), מינימום קצה (7,0)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ג (1)

הגרף של $g(x)=f(x+a)$ מתקבל מהגרף של $f(x)$ בהזזה אופקית: $|a|$ יחידות שמאלה אם $a>0$, ימינה אם $a<0$. נקודת המקסימום הפנימית של f היא ב־$x=5.6$, ולכן של g היא ב־$x=5.6-a$:

$$5.6-a=8.6 \;\Rightarrow\; a=-3$$

(הגרף הוזז 3 יחידות ימינה: $g(x)=f(x-3)$.)

תשובה: $a=-3$

סעיף ג (2)

$$g(x)=f(x-3)=(x-3)^2\sqrt{7-(x-3)}=(x-3)^2\sqrt{10-x}$$:

$$10-x\geq 0 \;\Rightarrow\; x\leq 10$$

תשובה: $x\leq 10$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{9x}{(x+3)^2}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־x.

(4) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

הישר $y=k$ וגרף הפונקצייה $f(x)$ נפגשים בנקודה אחת בדיוק, $k>0$.

ג. מצאו את הערך של k.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x)+1$.

ד. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(2) בעבור הערך של k שמצאתם, כמה נקודות משותפות יש לישר $y=k$ ולגרף הפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

$$(x+3)^2\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq -3$$

תשובה: $x\neq -3$

סעיף א (2)

אנכית: $x=-3$ (המכנה מתאפס, והמונה $9\cdot(-3)\neq 0$).

אופקית: מעלת המונה (1) קטנה ממעלת המכנה (2), ולכן $y=0$.

תשובה: $x=-3$, $y=0$

סעיף א (3)

$f(0)=0$, ו־$f(x)=0$ רק כאשר $9x=0$, כלומר $x=0$.

תשובה: $(0,0)$

סעיף א (4)

לפי נגזרת של מנה:

$$f'(x)=\frac{9(x+3)^2-9x\cdot 2(x+3)}{(x+3)^4}=\frac{9(x+3)-18x}{(x+3)^3}=\frac{9(3-x)}{(x+3)^3}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=3, \qquad f(3)=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

x	$x<-3$	$-3<x<3$	3	$x>3$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	↗	max	↘

תשובה: $\max\left(3,\ \frac{3}{4}\right)$

סעיף ב

סקיצה של f(x)=9x/(x+3)²: אסימפטוטות x=-3, y=0, מקסימום (3,0.75)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ג

לפי הסקיצה: משמאל לאסימפטוטה $x = -3$ כל ערכי הפונקציה שליליים, ומימין לה הפונקציה מגיעה לכל היותר ל־$\frac{3}{4}$ (בנקודת המקסימום).

ישר אופקי $y = k$ עם $k > 0$ חותך את הגרף בנקודה אחת בלבד רק כאשר הוא משיק לגרף בנקודת המקסימום. (עבור $0 < k < \frac{3}{4}$ יש שתי נקודות חיתוך, ועבור $k > \frac{3}{4}$ אין בכלל.)

תשובה: $k = \frac{3}{4}$

סעיף ד (1)

הגרף של $g(x) = f(x) + 1$ הוא הגרף של f מוזז יחידה אחת למעלה. האסימפטוטה האנכית לא משתנה, והאופקית עולה ב־1.

תשובה: $x = -3$, $y = 1$

סעיף ד (2)

$g(x) = \frac{3}{4} \iff f(x) + 1 = \frac{3}{4} \iff f(x) = -\frac{1}{4}$.

לפי הסקיצה, הישר $y = -\frac{1}{4}$ חותך את הגרף של f פעמיים: פעם משמאל ל־$x = -3$ (שם f יורדת מ־0 ל־$-\infty$) ופעם בין -3 ל־0 (שם f עולה מ־$-\infty$ ל־0).

בדיקה אלגברית: $\frac{9x}{(x+3)^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + 42x + 9 = 0 \Rightarrow x \approx -41.78,\ x \approx -0.22$.

תשובה: 2 נקודות משותפות.

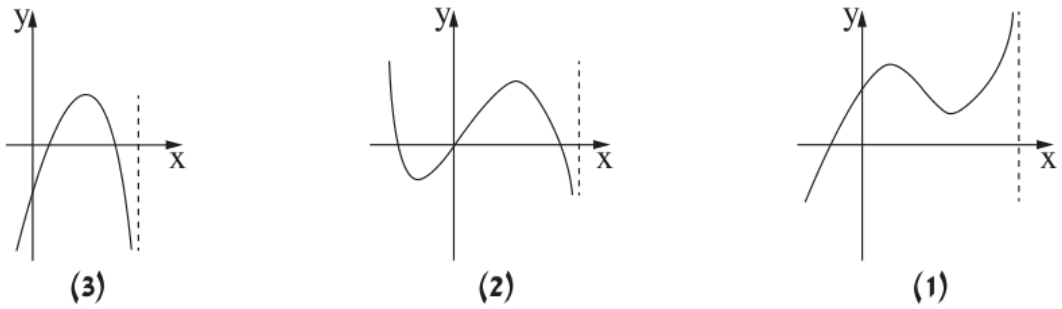
בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 7

7. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \le 1.5$,

ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרת בתחום $x < 1.5$.

לפונקצייה $f(x)$ יש בדיוק שתי נקודות קיצון פנימיות.

לפניכם שלושה גרפים (1)–(3). אחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



א. קבעו איזה מן הגרפים (1)–(3) מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון: $f(x) = (x^2+1)\cdot\sqrt{3-2x}$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־x.

פתרון מלא

סעיף א

ל־$f(x)$ יש בדיוק שתי נקודות קיצון פנימיות, ולכן $f'(x)$ מתאפסת בדיוק פעמיים ומחליפה סימן בכל אחת מהן.

- גרף (1) חותך את ציר ה־x פעם אחת בלבד – נקודת קיצון אחת.
- גרף (2) חותך את ציר ה־x שלוש פעמים – שלוש נקודות קיצון.
- גרף (3) חותך את ציר ה־x פעמיים, ומחליף סימן בכל חיתוך.

תשובה: גרף (3).

סעיף ב

עם ציר ה־y: $f(0) = 1\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

עם ציר ה־x: $x^2+1>0$ תמיד, ולכן $f(x)=0$ רק כאשר $\sqrt{3-2x}=0$, כלומר $x=1.5$.

תשובה: $(0,\sqrt{3})$, $(1.5,\ 0)$

סעיף ג (1)

לפי כלל המכפלה:

$$f'(x)=2x\sqrt{3-2x}+(x^2+1)\cdot\frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}=\frac{2x(3-2x)-(x^2+1)}{\sqrt{3-2x}}=$$
$$\frac{-5x^2+6x-1}{\sqrt{3-2x}}$$
$$-5x^2+6x-1=0\ \Rightarrow\ x=0.2,\quad x=1$$

x	$x<0.2$	$0.2<x<1$	1	$1<x<1.5$	1.5
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	↗ min		↘ max	min

$$f(0.2)=1.04\cdot\sqrt{2.6}\approx1.68\qquad f(1)=2\cdot1=2\qquad f(1.5)=0$$

תשובה: $\min(0.2,\ 1.68)$, $\max(1,\ 2)$, $\min(1.5,\ 0)$ **(קצה).**

סעיף ג (2)

מהטבלה שבסעיף ג (1).

תשובה: עלייה: $0.2<x<1$. **ירידה:** $x<0.2$ **וגם** $1<x<1.5$.

סעיף ד

סקיצה של f(x)=(x²+1)√(3-2x) עם נקודות הקיצון והחיתוך

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה

גרף הנגזרת וציר ה־x סוגרים שטח בין נקודות האפס של הנגזרת, $x=0.2$ ו־$x=1$, ושם $f'(x)>0$:

השטח בין גרף f'(x) וציר x בין 0.2 ל־1

$$S=\int_{0.2}^{1}f'(x)\,dx=f(1)-f(0.2)=2-1.04\sqrt{2.6}\approx2-1.677=0.323$$

תשובה: $S\approx0.323$ **יח"ר**

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2+1}+1$, המוגדרת לכל x.

א. מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה־x של הפונקציה $f(x)$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

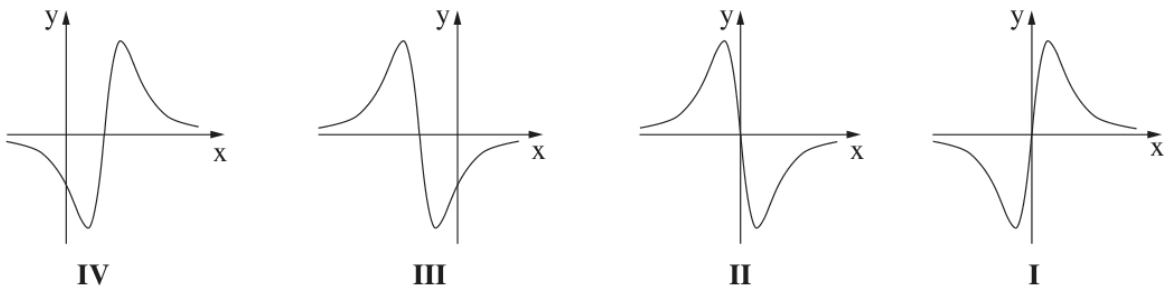
(2) רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־x.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. **(1)** קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמקו את קביעתכם.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־x ועל ידי הישרים $x=2$ ו־$x=-2$.



פתרון מלא

סעיף א

בביטוי $\frac{x^2-9}{x^2+1}$ החזקה הגבוהה במונה ובמכנה שווה (x^2), והמקדמים שלה הם 1 ו־1. לכן כאשר $x\to\pm\infty$ השבר שואף ל־$\frac{1}{1}=1$, והפונקציה שואפת ל־$1+1=2$.

(אפשר גם לכנס למכנה משותף: $f(x)=\frac{x^2-9+x^2+1}{x^2+1}=\frac{2x^2-8}{x^2+1}$, והיחס בין המקדמים הוא $\frac{2}{1}=2$.)

תשובה: $y=2$

סעיף ב (1)

נגזור לפי כלל הנגזרת של מנה (הנגזרת של הקבוע 1 היא 0):

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-9)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3+18x}{(x^2+1)^2}=\frac{20x}{(x^2+1)^2}$$

נשווה את הנגזרת לאפס:

$$\frac{20x}{(x^2+1)^2}=0\ \Rightarrow\ x=0$$

$$f(0)=\frac{0-9}{0+1}+1=-8$$

המכנה $(x^2+1)^2$ תמיד חיובי, ולכן הסימן של $f'(x)$ הוא הסימן של $20x$:

x	$x<0$	0	$x>0$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

תשובה: $(0,\ -8)$ **– נקודת מינימום.**

סעיף ב (2)

לפי טבלת הסימנים בסעיף ב (1):

עלייה: $x > 0$. ירידה: $x < 0$.

תשובה: עלייה: $x > 0$, ירידה: $x < 0$.

סעיף ג

נציב $f(x) = 0$:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + 1} + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2 - 9}{x^2 + 1} = -1$$
$$x^2 - 9 = -x^2 - 1 \;\Rightarrow\; 2x^2 = 8 \;\Rightarrow\; x^2 = 4$$

לכן $x = 2$ או $x = -2$.

תשובה: $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$

סעיף ד

נסמן את האסימפטוטה $y = 2$, את נקודת המינימום $(0, -8)$ ואת נקודות החיתוך $(\pm 2, 0)$. הפונקציה יורדת עד $x = 0$ ועולה אחריו, ומתקרבת ל־$y = 2$ מלמטה משני הצדדים.

סקיצה של f(x) עם אסימפטוטה y=2 ומינימום ב־(0,-8)

תשובה: ראו סקיצה בפתרון המלא.

סעיף ה (1)

לפי סעיף ב: $f'(x) < 0$ בעבור $x < 0$, $f'(0) = 0$, ו־$f'(x) > 0$ בעבור $x > 0$. כלומר גרף הנגזרת נמצא מתחת לציר ה־x משמאל לראשית, עובר דרך הראשית, ונמצא מעל ציר ה־x מימין לראשית.

גרף II הפוך בסימנים (חיובי משמאל ושלילי מימין). בגרפים III ו־IV הגרף אינו עובר דרך הראשית (מתאפס במקום אחר). לכן רק גרף **I** מתאים.

תשובה: גרף I

סעיף ה (2)

בתחום $-2 \le x \le 0$ הנגזרת שלילית (השטח מתחת לציר), ובתחום $0 \le x \le 2$ היא חיובית. פונקציה קדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$, ולכן:

$$S_1 = -\int_{-2}^{0} f'(x)\,dx = -\big(f(0) - f(-2)\big) = -(-8 - 0) = 8$$
$$S_2 = \int_{0}^{2} f'(x)\,dx = f(2) - f(0) = 0 - (-8) = 8$$
$$S = S_1 + S_2 = 8 + 8 = 16$$

תשובה: $S = 16$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(3x-9)\cdot\sqrt{15-x}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

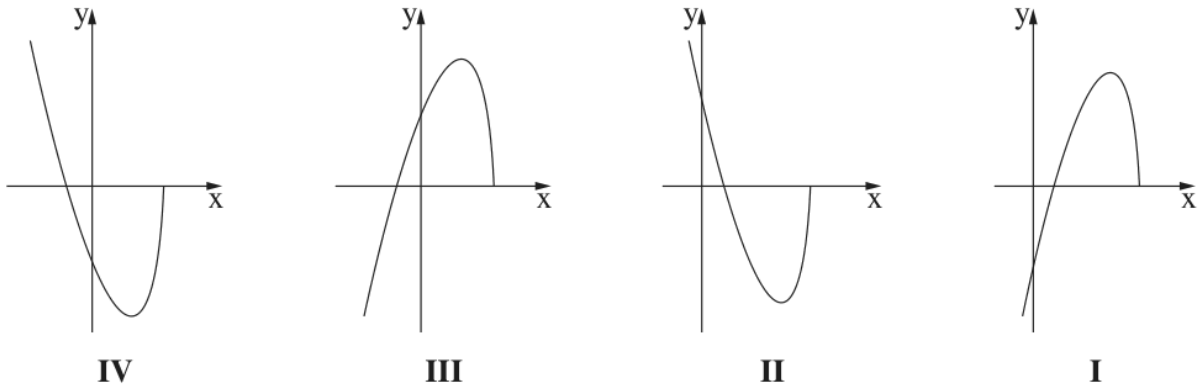
ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x+6)$, המוגדרת בתחום $x\le 9$.

ה. **(1)** קבעו איזה מן הגרפים $\text{I}-\text{IV}$ שלפניכם מתאר את הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

(2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקצייה $g(x)$?



פתרון מלא

סעיף א

ביטוי בתוך שורש ריבועי חייב להיות אי־שלילי:

$$15-x\ge 0\ \Rightarrow\ x\le 15$$

תשובה: $x\le 15$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$):

$$f(0)=(0-9)\cdot\sqrt{15}=-9\sqrt{15}\approx -34.86$$

חיתוך עם ציר ה־x ($f(x)=0$): מכפלה שווה לאפס כאשר אחד הגורמים שווה לאפס.

$3x-9=0\Rightarrow x=3$, או $\sqrt{15-x}=0\Rightarrow x=15$. שני הערכים בתחום ההגדרה.

תשובה: $(0,\ -9\sqrt{15})$, $(3,\ 0)$, $(15,\ 0)$

סעיף ג

נגזור לפי כלל הנגזרת של מכפלה:

$$f'(x)=3\sqrt{15-x}+(3x-9)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{15-x}}=\frac{6(15-x)-(3x-9)}{2\sqrt{15-x}}=\frac{99-9x}{2\sqrt{15-x}}$$

(הנגזרת מוגדרת בעבור $x<15$.) נשווה לאפס:

$$99-9x=0\ \Rightarrow\ x=11$$

$$f(11) = (33-9)\cdot\sqrt{4} = 24\cdot 2 = 48$$

המכנה חיובי, ולכן הסימן של $f'(x)$ נקבע לפי $99 - 9x$:

x	$x < 11$	11	$11 < x < 15$	15
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	max	↘	min (קצה)

הנקודה $(11, 48)$ היא מקסימום. הפונקציה יורדת עד קצה תחום ההגדרה $x = 15$, ולכן $(15, 0)$ היא נקודת מינימום (קיצון בקצה התחום).

תשובה: מקסימום $(11,\ 48)$, מינימום (קצה) $(15,\ 0)$

סעיף ד

נסמן את נקודות החיתוך ואת נקודות הקיצון. הפונקציה עולה עד $x = 11$ ויורדת עד $x = 15$, שם הגרף נגמר.

סקיצה של f(x) עם מקסימום ב־(11,48) וסוף הגרף ב־(15,0)

תשובה: ראו סקיצה בפתרון המלא.

סעיף ה (1)

הגרף של $g(x) = f(x+6)$ הוא הגרף של $f(x)$ מוזז **6 יחידות שמאלה**. לכן:

• נקודות החיתוך עם ציר ה־x זזות ל־$x = 3 - 6 = -3$ ו־$x = 15 - 6 = 9$ (הגרף נגמר ב־$x = 9$).

• החיתוך עם ציר ה־y: $g(0) = f(6) = (18-9)\cdot\sqrt{9} = 27 > 0$.

גרף שנגמר מימין, שעובר את ציר ה־x משמאל לציר ה־y וחותך את ציר ה־y מעל ציר ה־x, עם מקסימום מימין לציר ה־y – זה גרף **III**. (בגרף I החיתוך עם ציר ה־y שלילי, כמו ב־$f(x)$ עצמה; גרפים II ו־IV הם בעלי מינימום ולא מקסימום.)

תשובה: גרף III

סעיף ה (2)

ההזזה שמאלה ב־6 לא משנה את ערכי ה־y, רק מזיזה את ערכי ה־x ב־6. המקסימום של $f(x)$ ב־$(11, 48)$ עובר ל־$(11-6,\ 48)$:

$$(5,\ 48)$$

בדיקה: $g(5) = f(11) = 48$.

תשובה: $(5,\ 48)$ – מקסימום

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x^2+x+a}{x}$. $a\neq 0$ הוא פרמטר.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

נתון כי גרף הפונקצייה $f(x)$ עובר בנקודה $(2,\ 7.5)$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=9$, וענו על סעיפים ג–ה.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נגזרת הפונקצייה $g(x)$ מקיימת $g'(x)=f(x)-11$.

ה. **(1)** סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

(2) מצאו את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה אינו יכול להיות אפס: $x\neq 0$.

תשובה: $x\neq 0$

סעיף א (2)

אסימפטוטה אנכית: המכנה מתאפס ב־$x=0$, ובנקודה זו המונה שווה ל־$a\neq 0$ (לא מתאפס). לכן $x=0$ היא אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה אופקית: החזקה הגבוהה במונה (x^2) גדולה מהחזקה הגבוהה במכנה (x), ולכן כאשר $x\to\pm\infty$ הפונקציה אינה שואפת למספר – אין אסימפטוטה אופקית.

תשובה: $x=0$ **בלבד.**

סעיף ב

נציב את הנקודה $(2,\ 7.5)$:

$$\frac{2^2+2+a}{2}=7.5\ \Rightarrow\ 6+a=15\ \Rightarrow\ a=9$$

תשובה: $a=9$

סעיף ג

כעת $f(x)=\frac{x^2+x+9}{x}$. נגזור לפי כלל הנגזרת של מנה:

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\cdot x-(x^2+x+9)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2}$$

נשווה לאפס: $x^2-9=0$, ולכן $x=3$ או $x=-3$.

$$f(3)=\frac{9+3+9}{3}=7 \qquad f(-3)=\frac{9-3+9}{-3}=-5$$

המכנה x^2 חיובי, ולכן הסימן של $f'(x)$ הוא הסימן של x^2-9:

x	$x<-3$	-3	$-3<x<0$	0	$0<x<3$	3	$x>3$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	לא מוגדרת	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	max	↘		↘	min	↗

תשובה: מקסימום $(-3,\ -5)$, מינימום $(3,\ 7)$

סעיף ד

נסמן את האסימפטוטה $x=0$, את המקסימום $(-3,-5)$ ואת המינימום $(3,7)$. לגרף אין נקודות חיתוך עם הצירים (המונה x^2+x+9 תמיד חיובי, כי הדיסקרימיננטה $1-36<0$, ו־$x\neq 0$).

סקיצה של f(x) עם אסימפטוטה x=0, מקסימום (-3,-5) ומינימום (3,7)

תשובה: ראו סקיצה בפתרון המלא.

סעיף ה (1)

$g'(x)=f(x)-11$, כלומר הגרף של $g'(x)$ הוא הגרף של $f(x)$ מוזז 11 יחידות **למטה**:

• המקסימום עובר ל־$(-3,-16)=(-3,\ -5-11)$ והמינימום ל־$(3,-4)=(3,\ 7-11)$.

• האסימפטוטה $x=0$ נשארת.

• נקודות החיתוך עם ציר ה־x: $f(x)=11$:

$$\frac{x^2+x+9}{x}=11 \ \Rightarrow\ x^2-10x+9=0 \ \Rightarrow\ x=1,\ x=9$$

סקיצה של g'(x): הגרף של f(x) מוזז 11 למטה, חותך את ציר x ב־1 וב־9

תשובה: ראו סקיצה בפתרון המלא.

סעיף ה (2)

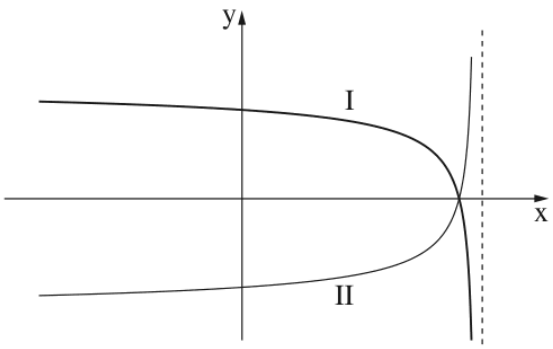
נקודות הקיצון של $g(x)$ הן הנקודות שבהן $g'(x)$ מתאפסת ומחליפה סימן. לפי הגרף של $g'(x)$:

x	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<9$	9	$x>9$
$g'(x)$	$-$	לא מוגדרת	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗	max	↘	min	↗

(בתחום $x<0$ הנגזרת שלילית תמיד – הערך הגבוה ביותר שלה שם הוא -16 – ולכן אין שם קיצון.)

תשובה: מקסימום ב־$x=1$, מינימום ב־$x=9$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 7



7. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \le 2$,

ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרת בתחום $x < 2$.

לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת בלבד, מסוג מקסימום.

בסרטוט שלפניכם מתוארים שני גרפים, I ו־II, אחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א. קבעו איזה מן הגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ונמקו את קביעתכם.

נתון: $f(x) = 4x + 2\sqrt{8-4x}$.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה־x בנקודה אחת בלבד, בחלקו השלילי.

ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־x.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = -3 \cdot f'(x)$.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־x ועל ידי ציר ה־y.

פתרון מלא

סעיף א

ל־$f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת בלבד, והיא מקסימום. לכן משמאל לנקודה זו הפונקציה עולה ($f'(x) > 0$) ומימינה יורדת ($f'(x) < 0$): גרף הנגזרת חותך את ציר ה־x פעם אחת ועובר מ**חיובי לשלילי**.

בגרף I הערכים חיוביים משמאל ושליליים מימין, ואילו בגרף II הערכים שליליים משמאל וחיוביים מימין (זה מתאים למינימום). לכן גרף **I** מתאר את $f'(x)$.

תשובה: גרף I

סעיף ב

$f(x) = 4x + 2\sqrt{8-4x}$. נגזור (נגזרת של שורש: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$):

$$f'(x) = 4 + 2 \cdot \frac{-4}{2\sqrt{8-4x}} = 4 - \frac{4}{\sqrt{8-4x}}$$

נשווה לאפס:

$$\frac{4}{\sqrt{8-4x}} = 4 \;\Rightarrow\; \sqrt{8-4x} = 1 \;\Rightarrow\; 8-4x = 1 \;\Rightarrow\; x = 1.75$$

$$f(1.75) = 7 + 2\sqrt{1} = 9$$

x	$x < 1.75$	1.75	$1.75 < x < 2$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	max	↘	(קצה) min

(למשל $f'(0) = 4 - \frac{4}{\sqrt{8}} > 0$, $f'(1.96) = 4 - \frac{4}{0.4} < 0$.) בקצה התחום: $f(2) = 8 + 2 \cdot 0 = 8$.

תשובה: מקסימום $(1.75,\ 9)$, מינימום (קצה) $(2,\ 8)$

סעיף ג

נציב $f(x)=0$:

$$4x+2\sqrt{8-4x}=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{8-4x}=-2x$$

(שורש אינו שלילי, ולכן נדרש $-2x\geq 0$, כלומר $x\leq 0$ – מתאים לנתון שהחיתוך בחלק השלילי.) נעלה בריבוע:

$$8-4x=4x^2 \;\Rightarrow\; x^2+x-2=0 \;\Rightarrow\; (x+2)(x-1)=0$$

$x=1$ נפסל ($x\leq 0$), ונשאר $x=-2$. בדיקה: $f(-2)=-8+2\sqrt{16}=0$ ✓

תשובה: $(-2,\ 0)$

סעיף ד

נסמן את נקודת החיתוך $(-2,0)$, את החיתוך עם ציר ה־y: $f(0)=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}\approx 5.66$, את המקסימום $(1.75,9)$ ואת נקודת הקצה $(2,8)$.

סקיצה של f(x): עולה עד (1.75,9) ויורדת עד (2,8)

תשובה: ראו סקיצה בפתרון המלא.

סעיף ה

$g(x)=-3f'(x)$ מתאפסת כאשר $f'(x)=0$, כלומר ב־$x=1.75$. בתחום $0\leq x\leq 1.75$ מתקיים $f'(x)>0$, ולכן $g(x)<0$ – השטח נמצא מתחת לציר ה־x.

השטח בין g(x), ציר x וציר y מסומן

פונקציה קדומה של $g(x)=-3f'(x)$ היא $-3f(x)$:

$$S=-\int_0^{1.75} g(x)\,dx=\int_0^{1.75} 3f'(x)\,dx=3\big(f(1.75)-f(0)\big)$$

$$S=3\left(9-4\sqrt{2}\right)=27-12\sqrt{2}\approx 10.03$$

תשובה: $S=27-12\sqrt{2}\approx 10.03$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x+4}{5x-x^2}-b$. b הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (הביעו באמצעות b , אם יש צורך).

נתון כי הישר $y=-1$ משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודת המינימום שלה.

ג. מצאו את b .

הציבו $b=2$ בפונקצייה $f(x)$ וענו על סעיפים ד–ה.

ד. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$, שפונקציית הנגזרת שלה מקיימת $g'(x)=f(x)+1$.

תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ה. קבעו אם לפונקצייה $g(x)$ יש נקודות קיצון. נמקו את קביעתכם.

פתרון מלא

סעיף א

המכנה אינו יכול להיות אפס:

$$5x-x^2\neq 0 \;\Rightarrow\; x(5-x)\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 0,\ x\neq 5$$

תשובה: $x\neq 0$**,** $x\neq 5$

סעיף ב

נגזור לפי כלל הנגזרת של מנה (הנגזרת של הקבוע b היא 0):

$$f'(x)=\frac{1\cdot(5x-x^2)-(x+4)(5-2x)}{(5x-x^2)^2}=\frac{5x-x^2-5x+2x^2-20+8x}{(5x-x^2)^2}=$$
$$\frac{x^2+8x-20}{(5x-x^2)^2}$$

נשווה לאפס:

$$x^2+8x-20=0 \;\Rightarrow\; (x+10)(x-2)=0 \;\Rightarrow\; x=-10,\ x=2$$

$$f(-10)=\frac{-6}{-50-100}-b=\frac{1}{25}-b \qquad f(2)=\frac{6}{10-4}-b=1-b$$

המכנה חיובי, ולכן הסימן של $f'(x)$ הוא הסימן של $(x+10)(x-2)$:

x	$x<-10$	-10	$-10<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<5$	5	$x>5$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↗	max	↘		↘	min	↗		↗

תשובה: מקסימום $\left(-10,\ \frac{1}{25}-b\right)$**, מינימום** $(2,\ 1-b)$

סעיף ג

הישר $y=-1$ (מקביל לציר ה־x) משיק לגרף בנקודת המינימום, ולכן שיעור ה־y של נקודת המינימום הוא -1:

$$1-b=-1 \;\Rightarrow\; b=2$$

תשובה: $b=2$

סעיף ד (1)

$f(x)=\frac{x+4}{5x-x^2}-2$.

אנכיות: המכנה מתאפס ב־$x=0$ וב־$x=5$, והמונה שם אינו מתאפס (4 ו־9). לכן $x=0$ ו־$x=5$.

אופקית: החזקה במכנה (x^2) גדולה מהחזקה במונה (x), ולכן השבר שואף ל־0 כאשר $x\to\pm\infty$, והפונקציה שואפת ל־-2: $y=-2$.

תשובה: $x=0$, $x=5$, $y=-2$

סעיף ד (2)

ציר ה־y: $x=0$ אינו בתחום ההגדרה – אין חיתוך.

ציר ה־x:

$$\frac{x+4}{5x-x^2}=2 \;\Rightarrow\; x+4=10x-2x^2 \;\Rightarrow\; 2x^2-9x+4=0$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm 7}{4} \;\Rightarrow\; x=4,\; x=\frac{1}{2}$$

תשובה: $(4,\ 0)$, $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

סעיף ד (3)

נסמן את האסימפטוטות $x=0$, $x=5$, $y=-2$, את המקסימום $(-10,\ -1.96)$, את המינימום $(2,-1)$ ואת נקודות החיתוך $(0.5,0)$, $(4,0)$, ונשתמש בטבלת העלייה והירידה:

סקיצה של f(x) עם אסימפטוטות x=0, x=5, y=-2

תשובה: ראו סקיצה בפתרון המלא.

סעיף ה

$g'(x)=f(x)+1$. לנקודת קיצון של $g(x)$ נדרש ש־$g'(x)$ תתאפס **ותחליף סימן**.

$g'(x)=0 \iff f(x)=-1$. לפי הסקיצה, הערך -1 מתקבל רק בנקודת המינימום $(2,-1)$ (בענף השמאלי הערך הגדול ביותר הוא -1.96, ובענף הימני כל הערכים קטנים מ־-2; בענף האמצעי -1 הוא הערך הקטן ביותר).

בסביבת $x=2$ מתקיים $f(x)\geq -1$, כלומר $g'(x)=f(x)+1\geq 0$ משני הצדדים – הנגזרת **אינה מחליפה סימן**. לכן $x=2$ אינה נקודת קיצון של $g(x)$, ול־$g(x)$ אין נקודות קיצון.

תשובה: לא – ל־$g(x)$ אין נקודות קיצון.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}x + 5}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

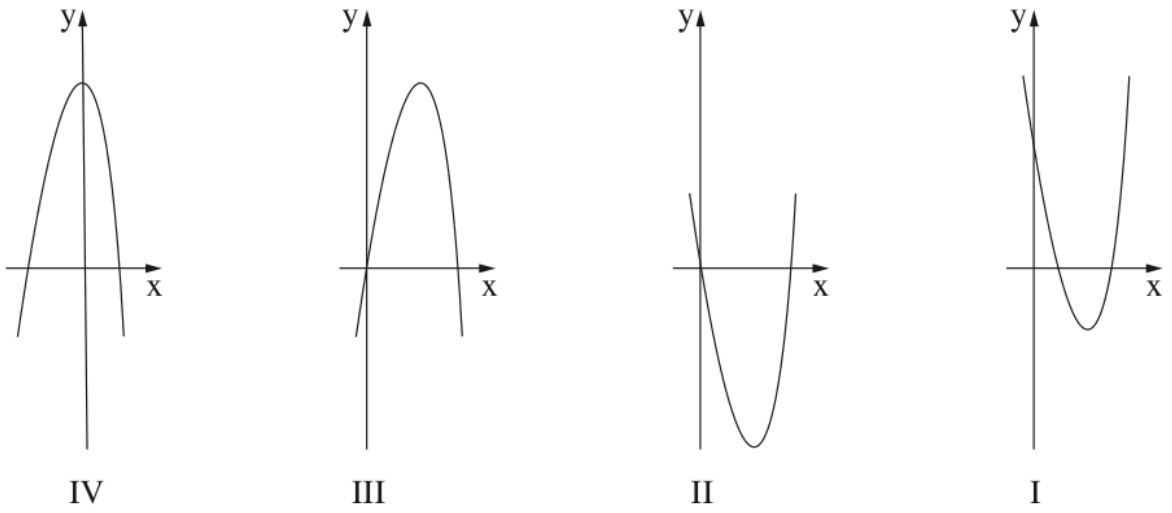
ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. אחד מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי גרף הפונקצייה $a \cdot f'(x)$, שווה ל־ 160 .
a הוא פרמטר שלילי.

ו. מצאו את הערך של a .



פתרון מלא

סעיף א

הביטוי בתוך השורש חייב להיות אי־שלילי:

$$-\frac{1}{2}x + 5 \geq 0 \;\Rightarrow\; 5 \geq \frac{1}{2}x \;\Rightarrow\; x \leq 10$$

תשובה: $x \leq 10$

סעיף ב

ציר ה־y: $f(0) = 0 \cdot \sqrt{5} = 0$ – הנקודה $(0, 0)$.

ציר ה־x: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, ולכן $x^2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}x + 5} = 0$, או $-\frac{1}{2}x + 5 = 0 \Rightarrow x = 10$.

תשובה: $(0,\ 0)$, $(10,\ 0)$

סעיף ג

נגזור לפי כלל הנגזרת של מכפלה:

$$f'(x)=2x\sqrt{-\tfrac{1}{2}x+5}+x^2\cdot\frac{-\frac{1}{2}}{2\sqrt{-\frac{1}{2}x+5}}=\frac{8x\left(-\frac{1}{2}x+5\right)-x^2}{4\sqrt{-\frac{1}{2}x+5}}=\frac{40x-5x^2}{4\sqrt{-\frac{1}{2}x+5}}$$

(מוגדרת בעבור $x<10$.) נשווה לאפס:

$$40x-5x^2=0\ \Rightarrow\ 5x(8-x)=0\ \Rightarrow\ x=0,\ x=8$$

$$f(8)=64\cdot\sqrt{-4+5}=64$$

x	$x<0$	0	$0<x<8$	8	$8<x<10$	10
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘	min (קצה)

תשובה: מינימום $(0,\ 0)$**, מקסימום** $(8,\ 64)$**, מינימום (קצה)** $(10,\ 0)$

סעיף ד

סקיצה של f(x): מינימום ב־(0,0), מקסימום ב־(8,64), סוף הגרף ב־(10,0)

תשובה: ראו סקיצה בפתרון המלא.

סעיף ה

לפי סעיף ג: $f'(0)=0$ ו־$f'(8)=0$; $f'(x)<0$ בעבור $x<0$, $f'(x)>0$ בעבור $0<x<8$, ו־$f'(x)<0$ בעבור $8<x<10$.

כלומר גרף הנגזרת עובר דרך **ראשית הצירים**, שלילי משמאל לה, חיובי אחריה וחוזר ויורד מתחת לציר ה־x.

גרף IV אינו עובר דרך הראשית; בגרף II הסימנים הפוכים (חיובי משמאל לראשית ושלילי אחריה); גרף I אינו עובר דרך הראשית. לכן גרף **III**.

תשובה: גרף III

סעיף ו

הגרפים של $f'(x)$ ושל $a\cdot f'(x)$ נחתכים כאשר $f'(x)=a\cdot f'(x)$, כלומר $(1-a)f'(x)=0$, ולכן $f'(x)=0$: $x=0$ ו־$x=8$. בתחום $0<x<8$: $f'(x)>0$ ו־$a\cdot f'(x)<0$ (כי $a<0$), כך ש־$f'(x)$ הוא הגרף העליון.

השטח בין f'(x) ל־a•f'(x) בתחום 0 עד 8 מסומן

$$S=\int_0^8\big(f'(x)-a\,f'(x)\big)dx=(1-a)\int_0^8 f'(x)\,dx=(1-a)\big(f(8)-f(0)\big)=64(1-a)$$

(פונקציה קדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$.) נתון $S=160$:

$$64(1-a)=160\ \Rightarrow\ 1-a=2.5\ \Rightarrow\ a=-1.5$$

תשובה: $a=-1.5$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-9}+4$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

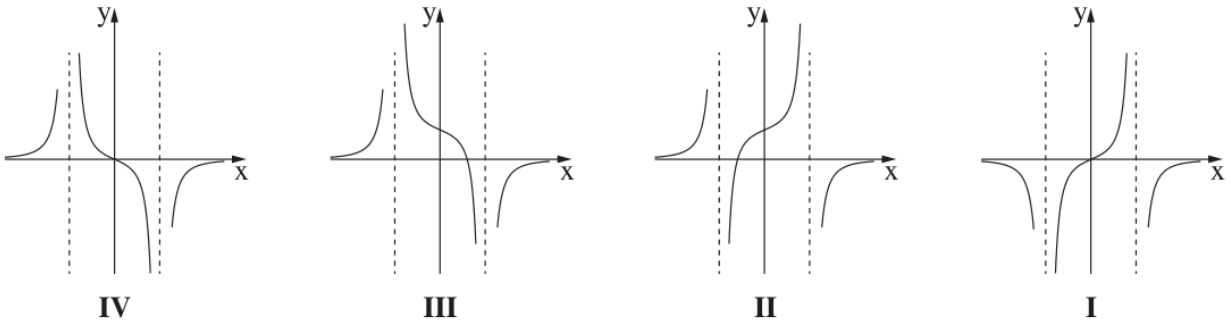
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמקו את תשובתכם.

ו. קבעו בעבור כל אחד מן ההיגדים (1)–(2) שלפניכם אם הוא נכון או לא נכון. נמקו את קביעותיכם.

(1) בכל נקודה בתחום $x>3$ שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ הוא חיובי.

(2) בכל נקודה בתחום $x<-3$ שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ הוא חיובי.



פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה אינו יכול להיות אפס: $x^2-9\neq 0$, כלומר $x\neq 3$ ו־$x\neq -3$.

תשובה: $x\neq \pm 3$

סעיף א (2)

אנכיות: המכנה מתאפס ב־$x=\pm 3$, והמונה $2x^2$ שם שווה ל־$18\neq 0$. לכן $x=3$ ו־$x=-3$.

אופקית: בשבר $\frac{2x^2}{x^2-9}$ החזקות הגבוהות שוות, והיחס בין המקדמים הוא $\frac{2}{1}=2$. לכן כאשר $x\to\pm\infty$:
$f(x)\to 2+4=6$, כלומר $y=6$.

תשובה: $x=3$, $x=-3$, $y=6$

סעיף ב

$$f'(x)=\frac{4x(x^2-9)-2x^2\cdot 2x}{(x^2-9)^2}=\frac{4x^3-36x-4x^3}{(x^2-9)^2}=\frac{-36x}{(x^2-9)^2}$$

נשווה לאפס: $-36x=0\Rightarrow x=0$, ו־$f(0)=0+4=4$.

המכנה חיובי, ולכן הסימן של $f'(x)$ הפוך לסימן של x:

x	$x<-3$	$-3<x<0$	0	$0<x<3$	$x>3$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	↗	↗	max	↘	↘

תשובה: מקסימום $(0,\ 4)$

סעיף ג

ציר ה־y: $f(0)=4$ – הנקודה $(0,4)$.

ציר ה־x:

$$\frac{2x^2}{x^2-9}+4=0\ \Rightarrow\ 2x^2=-4(x^2-9)\ \Rightarrow\ 6x^2=36\ \Rightarrow\ x^2=6$$

$x=\sqrt{6}\approx 2.45$ או $x=-\sqrt{6}\approx -2.45$.

תשובה: $(0,\ 4)$**,** $(\sqrt{6},\ 0)$**,** $(-\sqrt{6},\ 0)$

סעיף ד

סקיצה של f(x) עם אסימפטוטות x=±3 ו־y=6 ומקסימום ב־(0,4)

תשובה: ראו סקיצה בפתרון המלא.

סעיף ה

לפי סעיף ב:

• $f'(0)=0$ – גרף הנגזרת עובר דרך **ראשית הצירים**.

• בענף האמצעי ($-3<x<3$) הנגזרת חיובית משמאל לראשית ושלילית מימינה – הענף יורד דרך הראשית.

• בעבור $x<-3$ הנגזרת חיובית, ובעבור $x>3$ היא שלילית.

בגרף III הענף האמצעי חותך את ציר ה־x מימין לראשית (לא בה). בגרפים I ו־II הענף האמצעי עולה (שלילי משמאל לראשית וחיובי מימינה). רק גרף **IV** מתאים לכל התכונות.

תשובה: גרף IV

סעיף ו (1)

שיפוע המשיק הוא ערך הנגזרת. בתחום $x>3$ מתקיים $f'(x)=\frac{-36x}{(x^2-9)^2}<0$ (המונה שלילי והמכנה חיובי). לכן שיפוע המשיק **שלילי**, וההיגד **אינו נכון**.

תשובה: לא נכון – בתחום זה $f'(x)<0$.

סעיף ו (2)

בתחום $x<-3$: המונה $-36x>0$ (כי x שלילי) והמכנה חיובי, ולכן $f'(x)>0$ – שיפוע המשיק חיובי בכל נקודה. ההיגד **נכון**.

תשובה: נכון – בתחום זה $f'(x)>0$.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\sqrt{5-2x}+bx$, $b>0$ הוא פרמטר.

ידוע כי גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה $(-10\ ,\ 0)$.

א. מצאו את הערך של b .

הציבו $b=\frac{1}{2}$ בפונקצייה $f(x)$ וענו על סעיפים ב–ו.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ y .

ד. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה פונקצייה $g(x)$, המקיימת $g'(x)=-f(x)$. הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ו. מצאו את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון הפנימית של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה. נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

הנקודה $(-10,0)$ על הגרף. נציב:

$$\sqrt{5-2\cdot(-10)}+b\cdot(-10)=0\ \Rightarrow\ \sqrt{25}-10b=0\ \Rightarrow\ 5=10b\ \Rightarrow\ b=\frac{1}{2}$$

תשובה: $b=\frac{1}{2}$

סעיף ב

$f(x)=\sqrt{5-2x}+\frac{1}{2}x$. הביטוי בתוך השורש חייב להיות אי־שלילי:

$$5-2x\geq 0\ \Rightarrow\ x\leq 2.5$$

תשובה: $x\leq 2.5$

סעיף ג

$$f(0)=\sqrt{5}+0=\sqrt{5}\approx 2.24$$

תשובה: $(0,\ \sqrt{5})$

סעיף ד

$$f'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{5-2x}}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5-2x}}+\frac{1}{2}$$

נשווה לאפס (מוגדרת בעבור $x<2.5$):

$$\frac{1}{\sqrt{5-2x}}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \sqrt{5-2x}=2\ \Rightarrow\ 5-2x=4\ \Rightarrow\ x=0.5$$

$$f(0.5)=\sqrt{4}+0.25=2.25$$

בקצה התחום: $f(2.5)=0+1.25=1.25$.

x	$x<0.5$	0.5	$0.5<x<2.5$	2.5
$f'(x)$	$+$	0	$-$	

x	$x<-10$	-10	$-10<x<2.5$	2.5	$x>2.5$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	max	↘	min (קצה)	↗

(למשל $f'(-2)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}>0$, $f'(2)=-1+\frac{1}{2}<0$.)

תשובה: מקסימום $(0.5,\ 2.25)$**, מינימום (קצה)** $(2.5,\ 1.25)$

סעיף ה

נסמן את נקודת החיתוך עם ציר ה־x $(-10,0)$ (מסעיף א), את $(0,\sqrt{5})$, את המקסימום $(0.5,\ 2.25)$ ואת נקודת הקצה $(2.5,\ 1.25)$:

סקיצה של f(x): עולה עד (0.5,2.25) ויורדת עד (2.5,1.25)

תשובה: ראו סקיצה בפתרון המלא.

סעיף ו

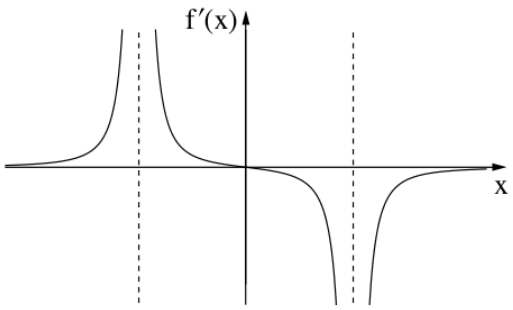
$g'(x)=-f(x)$, ולכן $g'(x)=0$ כאשר $f(x)=0$, כלומר רק ב־$x=-10$ (נקודת החיתוך היחידה של f עם ציר ה־x).

לפי הסקיצה: בעבור $x<-10$ מתקיים $f(x)<0$, ולכן $g'(x)>0$; בעבור $-10<x<2.5$ מתקיים $f(x)>0$, ולכן $g'(x)<0$.

x	$x<-10$	-10	$-10<x<2.5$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	max	↘

תשובה: $x=-10$ **– נקודת מקסימום.**

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 6



6. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq \pm 4$.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת באותו התחום.

גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה־x רק בנקודה $(0, 0)$.

א. מצאו את שיעור ה־x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה היא $y = 2$.

אחד מן הביטויים I–III שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

I. $\frac{x^2}{x^2+16}+1$ **II.** $\frac{x^2}{x^2-16}+2$ **III.** $\frac{x^2}{x^2-16}+1$

ג. קבעו איזה מן הביטויים I–III מייצג את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

ד. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־x ועל ידי הישר $x = 2$.

פתרון מלא

סעיף א

נקודת קיצון של $f(x)$ יכולה להיות רק במקום שבו $f'(x) = 0$ (בתוך התחום). לפי הנתון $f'(x) = 0$ רק בנקודה $x = 0$.

מהגרף של $f'(x)$ בסביבת $x = 0$: משמאל ל־0 (בין -4 ל־0) הגרף מעל ציר ה־x, כלומר $f'(x) > 0$, ומימין ל־0 (בין 0 ל־4) הגרף מתחת לציר ה־x, כלומר $f'(x) < 0$.

הפונקציה עולה לפני $x = 0$ ויורדת אחריו, ולכן ב־$x = 0$ יש נקודת מקסימום.

תשובה: $x = 0$, נקודת מקסימום.

סעיף ב

הפונקציה עולה כאשר $f'(x) > 0$ (הגרף של f' מעל ציר ה־x) ויורדת כאשר $f'(x) < 0$ (הגרף מתחת לציר ה־x). צריך להתחשב גם בנקודות שאינן בתחום, $x = \pm 4$:

תחום	$x < -4$	$-4 < x < 0$	$0 < x < 4$	$x > 4$
סימן $f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	עולה	עולה	יורדת	יורדת

תשובה: עלייה: $x < -4$, $-4 < x < 0$; ירידה: $0 < x < 4$, $x > 4$.

סעיף ג

ביטוי I אינו מתאים: המכנה $x^2 + 16$ אף פעם אינו מתאפס, ולכן הפונקציה מוגדרת לכל x – אבל נתון שהתחום הוא $x \neq \pm 4$.

ביטויים II ו־III מוגדרים בתחום $x \neq \pm 4$ (כי $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$). נבדוק את האסימפטוטה האופקית: כאשר $x \to \pm\infty$, הביטוי $\frac{x^2}{x^2-16}$ שואף ל־1 (המקדמים של x^2 במונה ובמכנה שווים).

בביטוי II: $y \to 1 + 2 = 3$, כלומר אסימפטוטה $y = 3$ – לא מתאים.

בביטוי III: $y \to 1 + 1 = 2$, כלומר אסימפטוטה $y = 2$ – מתאים.

(בדיקה: לביטוי III $f'(x) = \frac{2x(x^2-16) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-16)^2} = \frac{-32x}{(x^2-16)^2}$, ואכן $f'(x) = 0$ רק ב־$x = 0$, חיובית ל־$x < 0$ ושלילית ל־$x > 0$, כמו בגרף.)

תשובה: ביטוי III: $f(x) = \frac{x^2}{x^2-16} + 1$

סעיף ד

חיתוך עם ציר ה־y ($x = 0$):

$$f(0) = \frac{0}{0 - 16} + 1 = 1 \;\Rightarrow\; (0, 1)$$

חיתוך עם ציר ה־x ($f(x) = 0$):

$$\frac{x^2}{x^2 - 16} + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{x^2 - 16} = -1$$
$$x^2 = -(x^2 - 16) \;\Rightarrow\; 2x^2 = 16 \;\Rightarrow\; x^2 = 8 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{8}$$

(שני הערכים בתחום, כי $\pm\sqrt{8} \neq \pm 4$.)

תשובה: $(0, 1)$**,** $(\sqrt{8}, 0)$**,** $(-\sqrt{8}, 0)$

סעיף ה

נאסוף את מה שמצאנו: אסימפטוטות אנכיות $x = \pm 4$, אסימפטוטה אופקית $y = 2$, מקסימום ב־$(0, 1)$ ($f(0) = 1$), חיתוך עם ציר ה־x ב־$x = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2.83$, ותחומי העלייה והירידה מסעיף ב.

סקיצה של גרף הפונקציה עם אסימפטוטות x=-4, x=4 ו־y=2

שימו לב: משמאל ל־$x = -4$ הפונקציה עולה ומתקרבת לאסימפטוטה $y = 2$ מלמעלה כאשר $x \to -\infty$, ובין -4 ל־4 הגרף הוא „כיפה" הפוכה עם מקסימום ב־$(0, 1)$.

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ו

הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה־x ב־$x = 0$. בין $x = 0$ ל־$x = 2$ הגרף של $f'(x)$ נמצא **מתחת** לציר ה־x, ולכן השטח הוא מינוס האינטגרל:

$$S = -\int_0^2 f'(x)\,dx$$

הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)$, ולכן:

$$\int_0^2 f'(x)\,dx = f(2) - f(0)$$
$$f(2) = \frac{4}{4 - 16} + 1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}, \qquad f(0) = 1$$
$$\int_0^2 f'(x)\,dx = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; S = \frac{1}{3}$$

תשובה: $\frac{1}{3}$ יחידות שטח.

בגרות חורף תשפ״ד (2024) • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{-2x+10}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = f(x) - c$, c הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

גרף הפונקצייה $g(x)$ משיק לישר $y = 20$.

ה. מצאו את הערך של c.

פתרון מלא

סעיף א

ביטוי בתוך שורש ריבועי חייב להיות אי־שלילי:

$$-2x+10 \geq 0 \;\Rightarrow\; -2x \geq -10 \;\Rightarrow\; x \leq 5$$

תשובה: $x \leq 5$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$): $f(0) = 0^2 \cdot \sqrt{10} = 0$, כלומר $(0,0)$.

חיתוך עם ציר ה־x ($f(x)=0$): מכפלה שווה לאפס כאשר אחד הגורמים שווה לאפס:

$$x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \qquad\qquad \sqrt{-2x+10} = 0 \;\Rightarrow\; -2x+10 = 0 \;\Rightarrow\; x = 5$$

שני הערכים בתחום.

תשובה: $(0,0)$, $(5,0)$

סעיף ג

נגזור לפי כלל המכפלה (והנגזרת של שורש: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$):

$$f'(x) = 2x \cdot \sqrt{-2x+10} + x^2 \cdot \frac{-2}{2\sqrt{-2x+10}} = 2x\sqrt{-2x+10} - \frac{x^2}{\sqrt{-2x+10}}$$

נכנס למכנה משותף:

$$f'(x) = \frac{2x(-2x+10) - x^2}{\sqrt{-2x+10}} = \frac{-5x^2+20x}{\sqrt{-2x+10}} = \frac{-5x(x-4)}{\sqrt{-2x+10}}$$

$f'(x) = 0$ כאשר המונה מתאפס: $-5x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ או $x = 4$ (הנגזרת אינה מוגדרת ב־ $x = 5$, קצה התחום).

טבלת סימנים (המכנה תמיד חיובי, לכן הסימן נקבע לפי המונה):

x	$0\ x<0$		$0<x<4\ 4$		$4<x<5\ 5$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	יורדת	מינימום	עולה	מקסימום	יורדת

מינימום (קצה)

נחשב את שיעורי ה־y:

$$f(0)=0, \qquad f(4)=16\cdot\sqrt{-8+10}=16\sqrt{2}\approx 22.63, \qquad f(5)=25\cdot 0=0$$

תשובה: $(0,0)$ **מינימום,** $(4,16\sqrt{2})$ **מקסימום,** $(5,0)$ **מינימום (קצה).**

סעיף ד

לפי הסעיפים הקודמים: התחום $x\le 5$, הפונקציה יורדת עד $(0,0)$, עולה עד המקסימום $(4,16\sqrt{2})\approx(4,22.63)$ ויורדת עד נקודת הקצה $(5,0)$.

סקיצה של גרף הפונקציה: מינימום בראשית, מקסימום ב־x=4 וקצה ב־(5,0)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה

הגרף של $g(x)=f(x)-c$ הוא הגרף של $f(x)$ מוזז c יחידות **למטה**. לכן לפונקציה $g(x)$ אותן נקודות קיצון בשיעורי ה־x, ושיעורי ה־y קטנים ב־c: מינימום $(0,-c)$ ומקסימום $(4,\ 16\sqrt{2}-c)$.

ישר אופקי $y=20$ משיק לגרף בנקודת קיצון. הוא אינו יכול להשיק במינימום, כי $-c<0<20$. לכן הוא משיק במקסימום:

$$16\sqrt{2}-c=20\ \Rightarrow\ c=16\sqrt{2}-20\approx 2.63$$

אכן $c>0$, כנדרש.

תשובה: $c=16\sqrt{2}-20\approx 2.63$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{9-4x^2}{1-x^2}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ג. נתונה הפונקצייה $g(x)$ המקיימת $g'(x)=f(x)$. לפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ יש אותו תחום הגדרה.
מצאו את שיעורי ה־x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן. נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה אינו יכול להיות 0:

$$1-x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=1 \;\Rightarrow\; x=\pm 1$$

תשובה: $x\neq \pm 1$

סעיף א (2)

אסימפטוטות אנכיות: בנקודות $x=\pm 1$ המכנה מתאפס והמונה אינו מתאפס ($9-4\cdot 1=5\neq 0$), ולכן $x=1$ ו־$x=-1$ הן אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטה אופקית: החזקה הגבוהה במונה ובמכנה שווה (x^2), ולכן כאשר $x\to\pm\infty$ הפונקציה שואפת ליחס המקדמים של x^2:

$$y=\frac{-4}{-1}=4$$

תשובה: $x=1$, $x=-1$, $y=4$

סעיף א (3)

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$): $f(0)=\frac{9}{1}=9$, כלומר $(0,9)$.

חיתוך עם ציר ה־x ($f(x)=0$, כלומר המונה מתאפס):

$$9-4x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{9}{4} \;\Rightarrow\; x=\pm 1.5$$

תשובה: $(0,9)$, $(1.5,0)$, $(-1.5,0)$

סעיף א (4)

נגזור לפי כלל המנה:

$$f'(x)=\frac{-8x(1-x^2)-(9-4x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{-8x+8x^3+18x-8x^3}{(1-x^2)^2}=\frac{10x}{(1-x^2)^2}$$

$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 10x=0 \;\Rightarrow\; x=0$. המכנה תמיד חיובי, ולכן סימן הנגזרת כסימן $10x$:

x	$x<-1$	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	$x>1$
$-f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	יורדת	יורדת	מינימום	עולה	עולה

$f(0)=9$.

תשובה: $(0,9)$ נקודת מינימום.

סעיף א (5)

לפי טבלת הסימנים בסעיף א (4) (בלי הנקודות $x=\pm1$ שאינן בתחום):

תשובה: עלייה: $0<x<1$, $x>1$; **ירידה:** $x<-1$, $-1<x<0$.

סעיף ב

נאסוף: אסימפטוטות $x=\pm1$ ו־$y=4$, מינימום $(0,9)$, חיתוכים $(\pm1.5,0)$, ותחומי העלייה והירידה.

סקיצה של גרף הפונקציה עם אסימפטוטות x=1, x=-1, y=4 ומינימום ב־(0,9)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ג

$g'(x)=f(x)$, ולכן נקודות הקיצון של $g(x)$ הן הנקודות שבהן $f(x)=0$ ו־$f(x)$ מחליפה סימן – כלומר מהסקיצה של f: $x=\pm1.5$.

סימן $f(x)$ (= סימן $g'(x)$) לפי הסקיצה:

x	$x<-1.5$	-1.5	$-1.5<x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<1.5$	1.5	$x>1.5$
$g'(x)=f(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$-$	0	$+$
$g(x)$	עולה	מקסימום	יורדת	עולה	יורדת	מינימום	עולה

גם ב־$x=\pm1$ הסימן של f משתנה, אבל נקודות אלה אינן בתחום ההגדרה של $g(x)$ (לשתי הפונקציות אותו תחום), ולכן אין בהן נקודות קיצון.

תשובה: $x=-1.5$ מקסימום, $x=1.5$ מינימום.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{2x+10}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

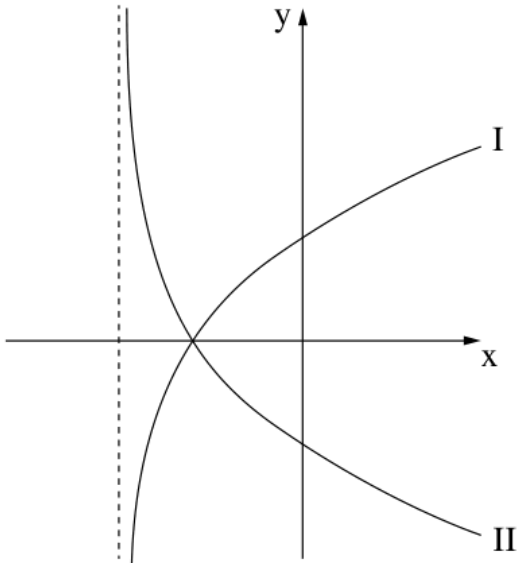
ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

בסוף השאלה מופיעים שני גרפים, I–II . אחד מן הגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$, והגרף האחר מתאר את הפונקצייה $g(x)=-f'(x)$.

ה. קבעו איזה מן הגרפים I–II מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמקו את קביעתכם.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x=3$ ועל ידי ציר ה־ x .



פתרון מלא

סעיף א

הביטוי בתוך השורש חייב להיות אי־שלילי:

$$2x+10\geq 0\ \Rightarrow\ x\geq -5$$

תשובה: $x\geq -5$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$): $f(0)=(0-1)\cdot\sqrt{10}=-\sqrt{10}$, כלומר $(0,-\sqrt{10})$.

חיתוך עם ציר ה־x ($f(x)=0$): מכפלה שווה לאפס כאשר אחד הגורמים שווה לאפס:

$$2x+10=0\ \Rightarrow\ x=-5 \qquad x-1=0\ \Rightarrow\ x=1$$

תשובה: $(-5,0)$, $(1,0)$, $(0,-\sqrt{10})$

סעיף ג

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x+10} + (x-1) \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+10}} = \sqrt{2x+10} + \frac{x-1}{\sqrt{2x+10}}$$
$$f'(x) = \frac{2x+10+x-1}{\sqrt{2x+10}} = \frac{3x+9}{\sqrt{2x+10}}$$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 3x+9 = 0 \;\Rightarrow\; x = -3$. המכנה חיובי לכל $x > -5$:

x	-5		-3		$x > -3$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		מקסימום (קצה) יורדת		מינימום עולה	

$$f(-5) = -6 \cdot 0 = 0, \qquad f(-3) = (-3-1) \cdot \sqrt{-6+10} = -4 \cdot 2 = -8$$

הנקודה $(-5, 0)$ היא נקודת קצה של התחום, והפונקציה יורדת מיד אחריה – לכן זו נקודת מקסימום (קצה).

תשובה: $(-3, -8)$ מינימום, $(-5, 0)$ מקסימום (קצה).

סעיף ד

סקיצה של גרף הפונקציה מנקודת הקצה (-5,0), דרך המינימום (-3,-8), ועולה

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה

מסעיף ג: $f'(x) < 0$ בתחום $-5 < x < -3$, $f'(x) > 0$ בתחום $x > -3$, ו־$f'(x) = 0$ ב־$x = -3$.

גרף I נמצא מתחת לציר ה־x משמאל לנקודת החיתוך ומעליו מימין לה – בדיוק כמו $f'(x)$. גרף II הפוך (מעל הציר משמאל ומתחתיו מימין), והוא מתאר את $g(x) = -f'(x)$.

(אפשר לנמק גם כך: $f(x)$ יורדת ואחר כך עולה, ולכן הנגזרת שלילית ואחר כך חיובית.)

תשובה: גרף I מתאר את $f'(x)$.

סעיף ו

הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה־x ב־$x = -3$, ובין $x = -3$ ל־$x = 3$ הוא מעל ציר ה־x. לכן:

$$S = \int_{-3}^{3} f'(x)\,dx = f(3) - f(-3)$$

(כי $f(x)$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)$.)

$$f(3) = (3-1) \cdot \sqrt{6+10} = 2 \cdot 4 = 8, \qquad f(-3) = -8$$
$$S = 8 - (-8) = 16$$

תשובה: 16 יחידות שטח.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה: $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$?

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

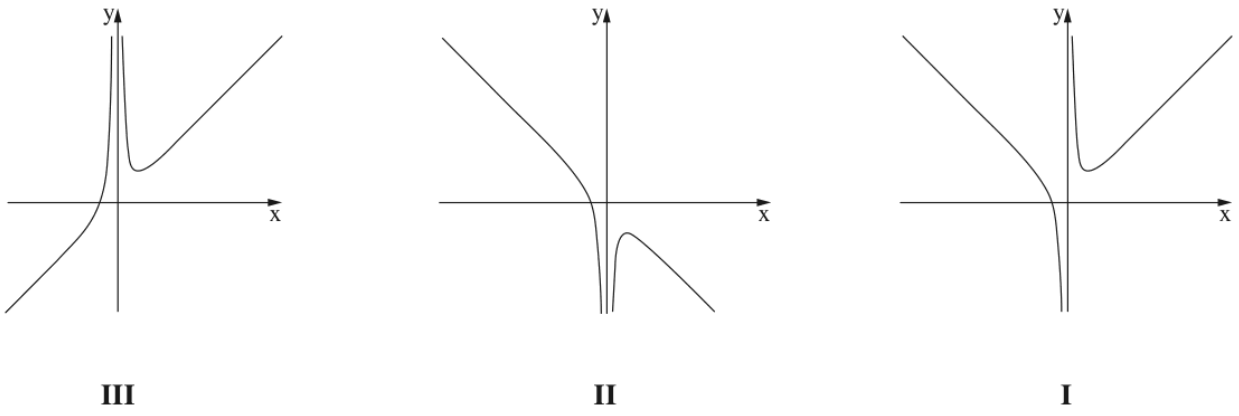
בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ג. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ד. אחד מן הגרפים I-III בסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי הישר $x = 1$, על ידי הישר $x = 2$ ועל ידי ציר ה־ x .



III II I

פתרון מלא

סעיף א

המכנה x^2 אינו יכול להיות 0, ולכן $x \neq 0$.

תשובה: $x \neq 0$

סעיף ב

נציב $f(x) = 0$ ונכפיל ב־x^2 (מותר, כי $x \neq 0$):

$$x + \frac{4}{x^2} = 0 \;\; / \cdot x^2 \;\Rightarrow\; x^3 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = -4$$
$$x = \sqrt[3]{-4} \approx -1.59$$

תשובה: $(-1.59,\ 0)$

סעיף ג

נכתוב $f(x) = x + 4x^{-2}$ ונגזור:

$$f'(x) = 1 - 8x^{-3} = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$
$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = 8 \;\Rightarrow\; x = 2, \qquad f(2) = 2 + \frac{4}{4} = 3$$

x	$x<0$	$0<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	עולה	יורדת	מינימום	עולה

(למשל: $f'(-1)=1+8=9>0$, $f'(1)=1-8=-7<0$, $f'(3)=1-\frac{8}{27}>0$.)

תשובה: $(2,3)$ **נקודת מינימום.**

סעיף ד

נבדוק את התכונות שמצאנו מול הגרפים:

• יש נקודת מינימום ב־$x=2>0$ (מימין לציר ה־y) – בגרף II אין מינימום מימין לציר ה־y, ולכן הוא נפסל.

• בתחום $x<0$ הפונקציה **עולה** וחותכת את ציר ה־x ב־$x\approx -1.59$. בגרף I הפונקציה יורדת משמאל לציר ה־y, ולכן הוא נפסל.

• בגרף III: עולה משמאל, חותך את ציר ה־x בערך שלילי, שואף ל־$+\infty$ משני צידי האסימפטוטה $x=0$ (כי $\frac{4}{x^2}>0$), ויש לו מינימום מימין לציר ה־y – מתאים.

תשובה: גרף III.

סעיף ה

בתחום $1\le x\le 2$ הפונקציה חיובית ($x>0$ ו־$\frac{4}{x^2}>0$), ולכן הגרף מעל ציר ה־x:

$$S=\int_1^2\left(x+\frac{4}{x^2}\right)dx=\int_1^2\left(x+4x^{-2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{x}\right]_1^2$$

$$S=\left(\frac{4}{2}-\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-4\right)=0-(-3.5)=3.5$$

תשובה: 3.5 **יחידות שטח.**

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{2x+b}$, b הוא פרמטר.

ידוע כי גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה $(8\,,0)$ בלבד.

א. מצאו את b .

הציבו $b=9$ וענו על הסעיפים **ב–ד**.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

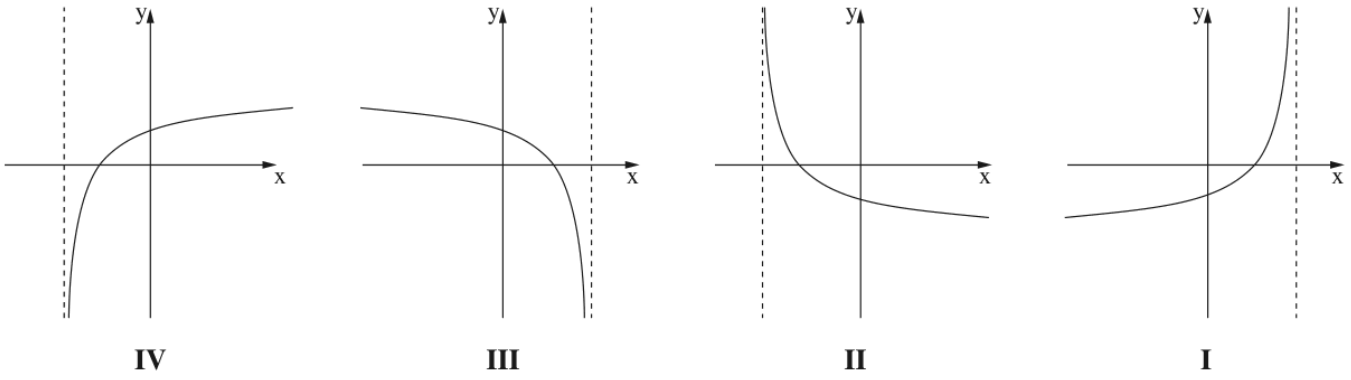
ג. **(1)** מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ y .

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ד. אחד מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



פתרון מלא

סעיף א

הנקודה $(8,0)$ נמצאת על גרף הפונקציה, ולכן $f(8)=0$:

$$1+\frac{1}{2}\cdot 8-\sqrt{2\cdot 8+b}=0 \;\Rightarrow\; 5=\sqrt{16+b}$$

נעלה בריבוע:

$$25=16+b \;\Rightarrow\; b=9$$

בדיקה (חובה אחרי העלאה בריבוע): $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ ✓

תשובה: $b=9$

סעיף ב

עם $b=9$: $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{2x+9}$. הביטוי בתוך השורש חייב להיות אי־שלילי:

$$2x+9\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq -4.5$$

תשובה: $x\geq -4.5$

סעיף ג (1)

נגזור (הנגזרת של $\sqrt{2x+9}$ היא $\frac{1}{\sqrt{2x+9}}$ $=\frac{2}{2\sqrt{2x+9}}$):

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2x+9}}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2x+9}}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{2x+9}=2 \;\Rightarrow\; 2x+9=4 \;\Rightarrow\; x=-2.5$$

(בדיקה: $\sqrt{2\cdot(-2.5)+9}=\sqrt{4}=2$ ✓)

x	$x<-4.5$	-4.5	$-4.5<x<-2.5$	-2.5	$x>-2.5$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	עולה	מקסימום (קצה)	יורדת		מינימום

(למשל $f'(-4)=\frac{1}{2}-1<0$, $f'(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}>0$.)

$$f(-4.5)=1-2.25-0=-1.25, \qquad f(-2.5)=1-1.25-\sqrt{4}=-2.25,$$

תשובה: $(-2.5,-2.25)$ **מינימום,** $(-4.5,-1.25)$ **מקסימום (קצה).**

סעיף ג (2)

$$f(0)=1+0-\sqrt{9}=1-3=-2$$

תשובה: $(0,-2)$

סעיף ג (3)

נקודת קצה $(-4.5,-1.25)$, מינימום $(-2.5,-2.25)$, חיתוך עם ציר ה־y ב־$(0,-2)$, וחיתוך יחיד עם ציר ה־x ב־$(8,0)$.

סקיצה של גרף הפונקציה מנקודת הקצה (-4.5,-1.25), דרך המינימום (-2.5,-2.25), ועולה דרך (8,0)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ד

נבדוק את תכונות הנגזרת $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2x+9}}$:

• היא מוגדרת רק בעבור $x>-4.5$, וכאשר x מתקרב ל־-4.5 המכנה $\sqrt{2x+9}$ שואף ל־0, ולכן $f'(x)\to-\infty$: אסימפטוטה אנכית $x=-4.5$ שהגרף יורד לאורכה **למטה**.

• $f'(x)<0$ בתחום $-4.5<x<-2.5$ ו־$f'(x)>0$ בעבור $x>-2.5$, כלומר הגרף חותך את ציר ה־x בנקודה שלילית $(-2.5,0)$, משמאל לציר ה־y.

רק בגרף IV האסימפטוטה האנכית משמאל, הגרף מתחיל ב־$-\infty$, עולה וחותך את ציר ה־x משמאל לציר ה־y.

תשובה: גרף IV.

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{5x}{x^2+4}+1$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

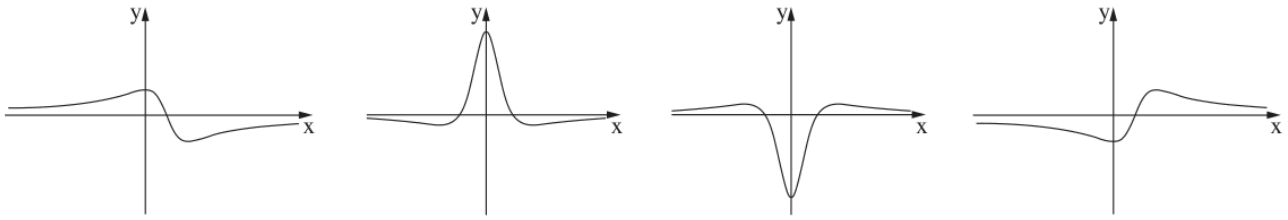
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=2\cdot f(x)$.

ה. אחד מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

ו. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$, על ידי הישר $x=1$ ועל ידי הצירים.



IV III II I

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה x^2+4 תמיד חיובי (לפחות 4), ולכן אף פעם אינו מתאפס.

תשובה: כל x.

סעיף א (2)

אסימפטוטות אנכיות: אין, כי המכנה אינו מתאפס.

אסימפטוטה אופקית: החזקה במונה (x) קטנה מהחזקה במכנה (x^2), ולכן כאשר $x\to\pm\infty$ השבר $\frac{5x}{x^2+4}$ שואף ל־0 ו־$f(x)\to 0+1=1$.

תשובה: $y=1$ (אין אסימפטוטות אנכיות).

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y: $f(0)=0+1=1$, כלומר $(0,1)$.

חיתוך עם ציר ה־x ($f(x)=0$):

$$\frac{5x}{x^2+4}+1=0\ \ /\cdot(x^2+4)\ \Rightarrow\ 5x+x^2+4=0$$

$$x^2+5x+4=0\ \Rightarrow\ (x+1)(x+4)=0\ \Rightarrow\ x=-1\ \text{ or }\ x=-4$$

תשובה: $(0,1)$, $(-1,0)$, $(-4,0)$

סעיף ג

נגזור לפי כלל המנה:

$$f'(x)=\frac{5(x^2+4)-5x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{20-5x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{5(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$$
$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ 4-x^2=0\ \Rightarrow\ x=\pm 2$$

x	$x<-2$	-2	$-2<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	יורדת	מינימום	עולה	מקסימום	יורדת

$$f(-2)=\frac{-10}{8}+1=-0.25,\qquad f(2)=\frac{10}{8}+1=2.25$$

תשובה: $(-2,-0.25)$ **מינימום,** $(2,2.25)$ **מקסימום.**

סעיף ד

סקיצה של גרף הפונקציה עם אסימפטוטה y=1, מינימום (-2,-0.25) ומקסימום (2,2.25)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה

$g(x)=2f(x)$, ולכן $g'(x)=2f'(x)=\frac{10(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$.

• $g'(x)>0$ בתחום $-2<x<2$ ו־$g'(x)<0$ בעבור $x<-2$ ו־$x>2$: הגרף מעל ציר ה־x באמצע ומתחתיו בשני הצדדים.

• $g'(0)=\frac{40}{16}=2.5>0$: הגרף חותך את ציר ה־$y$ בערך חיובי.

• $g'(x)$ היא פונקציה זוגית ($g'(-x)=g'(x)$), כלומר הגרף סימטרי ביחס לציר ה־y.

רק גרף III מתאים: „הר" סימטרי עם שיא חיובי על ציר ה־y, ומתחת לציר ה־x בצדדים. (גרף II הפוך – שלילי באמצע; גרפים I ו־IV אינם סימטריים ומתאפסים בראשית.)

תשובה: גרף III.

סעיף ו

בין $x=0$ ל־$x=1$ מתקיים $g'(x)>0$ (סעיף ה), כלומר הגרף מעל ציר ה־x. הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה קדומה של $g'(x)$:

$$S=\int_0^1 g'(x)\,dx=g(1)-g(0)=2f(1)-2f(0)$$
$$f(1)=\frac{5}{5}+1=2,\qquad f(0)=1$$
$$S=2\cdot 2-2\cdot 1=2$$

תשובה: 2 **יחידות שטח.**

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{4x + 20}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = f(x) + c$. c הוא פרמטר.

נתון כי הישר $y = 12$ משיק לגרף הפונקצייה $g(x)$.

ה. מצאו את c (ציינו את שתי האפשרויות).

פתרון מלא

סעיף א

הביטוי בתוך השורש חייב להיות אי־שלילי:

$$4x + 20 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -5$$

תשובה: $x \geq -5$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y: $f(0) = 0 \cdot \sqrt{20} = 0$, כלומר $(0, 0)$.

חיתוך עם ציר ה־x: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, או $\sqrt{4x + 20} = 0 \Rightarrow x = -5$.

תשובה: $(0, 0)$, $(-5, 0)$

סעיף ג

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = 2x\sqrt{4x + 20} + x^2 \cdot \frac{4}{2\sqrt{4x + 20}} = 2x\sqrt{4x + 20} + \frac{2x^2}{\sqrt{4x + 20}}$$

$$f'(x) = \frac{2x(4x + 20) + 2x^2}{\sqrt{4x + 20}} = \frac{10x^2 + 40x}{\sqrt{4x + 20}} = \frac{10x(x + 4)}{\sqrt{4x + 20}}$$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ או $x = -4$.

x	-5	$-5 < x < -4$	-4	$-4 < x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	מינימום (קצה)	עולה		מקסימום	יורדת	מינימום עולה

$$f(-5) = 0, \qquad f(-4) = 16 \cdot \sqrt{4} = 32, \qquad f(0) = 0$$

תשובה: $(-5, 0)$ **מינימום (קצה),** $(-4, 32)$ **מקסימום,** $(0, 0)$ **מינימום.**

סעיף ד

סקיצה של גרף הפונקציה מנקודת הקצה (-5,0), מקסימום (-4,32), מינימום (0,0)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה

הגרף של $g(x) = f(x) + c$ הוא הגרף של $f(x)$ מוזז c יחידות בכיוון האנכי, ולכן נקודות הקיצון הפנימיות שלו הן $(-4,\ 32 + c)$ (מקסימום) ו־$(0,\ c)$ (מינימום).

ישר אופקי משיק לגרף בנקודת קיצון שבה הנגזרת מתאפסת. יש שתי אפשרויות:

הישר $y = 12$ משיק במקסימום: $32 + c = 12 \ \Rightarrow \ c = -20$.

הישר $y = 12$ משיק במינימום: $0 + c = 12 \ \Rightarrow \ c = 12$.

תשובה: $c = 12$ **או** $c = -20$

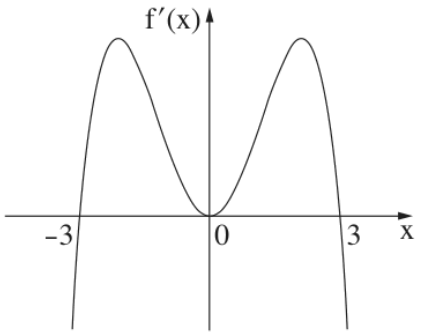
בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 8

8. הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות לכל x.

לפניכם סרטוט של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתון: פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מתאפסת בנקודות שבהן

$x=3$, $x=0$, $x=-3$ בלבד, כמתואר בסרטוט.



א. **(1)** מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מה הם שיעורי ה־x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, ומהו סוגן? נמקו.

ב. אחד מן הגרפים I–III שבסוף השאלה מתאר את גרף הפונקצייה $f(x)$.

קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

ג. נתון כי גרף הפונקצייה $f(x)$ עובר דרך ראשית הצירים.

נסמן ב- S_1 את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי הישר $x=-3$ ועל ידי ציר ה־x בתחום $-3\le x\le 0$.

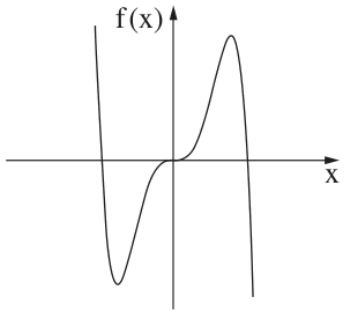
נסמן ב- S_2 את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי הישר $x=3$ ועל ידי ציר ה־x בתחום $0\le x\le 3$.

האם מתקיים: $S_1+S_2=\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$?

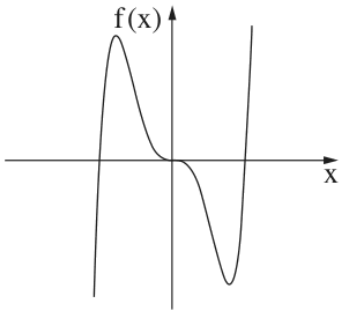
נמקו את קביעתכם.

ד. נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x-4)$.

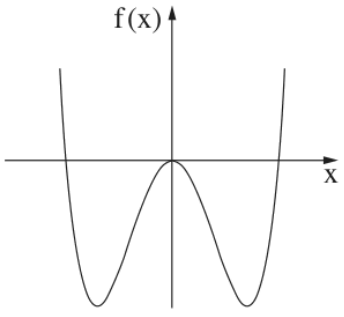
מה הם שיעורי ה־x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, ומהו סוגן? נמקו.



III



II



I

פתרון מלא

סעיף א (1)

הפונקציה עולה כאשר $f'(x)>0$ (גרף הנגזרת מעל ציר ה־x) ויורדת כאשר $f'(x)<0$ (מתחת לציר ה־x). מהסרטוט:

x	$x<-3$	-3	$-3<x<0$	0	$0<x<3$	3	$x>3$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	יורדת	מינימום	עולה		עולה	מקסימום	יורדת

ב־$x=0$ הנגזרת מתאפסת אבל אינה מחליפה סימן (חיובית משני הצדדים), ולכן הפונקציה עולה בכל התחום $-3<x<3$.

תשובה: עלייה: $-3<x<3$; ירידה: $x<-3$, $x>3$.

סעיף א (2)

לפי הטבלה בסעיף א (1):

• ב־$x=-3$ הנגזרת עוברת משלילית לחיובית – הפונקציה יורדת ואז עולה: **מינימום**.

• ב־$x=3$ הנגזרת עוברת מחיובית לשלילית – הפונקציה עולה ואז יורדת: **מקסימום**.

• ב־$x=0$ הנגזרת מתאפסת אבל לא מחליפה סימן, ולכן אין שם נקודת קיצון.

תשובה: $x=-3$ מינימום, $x=3$ מקסימום.

סעיף ב

לפי סעיף א, גרף $f(x)$ צריך: לרדת עד נקודת מינימום משמאל לציר ה־y, לעלות (עם נקודה „שטוחה" ב־$x=0$, שבה המשיק אופקי) עד נקודת מקסימום מימין לציר ה־y, ואחר כך לרדת.

גרף I – שתי נקודות מינימום ומקסימום ב־$x=0$ – אינו מתאים. גרף II – מקסימום משמאל ומינימום מימין – הפוך. גרף III מתאים.

תשובה: גרף III.

סעיף ג

$f(0)=0$ (הגרף עובר בראשית), והפונקציה עולה בתחום $-3<x<3$. לכן:

• בתחום $-3\le x<0$: $f(x)<f(0)=0$ – הגרף **מתחת** לציר ה־x, ולכן $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx=-S_1$.

• בתחום $0<x\le 3$: $f(x)>0$ – הגרף **מעל** ציר ה־x, ולכן $\int_{0}^{3} f(x)\,dx=S_2$.

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=\int_{-3}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{3} f(x)\,dx=-S_1+S_2$$

זה שווה ל־S_1+S_2 רק אם $S_1=0$, וזה לא המצב ($S_1>0$). לכן השוויון אינו מתקיים.

תשובה: לא – האינטגרל שווה ל־S_2-S_1, כי בתחום $-3\le x\le 0$ הגרף מתחת לציר ה־x.

סעיף ד

הגרף של $g(x)=f(x-4)$ הוא הגרף של $f(x)$ מוזז 4 יחידות **ימינה**. לכן כל נקודה זזה ב־4 בכיוון ציר ה־x, וסוג נקודות הקיצון נשמר:

מינימום: $x=-3+4=1$. מקסימום: $x=3+4=7$.

(בדיקה: $g'(x)=f'(x-4)$, ו־$f'(x-4)=0$ כאשר $x-4=-3$ או $x-4=3$.)

תשובה: $x=1$ מינימום, $x=7$ מקסימום.

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{2x-b}{x-4}+1$. b הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה־ y בנקודה $(0\ ,\ 2.5)$.

ב. מצאו את b .

הציבו את הערך של b שמצאתם בסעיף **ב** בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים **ג–ז**.

ג. מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

ד. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

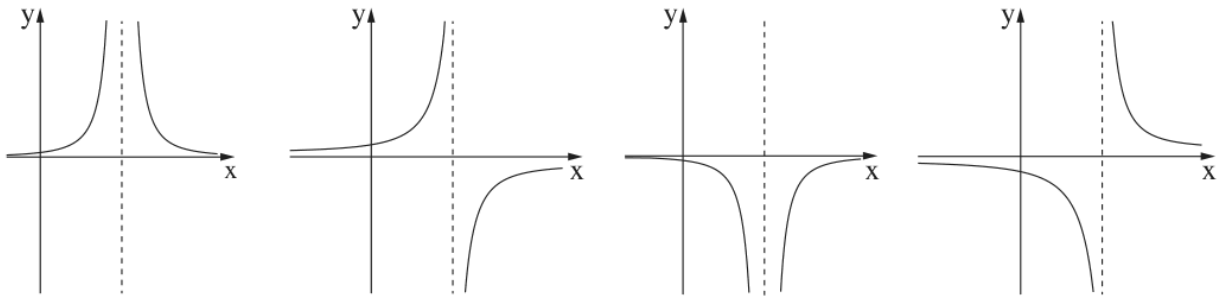
ה. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ז. **(1)** אחד מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x=1$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי ציר ה־ y .



I II III IV

פתרון מלא

סעיף א

$$x-4\neq 0\ \Rightarrow\ x\neq 4$$

תשובה: $x\neq 4$

סעיף ב

$$f(0)=\frac{-b}{-4}+1=\frac{b}{4}+1=2.5\ \Rightarrow\ \frac{b}{4}=1.5\ \Rightarrow\ b=6$$

תשובה: $b=6$

סעיף ג

$f(x)=\frac{2x-6}{x-4}+1=\frac{2x-6+x-4}{x-4}=\frac{3x-10}{x-4}$.

אנכית: $x=4$ (המונה $3\cdot 4-10=2\neq 0$). אופקית: מונה ומכנה מאותה מעלה, $y=\frac{3}{1}=3$.

תשובה: $x=4$, $y=3$

סעיף ד

עם ציר ה־y: $(0,\ 2.5)$ (נתון). עם ציר ה־x:

$$3x - 10 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{10}{3}$$

תשובה: $\left(\frac{10}{3},\ 0\right)$, $(0,\ 2.5)$

סעיף ה

$$f'(x) = \frac{2(x-4) - (2x-6)\cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{-2}{(x-4)^2}$$

המכנה חיובי תמיד, ולכן $f'(x) < 0$ בכל תחום ההגדרה – הפונקציה יורדת.

תשובה: יורדת ב־$x < 4$ וב־$x > 4$.

סעיף ו

סקיצה של f(x)=(3x-10)/(x-4): אסימפטוטות x=4, y=3

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ז (1)

$f'(x) = \frac{-2}{(x-4)^2}$ שלילית בכל תחום ההגדרה (הגרף כולו מתחת לציר ה־x), יש לה אסימפטוטה אנכית $x = 4$ ומשני צדיה $f'(x) \to -\infty$.

הגרף המתאים הוא II.

תשובה: גרף II.

סעיף ז (2)

בתחום $0 \le x \le 1$ הגרף של f' מתחת לציר ה־x, ולכן השטח הוא מינוס האינטגרל:

השטח בין גרף f'(x), ציר x, ציר y והישר x=1

$$S = -\int_0^1 f'(x)\,dx = -\big(f(1) - f(0)\big) = f(0) - f(1) = 2.5 - \frac{-7}{-3} = 2.5 - \frac{7}{3} = \frac{1}{6}$$

תשובה: $S = \frac{1}{6}$ יח"ר

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה: $f(x)=(x-3)\cdot\sqrt{2x}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=-f(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ במערכת הצירים שבה סרטטתם את גרף הפונקצייה $f(x)$.

נסמן ב־ S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

ו. הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$. נמקו.

פתרון מלא

סעיף א

$$2x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 0$$

תשובה: $x \geq 0$

סעיף ב

$(x-3)\sqrt{2x}=0$ כאשר $x-3=0$ או $\sqrt{2x}=0$: $x=3$ או $x=0$. הנקודה $(0,0)$ היא גם נקודת החיתוך עם ציר ה־y.

תשובה: $(0,0)$, $(3,0)$

סעיף ג

לפי כלל המכפלה:

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{2x}+(x-3)\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x}}=\frac{2x+(x-3)}{\sqrt{2x}}=\frac{3x-3}{\sqrt{2x}}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=1, \qquad f(1)=(1-3)\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$$

x	0	$0<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘ max		↗ min

תשובה: $\max(0,0)$ **(קצה)**, $\min(1,\,-2\sqrt{2})$

סעיף ד

סקיצה של f(x)=(x-3)√(2x)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה

הגרף של $g(x)=-f(x)$ הוא שיקוף של הגרף של $f(x)$ ביחס לציר ה־x.

הגרפים של f(x) ושל g(x)=-f(x) באותה מערכת צירים

תשובה: ראו סקיצה – שיקוף ביחס לציר ה־x.

סעיף ו

השטח S מוגבל על ידי הגרף של f וציר ה־x בתחום $0 \leq x \leq 3$ (שם הגרף מתחת לציר).

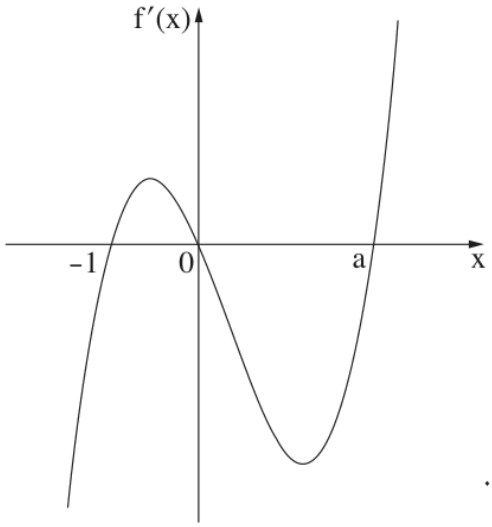
הגרף של g הוא שיקוף של f ביחס לציר ה־x, ולכן השטח בין הגרף של g לציר ה־x באותו תחום שווה גם הוא ל־S (מעל הציר).

השטח בין שני הגרפים מורכב משני השטחים האלה:

$$S_{f,g} = S + S = 2S$$

תשובה: $2S$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 8



8. הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות לכל x.

בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותכת את ציר ה־x בנקודות שבהן $x=a$, $x=0$, $x=-1$ (בלבד $a>0$ הוא פרמטר).

א. מה הם שיעורי ה־x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, ומהו סוגן? אם יש צורך, הביעו באמצעות a.

נתון כי הפונקצייה היא $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+12$.

ב. **(1)** מצאו את a.

(2) מצאו את שיעורי ה־y של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$.

גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה־x בשתי נקודות שונות.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי הישר המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ ועל ידי הישר $x=-1$.

פתרון מלא

סעיף א

לפי גרף הנגזרת:

x	$x<-1$	$-1<x<0$	0	$0<x<a$	a	$x>a$
$-f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↘	↗ min		↘ max	↗ min	

תשובה: מינימום ב־$x=-1$, מקסימום ב־$x=0$, מינימום ב־$x=a$.

סעיף ב (1)

$$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)=12x(x-2)(x+1)$$

נקודות האפס של הנגזרת: $x=-1,\ 0,\ 2$. לכן $a=2$.

תשובה: $a=2$

סעיף ב (2)

$$f(2)=48-32-48+12=-20 \qquad f(0)=12 \qquad f(-1)=3+4-12+12=7$$

תשובה: $\min(-1,7)$, $\max(0,12)$, $\min(2,-20)$

סעיף ג

סקיצה של $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+12$

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ד

בנקודה $x=2$ יש מינימום, ולכן המשיק שם אופקי: $y=-20$. בתחום $-1\le x\le 2$ הגרף של f מעל המשיק:

השטח בין גרף f, המשיק y=-20 והישר x=-1

$$S=\int_{-1}^{2}\big(f(x)-(-20)\big)dx=\int_{-1}^{2}\left(3x^4-4x^3-12x^2+32\right)dx$$
$$=\left[\frac{3x^5}{5}-x^4-4x^3+32x\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{96}{5}-16-32+64\right)-\left(-\frac{3}{5}-1+4-32\right)=$$
$$35.2-(-29.6)=64.8$$

תשובה: $S=64.8$ **יח"ר**

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{4x^2-1}{x^2-1}$.

א. **(1)** מְצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מְצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מְצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מְצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקִבעו את סוגה.

ג. סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=-f(x)+k$, k הוא פרמטר.

נתון: משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $g(x)$ היא $y=1$.

ד. **(1)** מְצאו את k.

(2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, ומהו סוגה?

פתרון מלא

סעיף א (1)

$x^2-1\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 1,\; x\neq -1$

תשובה: $x\neq \pm 1$

סעיף א (2)

אנכיות: המכנה מתאפס ב־$x=\pm 1$, והמונה שם $4-1=3\neq 0$.

אופקית: המונה והמכנה מאותה מעלה, $y=\frac{4}{1}=4$.

תשובה: $x=1$, $x=-1$, $y=4$

סעיף א (3)

עם ציר ה־y: $f(0)=\frac{-1}{-1}=1$.

עם ציר ה־x: $4x^2-1=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$.

תשובה: $(0,1)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

סעיף ב

$$f'(x)=\frac{8x(x^2-1)-(4x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{8x^3-8x-8x^3+2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-6x}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x)=0\Rightarrow x=0$. המכנה חיובי, ולכן הסימן של f' הפוך לסימן של x:

x	$x<-1$	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	↗	↗	max ↘	↘	↘

תשובה: $\max(0,1)$

סעיף ג

סקיצה של f(x)=(4x²-1)/(x²-1): אסימפטוטות x=±1, y=4, מקסימום (0,1)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ד (1)

כאשר $x \to \pm\infty$: $f(x) \to 4$, ולכן $g(x) = -f(x) + k \to -4 + k$. האסימפטוטה האופקית של g היא $y = k - 4$:

$$k - 4 = 1 \;\Rightarrow\; k = 5$$

תשובה: $k = 5$

סעיף ד (2)

$g(x) = -f(x) + 5$: הגרף של g הוא שיקוף של הגרף של f ביחס לציר ה־x ואחר כך הזזה של 5 למעלה.
בשיקוף, נקודת המקסימום $(0,1)$ הופכת לנקודת מינימום $(0,-1)$, ובהזזה היא עוברת ל־$(0,4)$.
(בדיקה: $g'(x) = -f'(x) = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$ – שלילית משמאל ל־0 וחיובית מימין, ו־$g(0) = -1 + 5 = 4$.)

תשובה: $\min(0,4)$

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 7

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=x-2\cdot\sqrt{x+a}$, a הוא פרמטר.

גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה $(6\,,0)$.

א. הַראו כי $a=3$.

ב. מְצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

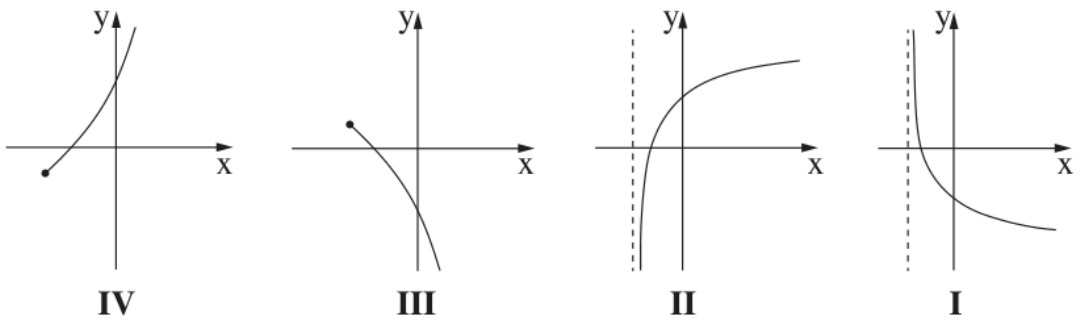
ג. מְצאו את שיעורי **כל** נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקְבעו את סוגן.

ד. סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. אחד מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

קְבעו איזה מהם, ונַמקו את הקביעה.

ו. מְצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x=1$, ועל ידי ציר ה־ x .



פתרון מלא

סעיף א

הנקודה $(6,0)$ על הגרף:

$$6-2\sqrt{6+a}=0\ \Rightarrow\ \sqrt{6+a}=3\ \Rightarrow\ 6+a=9\ \Rightarrow\ a=3$$

תשובה: $a=3$ ✓

סעיף ב

$$x+3\geq 0\ \Rightarrow\ x\geq -3$$

תשובה: $x\geq -3$

סעיף ג

$$f'(x)=1-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+3}}=1-\frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \sqrt{x+3}=1\ \Rightarrow\ x=-2,\qquad f(-2)=-2-2\cdot 1=-4$$

x	$-3<x<-2$	-2	$x>-2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘ max		↗ min

נקודת הקצה: $f(-3)=-3-0=-3$.

תשובה: $\max(-3,-3)$ **(קצה)**, $\min(-2,-4)$

סעיף ד

סקיצה של f(x)=x-2√(x+3): מקסימום קצה (-3,-3), מינימום (-4,-2), חיתוך (6,0)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה

תכונות $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+3}}$:

- מוגדרת רק ל־$x > -3$, וכאשר $x \to -3^+$: $f'(x) \to -\infty$ (אסימפטוטה אנכית $x = -3$).
- מתאפסת ב־$x = -2$: שלילית משמאל, חיובית מימין.
- עולה, וכאשר $x \to \infty$ היא מתקרבת ל־1.

גרף I יורד, וגרפים III ו־IV מתחילים בנקודת קצה (בלי אסימפטוטה). הגרף המתאים הוא II.

תשובה: גרף II.

סעיף ו

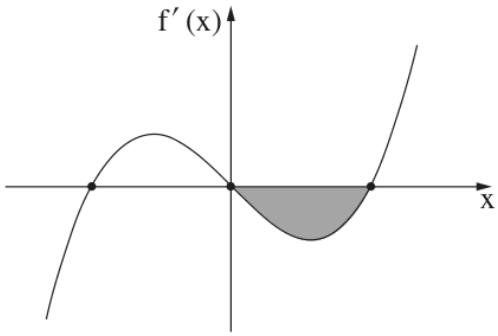
$f'(x)$ חותכת את ציר ה־x ב־$x = -2$, ובתחום $-2 \le x \le 1$ היא חיובית:

השטח בין גרף f'(x), ציר x והישר x=1

$$S = \int_{-2}^{1} f'(x)\,dx = f(1) - f(-2) = (1 - 2\cdot 2) - (-4) = -3 + 4 = 1$$

תשובה: $S = 1$ **יח"ר**

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 8



8. הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות לכל x.

בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

פונקציית הנגזרת מתאפסת בנקודות $x=2$, $x=0$, $x=-2$ בלבד.

א. הסתמכו על הסרטוט וקבעו את שיעורי ה־x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ ואת סוגן.

S הוא השטח הנמצא ברביע הרביעי ומוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־x.

נתון: $S=8$,

$f(2)=3\frac{1}{2}$.

ב. מצאו את $f(0)$.

נתון: $f(-2)=f(2)$.

לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ד. בעבור אילו ערכי k הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ ב־2 נקודות שונות בדיוק? נמקו.

פתרון מלא

סעיף א

לפי גרף הנגזרת:

x	$x<-2$	$-2<x<0$	0	$0<x<2$	2	$x>2$
$-f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↘	↗ min		↘ max		↗ min

תשובה: מינימום ב־$x=-2$ וב־$x=2$; מקסימום ב־$x=0$.

סעיף ב

השטח S נמצא מתחת לציר ה־x בתחום $0\le x\le 2$, ולכן:

$$S=-\int_0^2 f'(x)\,dx=-\big(f(2)-f(0)\big)=f(0)-f(2)$$

$$8=f(0)-3\tfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ f(0)=11\tfrac{1}{2}$$

תשובה: $f(0)=11.5$

סעיף ג

נקודות הקיצון: $\min(-2,\,3.5)$, $\max(0,\,11.5)$, $\min(2,\,3.5)$. ל־f אין אסימפטוטה אופקית, והיא עולה ללא גבול משמאל ל־-2 (כשהולכים שמאלה) ומימין ל־2.

סקיצה של f(x): שני מינימומים (±2, 3.5) ומקסימום (0, 11.5)

(הסקיצה צוירה לפי הפונקציה $f(x)=0.5x^4-4x^2+11.5$, שמקיימת את כל הנתונים בשאלה – אבל לסקיצה מספיקים נקודות הקיצון וכיווני העלייה והירידה.)

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ד

נעביר ישרים אופקיים $y = k$ על הסקיצה:

- $k < 3.5$: אין נקודות חיתוך.
- $k = 3.5$: הישר נוגע בגרף בשתי נקודות המינימום – **2 נקודות**.
- $3.5 < k < 11.5$: 4 נקודות.
- $k = 11.5$: 3 נקודות (כולל המקסימום).
- $k > 11.5$: **2 נקודות** – אחת בכל „זרוע" חיצונית של הגרף.

הישרים y=3.5 ו־y=k מעל 11.5 חותכים את הגרף בשתי נקודות

תשובה: $k = 3.5$ **או** $k > 11.5$**.**

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 6

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x-2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) רשום את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה- x.

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)|$.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) רשום את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

(3) כמה פתרונות יש למשוואה $g(x)=3$? נמק.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה אינו יכול להיות 0: $x-2\neq 0$.

תשובה: $x\neq 2$

סעיף א (2)

ב־$x=2$ המכנה מתאפס והמונה לא: $2^2-4\cdot 2+5=1\neq 0$. לכן זו אסימפטוטה אנכית.

תשובה: $x=2$

סעיף א (3)

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$):

$$f(0)=\frac{0-0+5}{0-2}=-2.5\ \Rightarrow\ (0,-2.5)$$

חיתוך עם ציר ה־x ($f(x)=0$): המונה צריך להתאפס, $x^2-4x+5=0$. הדיסקרימיננטה: $(-4)^2-4\cdot 1\cdot 5=16-20=-4<0$, ולכן אין פתרון – אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

תשובה: $(0,-2.5)$ **בלבד; אין חיתוך עם ציר ה־x.**

סעיף א (4)

נגזור לפי נגזרת של מנה:

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x-2)-(x^2-4x+5)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-8x+8-x^2+4x-5}{(x-2)^2}=$$
$$\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0$ כאשר $x^2-4x+3=0$, כלומר $(x-1)(x-3)=0$: $x=1$ או $x=3$.

$$f(1)=\frac{1-4+5}{1-2}=-2 \qquad f(3)=\frac{9-12+5}{3-2}=2$$

טבלת סימן הנגזרת (המכנה תמיד חיובי, לכן הסימן הוא סימן המונה):

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$2<x<3$	$x=3$	$x>3$
$f'(x)$	+	0	–	–	0	+
$f(x)$	עולה	מקסימום	יורדת	יורדת	מינימום	עולה

תשובה: $(1,-2)$ **מקסימום,** $(3,2)$ **מינימום**

סעיף א (5)

סקיצה של f(x) עם אסימפטוטה x=2, מקסימום (1,-2) ומינימום (3,2)

משמאל לאסימפטוטה הגרף כולו מתחת לציר ה־x (עם מקסימום ב־$(1,-2)$), ומימין לה כולו מעל ציר ה־x (עם מינימום ב־$(3,2)$).

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ב (1)

$g(x)=|f(x)|$: החלק של הגרף של $f(x)$ שמעל ציר ה־x נשאר כמו שהוא, והחלק שמתחת לציר ה־x משתקף כלפי מעלה (סימטריה ביחס לציר ה־x). כל הגרף של f משמאל ל־$x=2$ שלילי, ולכן הוא כולו משתקף.

סקיצה של |f(x)|=g(x) והישר y=3

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ב (2)

המקסימום $(1,-2)$ של f משתקף ל־$(1,2)$ והופך למינימום: משמאל ל־$x=1$ הגרף של g יורד ומימין לו (עד האסימפטוטה) עולה.

המינימום $(3,2)$ של f נמצא מעל ציר ה־x ולכן לא משתנה.

תשובה: $(1,2)$ **מינימום,** $(3,2)$ **מינימום**

סעיף ב (3)

הישר $y=3$ נמצא מעל שתי נקודות המינימום של g (ששתיהן בגובה 2). בכל אחד משני הענפים של g הגרף שואף לאינסוף בשני הצדדים, ולכן הישר $y=3$ חותך כל ענף פעמיים – סך הכול 4 נקודות חיתוך (ראו בסקיצה).

(בדיקה אלגברית: $f(x)=3$ נותן $x=\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$ – שני פתרונות מימין לאסימפטוטה, ו־$f(x)=-3$ נותן $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ – שני פתרונות משמאל לה.)

תשובה: 4 פתרונות

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 7

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(4x-1)^2}-4$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) רשום את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

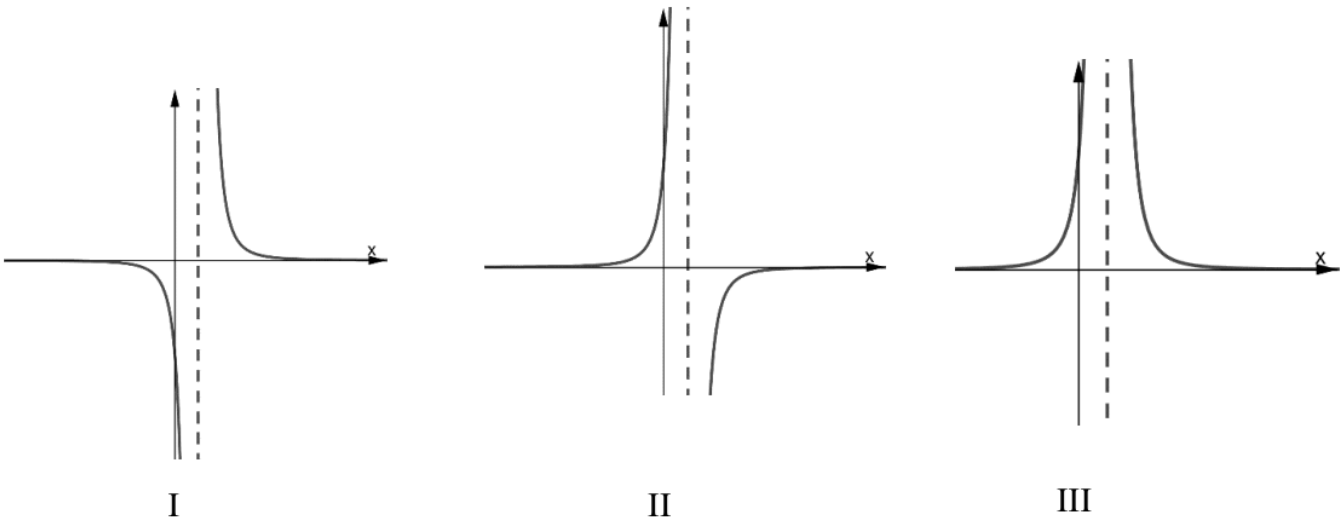
(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. אחד משלושת הגרפים שבסוף השאלה, I, II, III, הוא גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. ציין מיהו ונמק.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=2$.



I II III

פתרון מלא

סעיף א (1)

המכנה אינו יכול להיות 0: $4x-1\neq 0$, כלומר $x\neq\frac{1}{4}$.

תשובה: $x\neq\frac{1}{4}$

סעיף א (2)

אסימפטוטה אנכית: ב־$x=\frac{1}{4}$ המכנה מתאפס והמונה (1) לא, ולכן $x=\frac{1}{4}$.

אסימפטוטה אופקית: כאשר $x\to\pm\infty$ המכנה $(4x-1)^2$ גדל מאוד, ולכן $\frac{1}{(4x-1)^2}\to 0$ ו־$f(x)\to -4$.

האסימפטוטה האופקית היא $y=-4$.

תשובה: $x=\frac{1}{4}$, $y=-4$

סעיף א (3)

חיתוך עם ציר ה־y ($x=0$):

$$f(0)=\frac{1}{(-1)^2}-4=1-4=-3\ \Rightarrow\ (0,-3)$$

חיתוך עם ציר ה־x ($f(x)=0$):

$$\frac{1}{(4x-1)^2}=4 \;\Rightarrow\; (4x-1)^2=\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; 4x-1=\pm\frac{1}{2}$$

$$4x=1.5 \;\Rightarrow\; x=\frac{3}{8} \qquad 4x=0.5 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{8}$$

תשובה: $(0,-3)$, $\left(\frac{1}{8},0\right)$, $\left(\frac{3}{8},0\right)$

סעיף א (4)

נגזור (נגזרת של מנה):

$$f'(x)=\frac{0\cdot(4x-1)^2-1\cdot 2(4x-1)\cdot 4}{(4x-1)^4}=\frac{-8(4x-1)}{(4x-1)^4}=\frac{-8}{(4x-1)^3}$$

המונה -8 לעולם לא מתאפס, ולכן אין נקודות קיצון. הסימן של $f'(x)$ תלוי בסימן של $(4x-1)^3$, כלומר בסימן של $4x-1$:

x	$x<\frac{1}{4}$	$x>\frac{1}{4}$
$4x-1$	–	+
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	עולה	יורדת

תשובה: עולה: $x<\frac{1}{4}$**; יורדת:** $x>\frac{1}{4}$

סעיף א (5)

סקיצה של f(x) עם אסימפטוטות x=0.25 ו־y=-4

משני צידי האסימפטוטה האנכית הגרף שואף ל־$+\infty$, ובקצוות הוא מתקרב לאסימפטוטה $y=-4$ מלמעלה (כי $\frac{1}{(4x-1)^2}>0$).

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ב

לפי טבלת סעיף א (4): משמאל ל־$x=\frac{1}{4}$ הפונקציה עולה, ולכן $f'(x)>0$ – גרף הנגזרת מעל ציר ה־x.
מימין ל־$x=\frac{1}{4}$ הפונקציה יורדת, ולכן $f'(x)<0$ – גרף הנגזרת מתחת לציר ה־x.

רק בגרף II הגרף מעל ציר ה־x משמאל לאסימפטוטה ומתחתיו מימין לה. (בגרף I הסימנים הפוכים, ובגרף III הגרף חיובי משני הצדדים – זה מתאים ל־$f(x)$ עצמה ולא לנגזרת.)

תשובה: גרף II

סעיף ג

בתחום $1\le x\le 2$ גרף הנגזרת מתחת לציר ה־x ($f'(x)<0$), ולכן השטח הוא מינוס האינטגרל:

גרף f'(x) והשטח בין x=1 ל־x=2 מתחת לציר ה־x

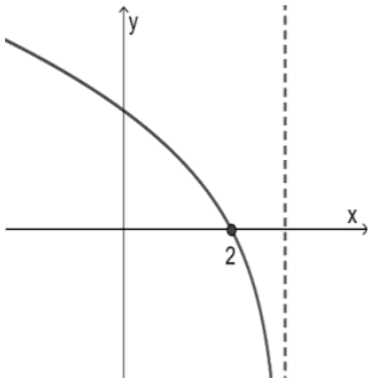
פונקציה קדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$ עצמה, ולכן:

$$\int_1^2 f'(x)\,dx=f(2)-f(1)=\left(\frac{1}{7^2}-4\right)-\left(\frac{1}{3^2}-4\right)=\frac{1}{49}-\frac{1}{9}=\frac{9-49}{441}=-\frac{40}{441}$$

$$S=\frac{40}{441}\approx 0.091$$

תשובה: $S=\frac{40}{441}\approx 0.091$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 8



8. נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{a-x}$, a הוא פרמטר.

בסרטוט שלפניך מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א. (1) היעזר בגרף, ורשום את שיעור ה- x של נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$. קבע את סוגה.

(2) חשב את הערך של a .

הצב $a=3$ וענה על הסעיפים הבאים:

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x+3)$.

מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק.

פתרון מלא

סעיף א (1)

בנקודת קיצון פנימית $f'(x)=0$ – זו נקודת החיתוך של גרף הנגזרת עם ציר ה־x, כלומר $x=2$.

משמאל ל־$x=2$ גרף הנגזרת מעל ציר ה־x ($f'(x)>0$, הפונקציה עולה), ומימין לו מתחת לציר ה־x ($f'(x)<0$, הפונקציה יורדת). לכן זו נקודת מקסימום.

תשובה: $x=2$, מקסימום

סעיף א (2)

נגזור לפי כלל המכפלה ($\left(\sqrt{a-x}\right)'=\frac{-1}{2\sqrt{a-x}}$):

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{a-x}+x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{a-x}}=\frac{2(a-x)-x}{2\sqrt{a-x}}=\frac{2a-3x}{2\sqrt{a-x}}$$

לפי סעיף א (1): $f'(2)=0$, ולכן המונה מתאפס ב־$x=2$:

$$2a-3\cdot 2=0\ \Rightarrow\ a=3$$

תשובה: $a=3$

סעיף ב (1)

$f(x)=x\sqrt{3-x}$. הביטוי שבתוך השורש אינו יכול להיות שלילי:

$$3-x\geq 0\ \Rightarrow\ x\leq 3$$

(זה מתאים לאסימפטוטה האנכית בשרטוט של $f'(x)$ ב־$x=3$: הנגזרת מוגדרת רק עבור $x<3$.)

תשובה: $x\leq 3$

סעיף ב (2)

חיתוך עם ציר ה־y: $f(0)=0\cdot\sqrt{3}=0$, הנקודה $(0,0)$.

חיתוך עם ציר ה־x: $x\sqrt{3-x}=0$, כלומר $x=0$ או $\sqrt{3-x}=0\Rightarrow x=3$.

תשובה: $(0,0)$, $(3,0)$

סעיף ב (3)

עם $a=3$: $f'(x)=\frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$, ו־$f'(x)=0$ רק ב־$x=2$:

$f(2)=2\sqrt{3-2}=2$

x	$x<2$	$x=2$	$2<x<3$	$x=3$
$f'(x)$	+	0	–	(לא מוגדרת)
$f(x)$	עולה	מקסימום יורדת		קצה

בנוסף, $x=3$ היא קצה תחום ההגדרה. משמאל לה הפונקציה יורדת אל $f(3)=0$, ולכן $(3,0)$ היא נקודת מינימום קצה.

תשובה: $(2,2)$ **מקסימום;** $(3,0)$ **מינימום (קצה)**

סעיף ב (4)

סקיצה של f(x)=x√(3-x): מקסימום (2,2), חיתוכים (0,0) ו־(3,0)

הפונקציה מוגדרת רק עבור $x\leq 3$; היא עולה עד המקסימום $(2,2)$ ויורדת עד $(3,0)$.

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ג

$g(x)=f(x+3)=(x+3)\sqrt{3-(x+3)}=(x+3)\sqrt{-x}$.

הביטוי שבתוך השורש אינו שלילי: $-x\geq 0$, כלומר $x\leq 0$.

(הסבר נוסף: הגרף של $g(x)$ הוא הגרף של $f(x)$ מוזז 3 יחידות שמאלה, ולכן גם תחום ההגדרה זז 3 יחידות שמאלה: מ־$x\leq 3$ ל־$x\leq 0$.)

תשובה: $x\leq 0$

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 6

6. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{4x^2-1}+b$, b הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. **(1)** מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה (אם צריך, הבע באמצעות b).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הישר $y=-2$ משיק לפונקציה $f(x)$ בנקודת הקיצון שלה.

ג. מצא את b .

הצב את b שמצאת בסעיף ג בפונקציה $f(x)$ וענה על הסעיפים ד-ו.

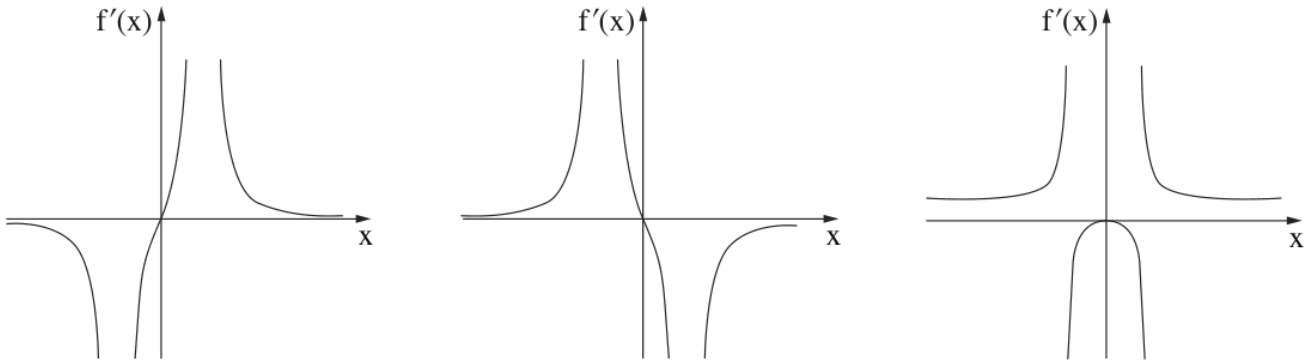
ד. **(1)** מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

ה. אחד מן הגרפים I-III שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבע איזה מהם, ונמק את קביעתך.

ו. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x=\frac{1}{3}$, ועל ידי ציר ה־ x .



III II I

פתרון מלא

סעיף א

המכנה אינו יכול להיות 0:

$$4x^2-1\neq 0 \;\Rightarrow\; x^2\neq\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x\neq\pm\frac{1}{2}$$

תשובה: $x\neq\pm\frac{1}{2}$

סעיף ב (1)

נגזור (b קבוע, ולכן הנגזרת שלו 0):

$$f'(x)=\frac{0\cdot(4x^2-1)-4\cdot 8x}{(4x^2-1)^2}=\frac{-32x}{(4x^2-1)^2}$$

$f'(x)=0$ כאשר $-32x=0$, כלומר $x=0$:

$$f(0)=\frac{4}{0-1}+b=b-4$$

המכנה של $f'(x)$ תמיד חיובי, ולכן הסימן של $f'(x)$ הפוך לסימן של x: משמאל ל־0 $f'(x) > 0$ ומימין ל־0 $f'(x) < 0$ – זו נקודת מקסימום.

תשובה: **מקסימום** $(0,\ b-4)$

סעיף ב (2)

לפי סימן הנגזרת (שימו לב לנקודות $x = \pm\frac{1}{2}$ שאינן בתחום ההגדרה):

x	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$f'(x)$	+	+	0	–	–
$f(x)$	עולה	עולה	מקסימום יורדת	יורדת	

תשובה: עולה: $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < 0$; **יורדת:** $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > \frac{1}{2}$

סעיף ג

הישר $y = -2$ משיק לגרף בנקודת הקיצון, ולכן שיעור ה־y של נקודת הקיצון הוא -2:

$$b - 4 = -2 \ \Rightarrow \ b = 2$$

תשובה: $b = 2$

סעיף ד (1)

$f(x) = \frac{4}{4x^2-1} + 2$.

אסימפטוטות אנכיות: בנקודות $x = \pm\frac{1}{2}$ המכנה מתאפס והמונה (4) לא, ולכן $x = \frac{1}{2}$ ו־$x = -\frac{1}{2}$.

אסימפטוטה אופקית: כאשר $x \to \pm\infty$ המכנה גדל מאוד, $\frac{4}{4x^2-1} \to 0$, ולכן $f(x) \to 2$: $y = 2$.

תשובה: $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$

סעיף ד (2)

נקודות עזר: חיתוך עם ציר ה־y הוא נקודת המקסימום $(0, -2)$. חיתוך עם ציר ה־x: $\frac{4}{4x^2-1} = -2 \Rightarrow$ $-\frac{1}{4} = x^2$ $\Rightarrow 4x^2 - 1 = -2$ – אין פתרון, ולכן אין חיתוך עם ציר ה־x.

סקיצה של f(x) עם אסימפטוטות x=±0.5 ו־y=2 ומקסימום (0,-2)

בשני הענפים החיצוניים הגרף מעל $y = 2$ ושואף ל־$+\infty$ ליד האסימפטוטות; בענף האמצעי הגרף מתחת ל־-2, עם מקסימום ב־$(0, -2)$.

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה

לפי סעיף ב (2): עבור $x < 0$ (בשני תחומי ההגדרה) $f'(x) > 0$ – גרף הנגזרת מעל ציר ה־x; עבור $x > 0$ $f'(x) < 0$ – גרף הנגזרת מתחת לציר ה־x; ו־$f'(0) = 0$ – גרף הנגזרת עובר בראשית.

רק גרף II מתאים: משמאל לראשית הוא חיובי ומימין לה שלילי. (בגרף III הסימנים הפוכים, ובגרף I הגרף אינו מחליף סימן ב־$x = 0$.)

תשובה: גרף II

סעיף ו

השטח מוגבל בין $x = 0$ (שם גרף הנגזרת חותך את ציר ה־x) לבין $x = \frac{1}{3}$. בתחום זה $f'(x) < 0$ (הגרף מתחת לציר ה־x), ולכן השטח הוא מינוס האינטגרל:

גרף f'(x) והשטח בין x=0 ל־x=1/3 מתחת לציר ה־x

פונקציה קדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f'(x)\,dx = f\left(\tfrac{1}{3}\right) - f(0) = \left(\frac{4}{\frac{4}{9}-1}+2\right) - (-2) = (-7.2+2)+2 = -3.2$$

$$S = 3.2$$

תשובה: $S = 3.2$

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 7

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot \sqrt{x+18}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -2 \cdot f(x)$.

(1) מצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

(2) נסמן ב־ A ו־ B את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ בהתאמה.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

חשב את שטח המשולש ABO .

פתרון מלא

סעיף א

הביטוי שבתוך השורש אינו יכול להיות שלילי:

$$x + 18 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -18$$

תשובה: $x \geq -18$

סעיף ב

חיתוך עם ציר ה־y: $f(0) = 0 \cdot \sqrt{18} = 0$, הנקודה $(0,0)$.

חיתוך עם ציר ה־x: $x\sqrt{x+18} = 0$, כלומר $x = 0$ או $x = -18 \Rightarrow \sqrt{x+18} = 0$.

תשובה: $(0,0)$, $(-18,0)$

סעיף ג

נגזור לפי כלל המכפלה ($\left(\sqrt{x+18}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+18}}$):

$$f'(x) = \sqrt{x+18} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+18}} = \frac{2(x+18)+x}{2\sqrt{x+18}} = \frac{3x+36}{2\sqrt{x+18}}$$

$f'(x) = 0$ כאשר $3x + 36 = 0$, כלומר $x = -12$:

$$f(-12) = -12\sqrt{-12+18} = -12\sqrt{6} \approx -29.39$$

x	$x = -18$	$-18 < x < -12$	$x = -12$	$x > -12$
$f'(x)$	(לא מוגדרת) –	–	0	+
$f(x)$	קצה	יורדת	מינימום	עולה

$x = -18$ הוא קצה תחום ההגדרה, ומימינו הפונקציה יורדת, ולכן $(-18,0)$ היא נקודת מקסימום קצה.

תשובה: **מינימום:** $(-12,-12\sqrt{6}) \approx (-12,-29.39)$ **מקסימום (קצה)** $(-18,0)$

סעיף ד

סקיצה של f(x)=x√(x+18)

הגרף מתחיל ב־$(-18,0)$, יורד עד המינימום $(-12,-12\sqrt{6})$ ואחר כך עולה, חותך את ציר ה־x בראשית וממשיך לעלות.

תשובה: ראו סקיצה.

סעיף ה (1)

$g(x)=-2f(x)$: כל שיעור y מוכפל ב־-2 (מתיחה פי 2 ושיקוף ביחס לציר ה־x). שיעורי ה־x של נקודות הקיצון לא משתנים, וסוג הקיצון מתהפך:

$$g(-18)=-2\cdot 0=0 \qquad g(-12)=-2\cdot(-12\sqrt{6})=24\sqrt{6}\approx 58.79$$

(בדיקה: $g'(x)=-2f'(x)$, ולכן גם $g'(-12)=0$, והסימנים של g' הפוכים לאלה של f'.)

תשובה: **מקסימום:** $(-12,24\sqrt{6})\approx(-12,58.79)$ **מינימום (קצה)** $(-18,0)$

סעיף ה (2)

נקודות הקיצון הפנימיות: $A(-12,-12\sqrt{6})$ (של f) ו־$B(-12,24\sqrt{6})$ (של g).

הגרפים של f ו־g והמשולש ABO

ל־A ול־B אותו שיעור x, ולכן הצלע AB מקבילה לציר ה־y, ואורכה:

$$AB=24\sqrt{6}-(-12\sqrt{6})=36\sqrt{6}$$

הגובה מ־O לצלע AB הוא המרחק של O מהישר $x=-12$, כלומר $h=12$.

$$S_{ABO}=\frac{AB\cdot h}{2}=\frac{36\sqrt{6}\cdot 12}{2}=216\sqrt{6}\approx 529.09$$

תשובה: $216\sqrt{6}\approx 529.09$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.