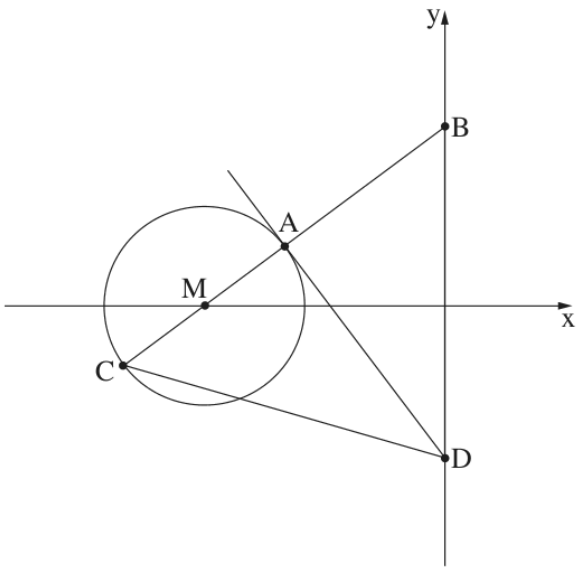
גאומטרייה אנליטית – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 4 יחידות, כיתה י״א (שאלון 471) • 26 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 4



4. בסרטוט שלפניכם מעגל. מרכז המעגל M נמצא על ציר ה־ x.

הנקודה A נמצאת על המעגל.

המשך הקטע MA חותך את ציר ה־ y בנקודה B.

נתון: $A(-16\,,6)$, $B(0\,,18)$.

א. **(1)** מצאו את משוואת הישר AB.

(2) מצאו את משוואת המעגל.

דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל

החותך את ציר ה־ y בנקודה D.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה D.

הנקודה C נמצאת על המעגל כך ש־ AC הוא קוטר במעגל.

ג. הראו כי $BD = CD$.

ד. חשבו את גודל הזווית ABD.

הנקודה K נמצאת על הקטע CD.

נתון כי שטח המשולש MCK הוא 90.

ה. מצאו את אורך הקטע CK.

פתרון מלא

סעיף א (1)

שיפוע הישר דרך $A(-16,6)$ ו־$B(0,18)$:

$$m = \frac{18-6}{0-(-16)} = \frac{12}{16} = 0.75$$

הישר חותך את ציר ה־y בנקודה $B(0,18)$, ולכן:

$$y = 0.75x + 18$$

תשובה: $y = 0.75x + 18$

סעיף א (2)

המרכז M נמצא על הישר AB (המשך הקטע MA) ועל ציר ה־x, ולכן נציב $y=0$:

$$0 = 0.75x + 18 \;\Rightarrow\; x = -24 \;\Rightarrow\; M(-24,0)$$

הרדיוס הוא המרחק MA:

$$R^2 = (-16+24)^2 + (6-0)^2 = 64 + 36 = 100$$

תשובה: $(x+24)^2 + y^2 = 100$

סעיף ב

המשיק בנקודה A מאונך לרדיוס MA. שיפוע MA הוא $0.75 = \frac{3}{4}$, ולכן שיפוע המשיק:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \;\Rightarrow\; m = -\frac{4}{3}$$

משוואת המשיק דרך $A(-16,6)$:

$$y - 6 = -\frac{4}{3}(x+16)$$

נקודת החיתוך עם ציר ה־y: נציב $x = 0$:

$$y = 6 - \frac{64}{3} = -\frac{46}{3} = -15\tfrac{1}{3}$$

תשובה: $D\left(0, -15\frac{1}{3}\right)$

סעיף ג

AC קוטר, ולכן M הוא אמצע הקטע AC:

$$\frac{-16 + x_C}{2} = -24 \Rightarrow x_C = -32, \qquad \frac{6 + y_C}{2} = 0 \Rightarrow y_C = -6 \qquad C(-32,-6)$$

B ו־D נמצאות על ציר ה־y, ולכן:

$$BD = 18 - \left(-\frac{46}{3}\right) = \frac{100}{3}$$

$$CD = \sqrt{(0+32)^2 + \left(-\frac{46}{3} + 6\right)^2} = \sqrt{1024 + \frac{784}{9}} = \sqrt{\frac{10000}{9}} = \frac{100}{3}$$

לכן $BD = CD$.

תשובה: $BD = CD = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$

סעיף ד

DA משיק ו־MA רדיוס, ולכן $\angle BAD = 90^\circ$ (משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה). במשולש ישר הזווית ABD:

$$AB = \sqrt{(0+16)^2 + (18-6)^2} = \sqrt{400} = 20$$

$$\cos\angle ABD = \frac{AB}{BD} = \frac{20}{\frac{100}{3}} = 0.6 \;\Rightarrow\; \angle ABD \approx 53.13^\circ$$

תשובה: $\angle ABD \approx 53.13^\circ$

סעיף ה

במשולש BCD: $BD = CD$ (סעיף ג), ולכן הוא שווה שוקיים וזוויות הבסיס שוות (מול צלעות שוות במשולש מונחות זוויות שוות):

$$\angle BCD = \angle CBD$$

הנקודות C, M, A, B על ישר אחד, ולכן הקרניים BC ו־BA מתלכדות, כלומר $\angle CBD = \angle ABD$, ומאותה סיבה $\angle MCK = \angle BCD$:

$$\angle MCK = \angle BCD = \angle ABD \approx 53.13^\circ$$

בנוסף $\sin\angle MCK = \sqrt{1-0.6^2} = 0.8$, ו־$MC = R = 10$.

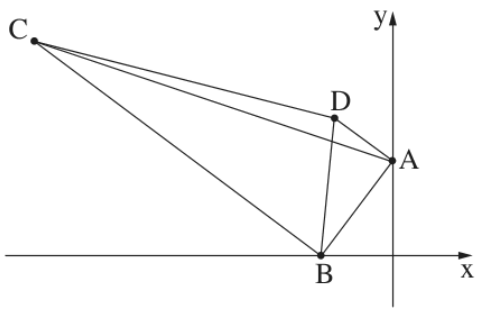
לפי נוסחת שטח משולש באמצעות שתי צלעות והזווית שביניהן:

$$S_{MCK} = \frac{MC \cdot CK \cdot \sin\angle MCK}{2} = \frac{10 \cdot CK \cdot 0.8}{2} = 4 \cdot CK$$

$4 \cdot CK = 90 \;\Rightarrow\; CK = 22.5$

תשובה: $CK = 22.5$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5



5. בסרטוט שלפניכם טרפז ישר זווית $ABCD$ $(AD \parallel BC \ , \ \sphericalangle ABC = 90^o)$.

הקודקוד B נמצא על החלק השלילי של ציר ה־ x.

נתון: $A(0\,,4)$, אורך הצלע AB הוא 5.

א. מצאו את שיעורי הקודקוד B.

ב. מצאו את משוואת הצלע BC.

נתון כי משוואת האלכסון AC היא $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

ג. מצאו את אורך הצלע BC.

הנקודה M היא נקודת החיתוך של אלכסוני הטרפז.

ד. הוכיחו: $\triangle DMA \sim \triangle BMC$.

נתון כי אורך הקטע AD הוא 3.

ה. מצאו פי כמה גדול שטח המשולש BMC משטח המשולש DMA.

פתרון מלא

סעיף א

הקודקוד B על ציר ה־x, ולכן $B(b,0)$ עם $b<0$. לפי נוסחת המרחק בין שתי נקודות:

$$AB=\sqrt{(b-0)^2+(0-4)^2}=5 \ \Rightarrow \ b^2+16=25 \ \Rightarrow \ b^2=9$$

$b=3$ או $b=-3$. B על החלק השלילי של ציר ה־x, ולכן $b=-3$.

תשובה: $B(-3,0)$

סעיף ב

שיפוע AB:

$$m_{AB}=\frac{4-0}{0-(-3)}=\frac{4}{3}$$

$\angle ABC=90^\circ$, כלומר $BC\perp AB$, ולכן $m_{BC}=-\frac{3}{4}$. משוואת BC דרך $B(-3,0)$:

$$y-0=-\frac{3}{4}(x+3) \ \Rightarrow \ y=-\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}$$

תשובה: $y=-\frac{3}{4}x-2\frac{1}{4}$

סעיף ג

C היא נקודת החיתוך של BC עם האלכסון AC:

$$-\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}=-\frac{1}{3}x+4 \ \Big/ \cdot 12 \ \Rightarrow \ -9x-27=-4x+48 \ \Rightarrow \ -5x=75 \ \Rightarrow \ x=-15$$

$$y=-\frac{1}{3}\cdot(-15)+4=9 \qquad C(-15,9)$$

$$BC=\sqrt{(-15+3)^2+(9-0)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$$

תשובה: $BC=15$

סעיף ד

נתבונן במשולשים DMA ו־BMC:

1. $\angle DAM = \angle BCM$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים, $AD \parallel BC$, והחותך AC).
2. $\angle AMD = \angle CMB$ (זוויות קודקודיות).

לכן $\triangle DMA \sim \triangle BMC$ (לפי משפט הדמיון ז.ז – שתי זוויות שוות).

תשובה: הוכחה: שתי זוויות שוות (מתחלפות וקודקודיות) – ז.ז.

סעיף ה

במשולשים הדומים, AD ו־CB הן צלעות מתאימות (מול הזוויות הקודקודיות השוות), ולכן יחס הדמיון:

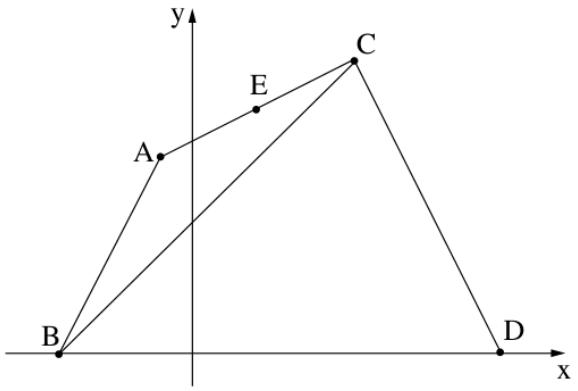
$$k = \frac{BC}{AD} = \frac{15}{3} = 5$$

יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\frac{S_{BMC}}{S_{DMA}} = k^2 = 5^2 = 25$$

תשובה: פי 25.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 4



4. בסרטוט שלפניכם משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$.

הקודקוד B נמצא על החלק השלילי של ציר ה־x.

הנקודה D נמצאת על ציר ה־x כך ש־CD מאונך ל־AC.

נתון כי הנקודה $E(4\,,15)$ היא אמצע הצלע AC,

וכי משוואת הישר CD היא $y = -2x + 38$.

א. **(1)** מצאו את משוואת הישר AC.

(2) מצאו את שיעורי הקודקוד C.

ב. **(1)** מצאו את אורך הצלע AB.

(2) מצאו את שיעורי הקודקוד B.

ג. מצאו את גודל הזווית ABD ואת גודל הזווית CBD.

ד. חשבו את שטח המשולש ABC.

פתרון מלא

סעיף א (1)

$CD \perp AC$ ושיפוע CD הוא -2, ולכן:

$$m_{AC} \cdot (-2) = -1 \;\Rightarrow\; m_{AC} = \frac{1}{2}$$

הישר AC עובר דרך $E(4,15)$ (אמצע הצלע):

$$y - 15 = \frac{1}{2}(x - 4) \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}x + 13$$

תשובה: $y = 0.5x + 13$

סעיף א (2)

C היא נקודת החיתוך של AC ו־CD:

$$\frac{1}{2}x + 13 = -2x + 38 \;\Rightarrow\; 2.5x = 25 \;\Rightarrow\; x = 10, \quad y = -2 \cdot 10 + 38 = 18$$

תשובה: $C(10, 18)$

סעיף ב (1)

E אמצע AC, ולכן:

$$\frac{x_A + 10}{2} = 4 \Rightarrow x_A = -2, \qquad \frac{y_A + 18}{2} = 15 \Rightarrow y_A = 12 \qquad A(-2, 12)$$

$$AC = \sqrt{(10+2)^2 + (18-12)^2} = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

המשולש שווה שוקיים ($AB = AC$), ולכן $AB = 6\sqrt{5}$.

תשובה: $AB = 6\sqrt{5} \approx 13.42$

סעיף ב (2)

$B(b, 0)$ עם $b < 0$. לפי נוסחת המרחק:

$$(b+2)^2 + (0-12)^2 = 180 \;\Rightarrow\; (b+2)^2 = 36 \;\Rightarrow\; b + 2 = \pm 6$$

$b = 4$ או $b = -8$. B על החלק השלילי של ציר ה־x, ולכן $b = -8$.

תשובה: $B(-8,0)$

סעיף ג

הזווית שישר יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה־x מקיימת $\tan\alpha = m$.

$$m_{AB} = \frac{12-0}{-2+8} = 2 \;\Rightarrow\; \tan\angle ABD = 2 \;\Rightarrow\; \angle ABD \approx 63.43^\circ$$

$$m_{BC} = \frac{18-0}{10+8} = 1 \;\Rightarrow\; \tan\angle CBD = 1 \;\Rightarrow\; \angle CBD = 45^\circ$$

תשובה: $\angle ABD \approx 63.43^\circ$**,** $\angle CBD = 45^\circ$

סעיף ד

$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD \approx 63.43^\circ - 45^\circ = 18.43^\circ$. במשולש שווה השוקיים גם $\angle ACB = 18.43^\circ$, ולכן:

$$\angle BAC = 180^\circ - 2\cdot 18.43^\circ = 143.13^\circ$$

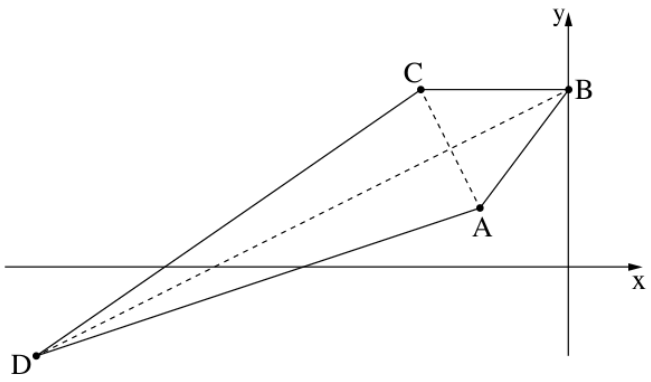
$$S_{ABC} = \frac{AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC}{2} = \frac{6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}\cdot \sin 143.13^\circ}{2} = \frac{180\cdot 0.6}{2} = 54$$

(דרך נוספת – בסיס $AC = 6\sqrt{5}$ והגובה מ־B לישר AC הוא $\frac{18}{\sqrt{5}}$, ושוב $S = \frac{6\sqrt{5}\cdot\frac{18}{\sqrt{5}}}{2} = 54$.)

תשובה: $S_{ABC} = 54$ **יח"ר**

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 5

5. בסרטוט שלפניכם דלתון $ABCD$ $(AD = CD \ , \ AB = CB)$.



הקודקוד C נמצא ברביע השני.

הצלע BC מקבילה לציר ה־x.

נתון: $A(-3\,,2)$, $B(0\,,6)$.

א. **(1)** מצאו את אורך הצלע AB.

(2) מצאו את שיעורי הקודקוד C.

ב. מצאו את משוואת האלכסון DB.

נתון: משוואת הצלע AD היא $y = \frac{1}{3}x + 3$.

ג. מצאו את שיעורי הקודקוד D.

הנקודה M היא מפגש אלכסוני הדלתון.

ד. מצאו את גודל הזווית ADM.

הנקודה E היא אמצע הצלע DC.

ה. חשבו את שטח המשולש ADE.

פתרון מלא

סעיף א (1)

$$AB = \sqrt{(0+3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

תשובה: $AB = 5$

סעיף א (2)

$BC \parallel$ ציר ה־x, ולכן $y_C = y_B = 6$, כלומר $C(c, 6)$. בדלתון $CB = AB = 5$, ו־C ברביע השני ($c < 0$):

$$CB = |0 - c| = 5 \ \Rightarrow \ c = -5$$

תשובה: $C(-5, 6)$

סעיף ב

בדלתון, האלכסון הראשי DB (המחבר את קודקודי הראש) הוא האנך האמצעי של האלכסון AC. אמצע AC:

$$M\left(\frac{-3-5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = M(-4, 4)$$

$$m_{AC} = \frac{6-2}{-5+3} = -2 \ \Rightarrow \ m_{DB} = \frac{1}{2}$$

DB עובר דרך $B(0,6)$:

$$y = \frac{1}{2}x + 6$$

(בדיקה: $M(-4,4)$ על הישר: $\frac{1}{2}\cdot(-4) + 6 = 4$ ✓.)

תשובה: $y = \frac{1}{2}x + 6$

סעיף ג

D היא נקודת החיתוך של AD עם האלכסון DB:

$$\frac{1}{3}x+3=\frac{1}{2}x+6 \;\Big/\cdot 6 \;\Rightarrow\; 2x+18=3x+36 \;\Rightarrow\; x=-18, \quad y=\frac{1}{2}\cdot(-18)+6=-3$$

תשובה: $D(-18,-3)$

סעיף ד

הזווית שישר יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה־x: $\tan\alpha=m$.

$$\tan\alpha_{DB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha_{DB}\approx 26.57^\circ \qquad \tan\alpha_{DA}=\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha_{DA}\approx 18.43^\circ$$

$$\angle ADM=26.57^\circ-18.43^\circ\approx 8.13^\circ$$

תשובה: $\angle ADM\approx 8.13^\circ$

סעיף ה

AE הוא תיכון במשולש ADC (E אמצע DC), ולכן הוא מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח:
$S_{ADE}=\frac{1}{2}S_{ADC}$.

במשולש ADC: הבסיס AC והגובה DM (כי $DB\perp AC$):

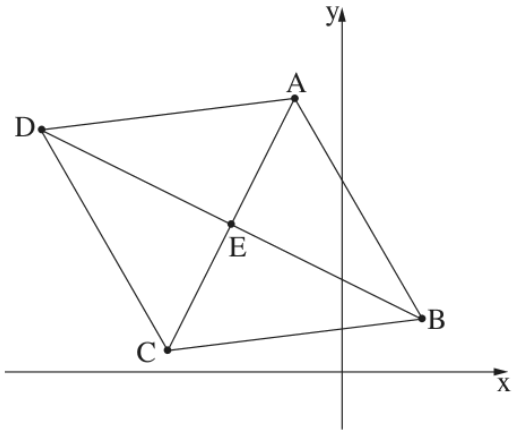
$$AC=\sqrt{(-5+3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{20} \qquad DM=\sqrt{(-4+18)^2+(4+3)^2}=\sqrt{245}$$

$$S_{ADC}=\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{245}}{2}=\frac{\sqrt{4900}}{2}=\frac{70}{2}=35$$

$$S_{ADE}=\frac{35}{2}=17.5$$

תשובה: $S_{ADE}=17.5$ **יח"ר**

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 4



4. בסרטוט שלפניכם מעוין ABCD. אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה E.

נתון כי משוואת הצלע AB היא $y = -1.75x + 11.75$,

שיעור ה־x של הקודקוד A הוא -3,

ושיעורי הקודקוד C הם $(-11, 1)$.

א. **(1)** מצאו את שיעורי הנקודה E.

(2) מצאו את שיפוע האלכסון AC.

ב. **(1)** מצאו את משוואת האלכסון BD.

(2) מצאו את שיעורי הקודקוד B.

ג. מצאו את גודל הזווית ABE.

הנקודה G נמצאת על הקטע DE כך שגודל הזווית GAB הוא 97°.

ד. מצאו את אורך הקטע GE.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נמצא את A: נציב $x = -3$ במשוואת AB: $y = -1.75 \cdot (-3) + 11.75 = 5.25 + 11.75 = 17$,
כלומר $A(-3, 17)$.

במעוין האלכסונים חוצים זה את זה, ולכן E הוא אמצע AC:

$$E\left(\frac{-3-11}{2},\ \frac{17+1}{2}\right) = E(-7, 9)$$

תשובה: $E(-7, 9)$

סעיף א (2)

$$m_{AC} = \frac{17-1}{-3+11} = \frac{16}{8} = 2$$

תשובה: $m_{AC} = 2$

סעיף ב (1)

במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה: $m_{BD} \cdot 2 = -1 \Rightarrow m_{BD} = -\frac{1}{2}$. האלכסון BD עובר דרך $E(-7, 9)$:

$$y - 9 = -\frac{1}{2}(x + 7) \ \Rightarrow\ y = -\frac{1}{2}x + 5.5$$

תשובה: $y = -0.5x + 5.5$

סעיף ב (2)

B היא נקודת החיתוך של BD עם AB:

$$-0.5x + 5.5 = -1.75x + 11.75 \ \Rightarrow\ 1.25x = 6.25 \ \Rightarrow\ x = 5, \quad y = -0.5 \cdot 5 + 5.5 = 3$$

תשובה: $B(5, 3)$

סעיף ג

האלכסונים מאונכים, ולכן המשולש AEB ישר זווית ($\angle AEB = 90^\circ$):

$$AE = \sqrt{(-3+7)^2 + (17-9)^2} = \sqrt{80} \qquad BE = \sqrt{(5+7)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{180}$$

$$\tan\angle ABE = \frac{AE}{BE} = \sqrt{\frac{80}{180}} = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \angle ABE \approx 33.69^\circ$$

תשובה: $\angle ABE \approx 33.69^\circ$

סעיף ד

במשולש AEB: $\angle EAB = 90^\circ - 33.69^\circ = 56.31^\circ$. לכן:

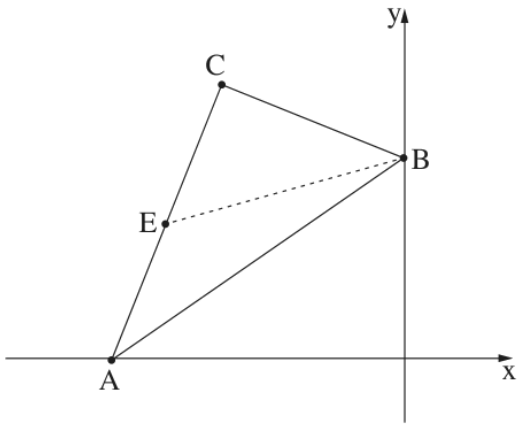
$$\angle GAE = \angle GAB - \angle EAB = 97^\circ - 56.31^\circ = 40.69^\circ$$

G על DE, ולכן המשולש AEG ישר זווית ב־E:

$$\tan\angle GAE = \frac{GE}{AE} \;\Rightarrow\; GE = \sqrt{80}\cdot\tan 40.69^\circ \approx 8.944 \cdot 0.860 \approx 7.69$$

תשובה: $GE \approx 7.69$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 4



4. בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$).

הקודקוד B נמצא על ציר ה־y.

נתון כי שיעורי הקודקוד A הם $(-16\,,\,0)$,

ומשוואת הצלע CB היא $y = -\frac{2}{5}x + 11$.

א. מצאו את משוואת הצלע AC.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד C.

BE הוא תיכון לצלע AC.

ג. **(1)** מצאו את אורך הקטע EC.

(2) מצאו את גודל הזווית CEB.

הנקודה K נמצאת על הקטע EB.

נתון: שטח המשולש AEK הוא 18.

ד. מצאו את אורך הקטע EK.

פתרון מלא

סעיף א

שיפוע הצלע CB הוא $m_{CB} = -\frac{2}{5}$. נתון ש־$\sphericalangle ACB = 90^\circ$, כלומר $AC \perp CB$, ולכן מכפלת השיפועים היא -1:

$$m_{AC} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -1 \;\Rightarrow\; m_{AC} = \frac{5}{2}$$

הישר AC עובר דרך $A(-16,0)$:

$$y - 0 = \frac{5}{2}(x + 16)$$
$$y = 2.5x + 40$$

תשובה: $y = 2.5x + 40$

סעיף ב

C היא נקודת החיתוך של AC ו־CB. נשווה:

$$2.5x + 40 = -0.4x + 11$$
$$2.9x = -29 \;\Rightarrow\; x = -10$$
$$y = 2.5 \cdot (-10) + 40 = 15$$

תשובה: $C(-10,\ 15)$

סעיף ג (1)

BE תיכון לצלע AC, ולכן E היא אמצע AC:

$$E\left(\frac{-16 + (-10)}{2},\ \frac{0 + 15}{2}\right) = E(-13,\ 7.5)$$

אורך הקטע EC לפי נוסחת המרחק בין שתי נקודות:

$$EC=\sqrt{(-10-(-13))^2+(15-7.5)^2}=\sqrt{9+56.25}=\sqrt{65.25}\approx 8.078$$

תשובה: $EC=\sqrt{65.25}\approx 8.078$

סעיף ג (2)

נמצא את אורך הניצב CB, כאשר B היא נקודת החיתוך של CB עם ציר ה־y: $B(0,11)$.

$$CB=\sqrt{(0-(-10))^2+(11-15)^2}=\sqrt{100+16}=\sqrt{116}\approx 10.77$$

המשולש CEB ישר זווית ($\sphericalangle ECB=90^\circ$), ולכן:

$$\tan\sphericalangle CEB=\frac{CB}{EC}=\frac{\sqrt{116}}{\sqrt{65.25}}=\frac{4}{3}$$

$$\sphericalangle CEB\approx 53.13^\circ$$

תשובה: $\sphericalangle CEB\approx 53.13^\circ$

סעיף ד

שטח המשולש ABC (ישר זווית ב־C):

$$S_{ABC}=\frac{AC\cdot CB}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{65.25}\cdot\sqrt{116}}{2}=\sqrt{65.25\cdot 116}=\sqrt{7569}=87$$

התיכון BE מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח (בסיסים שווים $AE=EC$ וגובה משותף מ־B), ולכן:

$$S_{AEB}=\frac{87}{2}=43.5$$

אורך EB (במשולש ישר הזווית ECB, לפי פיתגורס):

$$EB=\sqrt{EC^2+CB^2}=\sqrt{65.25+116}=\sqrt{181.25}\approx 13.463$$

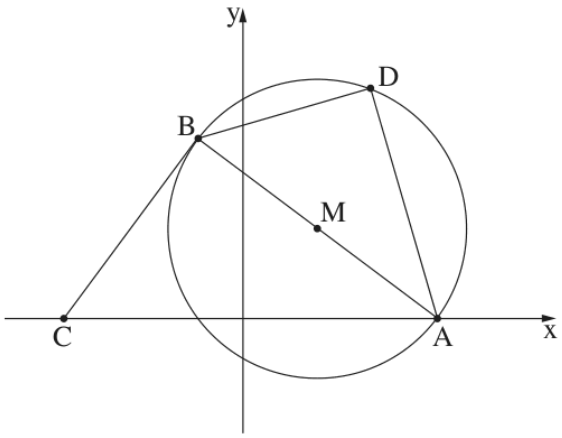
למשולשים AEK ו־AEB יש גובה משותף מהקודקוד A לישר EB, ולכן היחס בין השטחים שווה ליחס בין הבסיסים:

$$\frac{EK}{EB}=\frac{S_{AEK}}{S_{AEB}}=\frac{18}{43.5}$$

$$EK=\frac{18}{43.5}\cdot\sqrt{181.25}\approx 5.571$$

תשובה: $EK\approx 5.571$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 5



5. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו M.

המעגל חותך את החלק החיובי של ציר ה־x בנקודה A.

הנקודה B נמצאת על המעגל כך ש־AB הוא קוטר במעגל.

דרך הנקודה B העבירו משיק למעגל, החותך את ציר ה־x בנקודה C.

נתון כי משוואת המעגל היא $(x-5)^2+(y-6)^2=100$.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

ב. מצאו את משוואת המשיק BC.

ג. מצאו את אורך הצלע AC.

הנקודה D נמצאת על המעגל כך ש־AB חוצה את הזווית DAC.

ד. **(1)** הסבירו מדוע $\sphericalangle ADB = 90^\circ$.

(2) הוכיחו: $\triangle ABC \sim \triangle ADB$.

ה. מצאו פי כמה גדול שטח המשולש ABC משטח המשולש ADB.

פתרון מלא

סעיף א

הנקודה A נמצאת על ציר ה־x, ולכן $y=0$. נציב במשוואת המעגל:

$$(x-5)^2+(0-6)^2=100$$
$$(x-5)^2=64$$

לכן $x-5=8$ או $x-5=-8$, כלומר $x=13$ או $x=-3$.

A נמצאת על החלק **החיובי** של ציר ה־x, ולכן $x=13$.

תשובה: $A(13,\ 0)$

סעיף ב

מרכז המעגל $M(5,6)$. AB קוטר, ולכן M היא אמצע AB. נסמן $B(x_B,y_B)$:

$$\frac{13+x_B}{2}=5 \ \Rightarrow\ x_B=-3 \qquad \frac{0+y_B}{2}=6 \ \Rightarrow\ y_B=12$$

כלומר $B(-3,12)$. שיפוע הרדיוס MB:

$$m_{MB}=\frac{12-6}{-3-5}=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4}$$

המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה, ולכן:

$$m_{BC}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-1 \ \Rightarrow\ m_{BC}=\frac{4}{3}$$
$$y-12=\frac{4}{3}(x+3)$$
$$y=\frac{4}{3}x+16$$

תשובה: $y=\frac{4}{3}x+16$

סעיף ג

C היא נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה־x. נציב $y=0$:

$$0=\frac{4}{3}x+16 \;\Rightarrow\; x=-12$$

כלומר $C(-12,0)$. שתי הנקודות A ו־C נמצאות על ציר ה־x, ולכן:

$$AC=13-(-12)=25$$

תשובה: $AC=25$

סעיף ד (1)

$\sphericalangle ADB$ היא זווית היקפית הנשענת על הקוטר AB, ולכן $\sphericalangle ADB=90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה).

תשובה: זווית היקפית הנשענת על קוטר.

סעיף ד (2)

נתבונן במשולשים ABC ו־ADB:

1. $\sphericalangle ABC=90^\circ$ (המשיק BC מאונך לרדיוס MB בנקודת ההשקה, והרדיוס MB מונח על AB).
2. $\sphericalangle ADB=90^\circ$ (סעיף ד (1)).

מכאן $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADB$.

3. $\sphericalangle BAC=\sphericalangle DAB$ (AB חוצה את הזווית DAC).

לכן $\triangle ABC\sim\triangle ADB$ (לפי משפט הדמיון ז.ז.).

תשובה: $\triangle ABC\sim\triangle ADB$ **(ז.ז.)**

סעיף ה

לפי הדמיון (סעיף ד (2)) – $A\leftrightarrow A$, $B\leftrightarrow D$, $C\leftrightarrow B$ – הצלע AC במשולש ABC מתאימה לצלע AB במשולש ADB (שתיהן מול הזווית הישרה).

AB הוא קוטר, ורדיוס המעגל הוא $R=\sqrt{100}=10$, לכן $AB=20$. יחס הדמיון:

$$k=\frac{AC}{AB}=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$$

יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADB}}=k^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=1.5625$$

תשובה: פי $\frac{25}{16}$ (פי 1.5625).

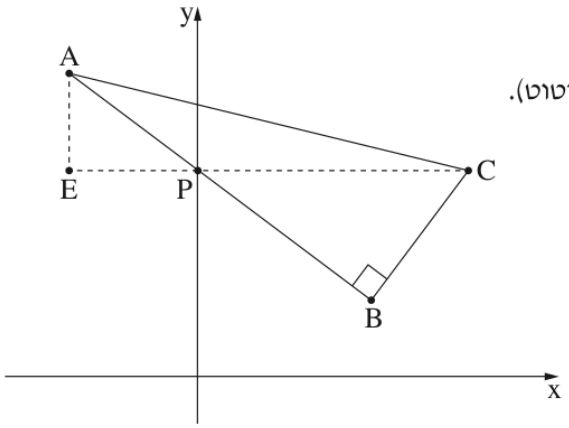
בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 4

4. ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$).

הצלע AB חותכת את ציר ה־y בנקודה P.

נתון כי הישר CP מקביל לציר ה־x.

הנקודה E נמצאת על הישר CP כך ש־AE מקביל לציר ה־y (ראו סרטוט).



א. הוכיחו כי $\Delta AEP \sim \Delta CBP$.

נתון: יחס הדמיון בין המשולש AEP ובין המשולש CBP הוא $\frac{3}{5}$, $CP = 12.5$.

ב. מצאו את אורך הקטע AP.

נתון: $A(-6, 14)$, שיעור ה־y של הנקודה P קטן מ־14.

ג. מצאו את שיעורי הנקודות P ו־C.

ד. **(1)** מצאו את משוואת הצלע AB.

(2) מצאו את שיעורי הקודקוד B.

(3) מצאו את שטח המרובע $AEBC$.

פתרון מלא

סעיף א

נתבונן במשולשים AEP ו־CBP:

1. AE מקביל לציר ה־y ו־EP (הישר CP) מקביל לציר ה־x, והצירים מאונכים זה לזה. לכן $AE \perp EP$, כלומר $\sphericalangle AEP = 90^\circ$.

2. $\sphericalangle CBP = 90^\circ$ (נתון: $\sphericalangle ABC = 90^\circ$).

מכאן $\sphericalangle AEP = \sphericalangle CBP$.

3. $\sphericalangle APE = \sphericalangle CPB$ (זוויות קודקודיות).

לכן $\triangle AEP \sim \triangle CBP$ (לפי משפט הדמיון ז.ז.).

תשובה: $\triangle AEP \sim \triangle CBP$ **(ז.ז.)**

סעיף ב

לפי הדמיון: $A \leftrightarrow C$, $E \leftrightarrow B$, $P \leftrightarrow P$. הצלע AP (מול הזווית הישרה במשולש AEP) מתאימה לצלע CP (מול הזווית הישרה במשולש CBP):

$$\frac{AP}{CP} = \frac{3}{5} \;\Rightarrow\; AP = \frac{3}{5} \cdot 12.5 = 7.5$$

תשובה: $AP = 7.5$

סעיף ג

P נמצאת על ציר ה־y, ולכן $x_P = 0$. E נמצאת מתחת ל־A (על ישר מקביל לציר ה־y), ולכן $x_E = -6$. מכאן:

$$EP = 0 - (-6) = 6$$

במשולש ישר הזווית AEP, לפי משפט פיתגורס:

$$AE^2 + EP^2 = AP^2 \;\Rightarrow\; AE^2 + 36 = 56.25 \;\Rightarrow\; AE^2 = 20.25 \;\Rightarrow\; AE = 4.5$$

שיעור ה־y של P קטן מ־14, ולכן $y_P = 14 - 4.5 = 9.5$, כלומר $P(0,\ 9.5)$.
C נמצאת על הישר CP המקביל לציר ה־x, ולכן $y_C = 9.5$, ו־$CP = 12.5$ (ו־C מימין ל־P):

$$x_C = 0 + 12.5 = 12.5 \ \Rightarrow \ C(12.5,\ 9.5)$$

תשובה: $P(0,\ 9.5)$, $C(12.5,\ 9.5)$

סעיף ד (1)
הישר AB עובר דרך $A(-6,14)$ ו־$P(0,9.5)$:

$$m_{AB} = \frac{9.5 - 14}{0 - (-6)} = \frac{-4.5}{6} = -0.75$$

P היא נקודת החיתוך עם ציר ה־y, ולכן:

$$y = -0.75x + 9.5$$

תשובה: $y = -0.75x + 9.5$

סעיף ד (2)
$CB \perp AB$, ולכן:

$$m_{CB} \cdot (-0.75) = -1 \ \Rightarrow \ m_{CB} = \frac{4}{3}$$

הישר CB עובר דרך $C(12.5, 9.5)$:

$$y - 9.5 = \frac{4}{3}(x - 12.5)$$

B היא נקודת החיתוך של AB ו־CB:

$$-0.75x + 9.5 = \frac{4}{3}(x - 12.5) + 9.5$$
$$-0.75x = \frac{4}{3}x - \frac{50}{3} \ \ / \cdot 12$$
$$-9x = 16x - 200 \ \Rightarrow \ 25x = 200 \ \Rightarrow \ x = 8$$
$$y = -0.75 \cdot 8 + 9.5 = 3.5$$

תשובה: $B(8,\ 3.5)$

סעיף ד (3)
האלכסון EC מחלק את המרובע $AEBC$ לשני משולשים: AEC (מעל EC) ו־EBC (מתחת ל־EC).
EC מקביל לציר ה־x:

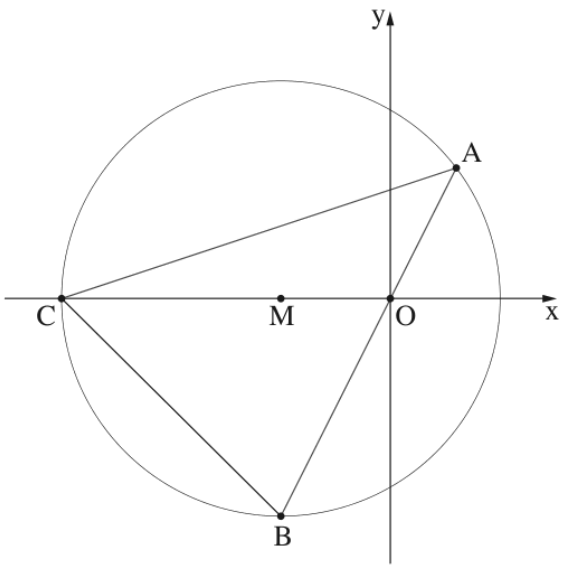
$$EC = 12.5 - (-6) = 18.5$$

הגובה מ־A ל־EC הוא $AE = 4.5$, והגובה מ־B ל־EC הוא ההפרש בשיעורי ה־y: $9.5 - 3.5 = 6$.

$$S_{AEC} = \frac{18.5 \cdot 4.5}{2} = 41.625 \qquad S_{EBC} = \frac{18.5 \cdot 6}{2} = 55.5$$
$$S_{AEBC} = 41.625 + 55.5 = 97.125$$

תשובה: $S_{AEBC} = 97.125$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 5



5. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו M, כמתואר בסרטוט.

נתון: $M(-5\,,0)$, $C(-15\,,0)$.

א. מצאו את משוואת המעגל.

נתון: משוואת הצלע AB היא $y=2x$.

ב. מצאו את שיעורי הקודקודים A ו־B.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את גודל הזווית ACO ואת גודל הזווית AOC.

ד. מצאו את שטח המשולש ABC.

הנקודה E נמצאת על הצלע AC כך ששטח המשולש EAB הוא 64.

ה. מצאו את אורך הקטע AE.

פתרון מלא

סעיף א

מרכז המעגל $M(-5,0)$, והנקודה $C(-15,0)$ נמצאת על המעגל. הרדיוס:

$$R = MC = -5-(-15) = 10$$

$$(x+5)^2+y^2=100$$

תשובה: $(x+5)^2+y^2=100$

סעיף ב

A ו־B הן נקודות החיתוך של הישר $y=2x$ עם המעגל. נציב:

$$(x+5)^2+(2x)^2=100$$

$$x^2+10x+25+4x^2=100 \;\Rightarrow\; 5x^2+10x-75=0 \;\;/:5$$

$$x^2+2x-15=0 \;\Rightarrow\; (x+5)(x-3)=0$$

$x=3\Rightarrow y=6$, ו־$x=-5\Rightarrow y=-10$. לפי הסרטוט A ברביע הראשון ו־B ברביע השלישי.

תשובה: $A(3,\;6)$, $B(-5,\;-10)$

סעיף ג

הזווית ACO: נוריד אנך מ־A לציר ה־x; רגלו בנקודה $(3,0)$. נקבל משולש ישר זווית שהניצב הנגדי לזווית C הוא $y_A=6$, והניצב הצמוד הוא $3-(-15)=18$:

$$\tan\sphericalangle ACO=\frac{6}{18}=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \sphericalangle ACO\approx 18.43^\circ$$

(אפשר גם: שיפוע AC הוא $m=\frac{6-0}{3-(-15)}=\frac{1}{3}$, ו־$\tan\alpha=m$.)

הזווית AOC: שיפוע הישר OA הוא 2, ולכן הזווית שלו עם הכיוון החיובי של ציר ה־x מקיימת $\tan\alpha=2$, כלומר $\alpha\approx 63.43^\circ$. הזווית AOC צמודה לה (C על החלק השלילי של ציר ה־x):

$$\sphericalangle AOC=180^\circ-63.43^\circ\approx 116.57^\circ$$

תשובה: $\sphericalangle ACO\approx 18.43^\circ$, $\sphericalangle AOC\approx 116.57^\circ$

סעיף ד

הקטע CO (על ציר ה־x) מחלק את המשולש ABC לשני משולשים, AOC ו־BOC, עם בסיס משותף $CO = 15$.

הגובה מ־A לציר ה־x הוא $|y_A| = 6$, והגובה מ־B הוא $|y_B| = 10$:

$$S_{ABC} = \frac{15 \cdot 6}{2} + \frac{15 \cdot 10}{2} = 45 + 75 = 120$$

תשובה: $S_{ABC} = 120$

סעיף ה

למשולשים EAB ו־CAB יש גובה משותף מהקודקוד B לישר AC, ולכן היחס בין השטחים שווה ליחס בין הבסיסים:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{S_{EAB}}{S_{CAB}} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$$

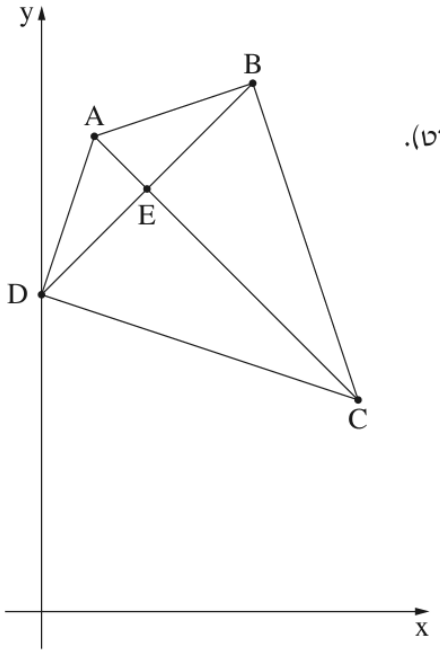
אורך AC:

$$AC = \sqrt{(3-(-15))^2 + (6-0)^2} = \sqrt{324 + 36} = \sqrt{360} \approx 18.974$$

$$AE = \frac{8}{15} \cdot \sqrt{360} \approx 10.12$$

תשובה: $AE \approx 10.12$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 4



4. נתון דלתון $ABCD$ $(AB = AD\ ,\ CB = CD)$.

הקודקוד D מונח על ציר ה־y, שיעור ה־y של הקודקוד D קטן מ־9 (ראו סרטוט).

נתון: $A(1,9)$, $C(6,4)$.

אורך הצלע AD הוא $\sqrt{10}$.

א. **(1)** מצאו את שיעורי הקודקוד D.

(2) מצאו את משוואת הישר BD.

E היא נקודת החיתוך של אלכסוני הדלתון.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה E.

הנקודה F נמצאת על הקטע EC.

ג. הוכיחו כי $\Delta ABF \cong \Delta ADF$.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה F שעבורה המרובע $FBAD$ הוא מעוין.

ה. לפניכם שתי טענות I–II. קבעו בעבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. המשולש ABC הוא ישר זווית.

II. הדלתון $ABCD$ הוא בר חסימה במעגל.

פתרון מלא

סעיף א (1)

D על ציר ה־y, ולכן $D(0,\ y)$. לפי נוסחת המרחק בין שתי נקודות:

$$AD = \sqrt{(1-0)^2 + (9-y)^2} = \sqrt{10}$$

$$1 + (9-y)^2 = 10 \ \Rightarrow\ (9-y)^2 = 9$$

לכן $9 - y = 3$ או $9 - y = -3$, כלומר $y = 6$ או $y = 12$. שיעור ה־y של D קטן מ־9, ולכן $y = 6$.

תשובה: $D(0,\ 6)$

סעיף א (2)

בדלתון, האלכסון הראשי AC (המחבר את הקודקודים שבין הצלעות השוות) הוא האנך האמצעי של האלכסון BD. לכן $BD \perp AC$.

$$m_{AC} = \frac{4-9}{6-1} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$m_{BD} \cdot (-1) = -1 \ \Rightarrow\ m_{BD} = 1$$

הישר BD עובר דרך $D(0,6)$ (נקודת החיתוך עם ציר ה־y):

$$y = x + 6$$

תשובה: $y = x + 6$

סעיף ב

משוואת הישר AC: שיפוע -1, דרך $A(1,9)$:

$$y - 9 = -1(x-1) \ \Rightarrow\ y = -x + 10$$

E היא נקודת החיתוך של AC ו־BD:

$$x+6=-x+10 \;\Rightarrow\; 2x=4 \;\Rightarrow\; x=2, \quad y=8$$

תשובה: $E(2,\ 8)$

סעיף ג

נתבונן במשולשים ABF ו־ADF:

1. $AB=AD$ (נתון – צלעות הדלתון).
2. $AF=AF$ (צלע משותפת).
3. F נמצאת על האלכסון AC, שהוא האנך האמצעי של BD (תכונת האלכסון הראשי בדלתון). כל נקודה על האנך האמצעי של קטע נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע, ולכן $FB=FD$.

לכן $\triangle ABF \cong \triangle ADF$ (לפי משפט החפיפה צ.צ.צ.).

תשובה: $\triangle ABF \cong \triangle ADF$ **(צ.צ.צ.)**

סעיף ד

במעוין האלכסונים חוצים זה את זה. במרובע $FBAD$ האלכסונים הם AF ו־BD, והם נחתכים בנקודה E (שניהם על הישרים AC ו־BD). E היא אמצע BD (כי AC הוא האנך האמצעי של BD), ונדרוש שתהיה גם אמצע AF. נסמן $F(x,y)$:

$$\frac{1+x}{2}=2 \;\Rightarrow\; x=3 \qquad \frac{9+y}{2}=8 \;\Rightarrow\; y=7$$

המרובע $FBAD$ הוא מקבילית שאלכסוניה מאונכים ($AF\perp BD$), ולכן הוא מעוין. $F(3,7)$ אכן נמצאת על הקטע EC (בין $x=2$ ל־$x=6$ על הישר $y=-x+10$).

תשובה: $F(3,\ 7)$

סעיף ה

נמצא את B: E היא אמצע BD, ולכן $B=(2\cdot 2-0,\ 2\cdot 8-6)=(4,\ 10)$.

טענה I:

$$m_{AB}=\frac{10-9}{4-1}=\frac{1}{3} \qquad m_{BC}=\frac{4-10}{6-4}=-3$$

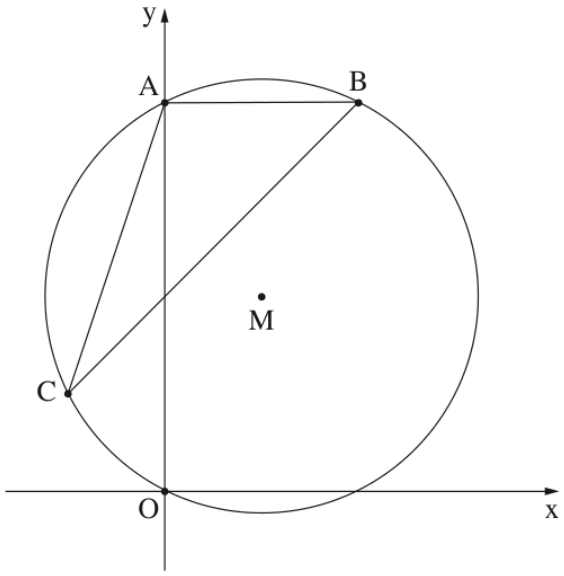
$$m_{AB}\cdot m_{BC}=\frac{1}{3}\cdot(-3)=-1$$

לכן $AB\perp BC$, כלומר $\sphericalangle ABC=90^\circ$, והמשולש ABC ישר זווית. הטענה **נכונה**.

טענה II: המשולשים ABC ו־ADC חופפים (צ.צ.צ.: $AB=AD$, $CB=CD$, AC משותפת), ולכן $\sphericalangle ADC=\sphericalangle ABC=90^\circ$. סכום הזוויות הנגדיות B ו־D בדלתון הוא $90^\circ+90^\circ=180^\circ$, ולכן הדלתון בר חסימה במעגל. הטענה **נכונה**.

תשובה: I נכונה, II נכונה.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 5



5. המשולש ABC חסום במעגל.

נתון כי מרכז המעגל M נמצא בנקודה $(4,8)$.

המעגל עובר דרך ראשית הצירים O (ראו סרטוט).

הנקודה A היא אחת מנקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה־ y.

א. **(1)** מצאו את משוואת המעגל.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה A.

הצלע AB מקבילה לציר ה־ x.

נתון כי שיפוע הישר BC הוא 1.

ב. **(1)** מצאו את משוואת הישר BC.

(2) מצאו את שיעורי הקודקוד C.

ג. מצאו את גודל הזווית ACB.

הנקודה E היא אמצע הצלע BC.

ד. מצאו את אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC.

פתרון מלא

סעיף א (1)

המעגל עובר דרך $O(0,0)$, ולכן הרדיוס הוא המרחק MO:

$$R^2=(4-0)^2+(8-0)^2=16+64=80$$

$$(x-4)^2+(y-8)^2=80$$

תשובה: $(x-4)^2+(y-8)^2=80$

סעיף א (2)

נציב $x=0$ במשוואת המעגל:

$$16+(y-8)^2=80\ \Rightarrow\ (y-8)^2=64$$

לכן $y-8=8$ או $y-8=-8$, כלומר $y=16$ או $y=0$. הנקודה $y=0$ היא הראשית O, ולכן $A(0,16)$.

תשובה: $A(0,\ 16)$

סעיף ב (1)

AB מקביל לציר ה־x, ולכן $y_B=16$. נציב במשוואת המעגל:

$$(x-4)^2+64=80\ \Rightarrow\ (x-4)^2=16$$

$x=8$ או $x=0$ (זו הנקודה A), ולכן $B(8,16)$.

הישר BC: שיפוע 1, דרך $B(8,16)$:

$$y-16=1\cdot(x-8)\ \Rightarrow\ y=x+8$$

תשובה: $y=x+8$

סעיף ב (2)

נציב $y=x+8$ במשוואת המעגל:

$$(x-4)^2+(x+8-8)^2=80 \;\Rightarrow\; x^2-8x+16+x^2=80$$
$$2x^2-8x-64=0 \;\Rightarrow\; x^2-4x-32=0 \;\Rightarrow\; (x-8)(x+4)=0$$

$x=8$ היא הנקודה B, ולכן $x=-4$, $y=-4+8=4$.

תשובה: $C(-4,\ 4)$

סעיף ג

נמצא את זוויות השיפוע של הישרים CA ו־CB (הזווית α שהישר יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה־x מקיימת $\tan\alpha=m$):

$$m_{CA}=\frac{16-4}{0-(-4)}=3 \;\Rightarrow\; \alpha_{CA}\approx 71.57^\circ$$
$$m_{CB}=1 \;\Rightarrow\; \alpha_{CB}=45^\circ$$

במשולש שהישרים CA ו־CB יוצרים עם ציר ה־x, זווית השיפוע של CA היא זווית חיצונית. לפי משפט הזווית החיצונית (זווית חיצונית במשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה), הזווית ACB שווה להפרש בין זוויות השיפוע:

$$\sphericalangle ACB\approx 71.57^\circ-45^\circ=26.57^\circ$$

תשובה: $\sphericalangle ACB\approx 26.57^\circ$

סעיף ד

E אמצע BC:

$$E\left(\frac{8+(-4)}{2},\ \frac{16+4}{2}\right)=E(2,\ 10)$$
$$AE=\sqrt{(2-0)^2+(10-16)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$$

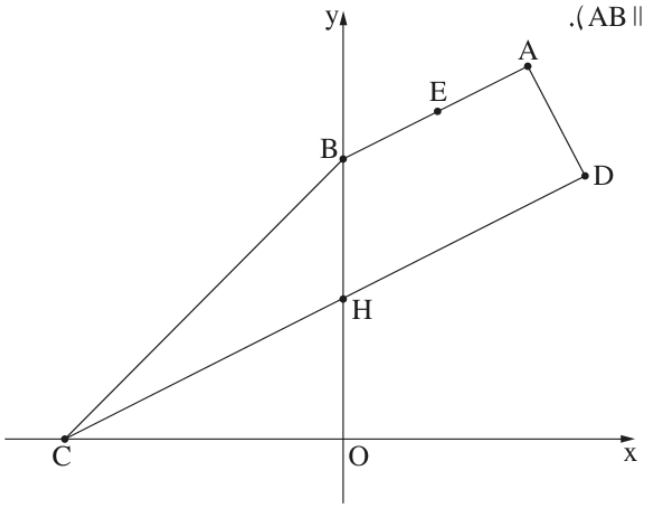
במשולש AEC הזווית שמול הצלע AE היא $\sphericalangle ACE=\sphericalangle ACB\approx 26.57^\circ$ (E על BC). לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{AE}{\sin\sphericalangle ACE}=2R \;\Rightarrow\; R=\frac{\sqrt{40}}{2\sin 26.57^\circ}\approx\frac{6.325}{0.8944}\approx 7.07$$

(הערך המדויק: $R=5\sqrt{2}$.)

תשובה: $R=5\sqrt{2}\approx 7.07$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 4



4. בסרטוט שלפניכם טרפז ישר זווית $ABCD$ ($AB \parallel DC$, $\sphericalangle D = 90^\circ$).

הקודקוד B נמצא על ציר ה־y, והקודקוד C נמצא על החלק השלילי של ציר ה־x.

הבסיס CD חותך את ציר ה־y בנקודה H.

נתון: הנקודה $E(2,7)$ נמצאת על הבסיס AB.

משוואת שוק הטרפז AD היא $y = -2x + 16$.

א. מצאו את שיעורי הקודקוד B.

נתון כי אורך השוק BC של הטרפז הוא $\sqrt{72}$.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד C.

ג. מצאו את גודל הזווית CBO (O היא ראשית הצירים).

ד. **(1)** מצאו את משוואת הישר CD.

(2) מצאו את גודל הזווית CHB.

ה. חשבו את שטח המשולש CBE.

פתרון מלא

סעיף א

בטרפז ישר הזווית $\sphericalangle D = 90^\circ$, ולכן $AD \perp DC$, ומכיוון ש־$AB \parallel DC$ גם $AD \perp AB$.

$$m_{AD} = -2 \;\Rightarrow\; m_{AB} \cdot (-2) = -1 \;\Rightarrow\; m_{AB} = \frac{1}{2}$$

הישר AB עובר דרך $E(2,7)$:

$$y - 7 = \frac{1}{2}(x - 2) \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}x + 6$$

B על ציר ה־y ($x = 0$), ולכן $y_B = 6$.

תשובה: $B(0,\ 6)$

סעיף ב

C על החלק השלילי של ציר ה־x: $C(c,\ 0)$ עם $c < 0$. לפי נוסחת המרחק:

$$BC = \sqrt{(c-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{72}$$

$$c^2 + 36 = 72 \;\Rightarrow\; c^2 = 36 \;\Rightarrow\; c = -6$$

($c = 6$ נפסל, כי C על החלק השלילי.)

תשובה: $C(-6,\ 0)$

סעיף ג

המשולש CBO ישר זווית ב־O (הצירים מאונכים), עם $CO = 6$ ו־$BO = 6$:

$$\tan \sphericalangle CBO = \frac{CO}{BO} = \frac{6}{6} = 1 \;\Rightarrow\; \sphericalangle CBO = 45^\circ$$

תשובה: 45°

סעיף ד (1)

$CD \parallel AB$, ולכן $m_{CD} = \frac{1}{2}$. הישר עובר דרך $C(-6,0)$:

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x+6) \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}x + 3$$

תשובה: $y = \frac{1}{2}x + 3$

סעיף ד (2)

H היא נקודת החיתוך של CD עם ציר ה־y: $H(0,3)$.

במשולש ישר הזווית CHO (ישר זווית ב־O): $CO = 6$, $HO = 3$:

$$\tan \sphericalangle CHO = \frac{CO}{HO} = \frac{6}{3} = 2 \;\Rightarrow\; \sphericalangle CHO \approx 63.43^\circ$$

הזוויות CHO ו־CHB צמודות (B, H, O על ציר ה־y, ו־H ביניהן):

$$\sphericalangle CHB = 180^\circ - 63.43^\circ \approx 116.57^\circ$$

תשובה: $\sphericalangle CHB \approx 116.57^\circ$

סעיף ה

נחלק את המשולש בעזרת ציר ה־y. הישר CE עובר דרך $C(-6,0)$ ו־$E(2,7)$:

$$m_{CE} = \frac{7-0}{2-(-6)} = \frac{7}{8} \qquad y = \frac{7}{8}(x+6)$$

הוא חותך את ציר ה־y בנקודה $G\left(0,\ \frac{42}{8}\right) = G(0,\ 5.25)$. הקטע BG נמצא על ציר ה־y:

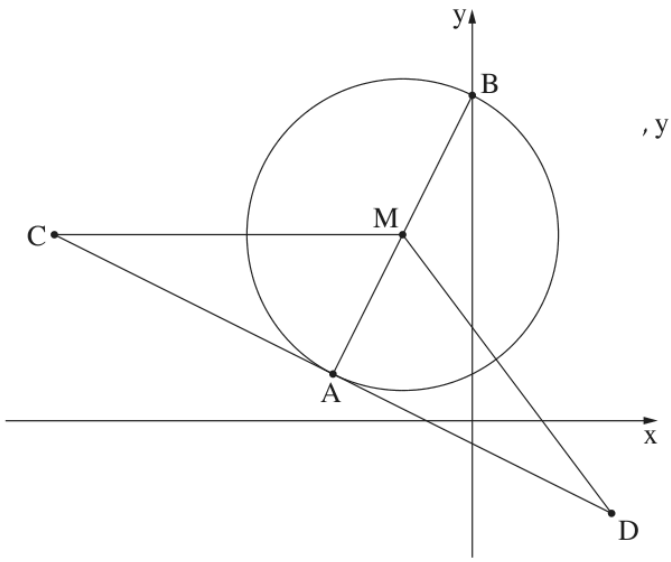
$$BG = 6 - 5.25 = 0.75$$

BG מחלק את המשולש CBE לשני משולשים עם הבסיס המשותף BG; הגובה של כל אחד הוא המרחק האופקי של C (6) ושל E (2) מציר ה־y:

$$S_{CBE} = S_{CBG} + S_{GBE} = \frac{0.75 \cdot 6}{2} + \frac{0.75 \cdot 2}{2} = 2.25 + 0.75 = 3$$

תשובה: $S_{CBE} = 3$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 5



5. הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו M.

הקטע CD משיק למעגל בנקודה A.

הנקודה B היא אחת מנקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה־y, כמתואר בסרטוט.

AM הוא חוצה זווית CMD.

א. הוכיחו כי משולש CMD הוא שווה שוקיים.

נתון כי משוואת המעגל היא $(x+3)^2+(y-8)^2=45$ וכי שיעור ה־y של הנקודה B גדול מ־8.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות B ו־A.

נתון כי הקטע CM מקביל לציר ה־x.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה C.

הנקודה E היא אמצע הקטע CM, והנקודה F היא אמצע הקטע DM.

ד. **(1)** הוכיחו כי $\triangle EMF \sim \triangle CMD$.

(2) חשבו את היחס בין שטח המשולש CMD ובין שטח המשולש EMF.

פתרון מלא

סעיף א

נתבונן במשולשים CMA ו־DMA:

1. $\sphericalangle CMA = \sphericalangle DMA$ (MA חוצה את הזווית CMD – נתון).
2. $MA = MA$ (צלע משותפת).
3. $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MAD = 90^\circ$ (המשיק CD מאונך לרדיוס MA בנקודת ההשקה).

לכן $\triangle CMA \cong \triangle DMA$ (לפי משפט החפיפה ז.צ.ז.), ומכאן $MC = MD$ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים).

כלומר המשולש CMD שווה שוקיים.

תשובה: הוכחה בפתרון המלא ($MC = MD$).

סעיף ב

מרכז המעגל $M(-3,8)$. B על ציר ה־y, נציב $x=0$:

$$(0+3)^2+(y-8)^2=45 \;\Rightarrow\; (y-8)^2=36$$

$y-8=6$ או $y-8=-6$; שיעור ה־y של B גדול מ־8, ולכן $y=14$: $B(0,14)$.

AB קוטר, ולכן M היא אמצע AB. נסמן $A(x_A,y_A)$:

$$\frac{y_A+14}{2}=8 \;\Rightarrow\; y_A=2 \qquad \frac{x_A+0}{2}=-3 \;\Rightarrow\; x_A=-6$$

תשובה: $B(0,\ 14)$, $A(-6,\ 2)$

סעיף ג

שיפוע הרדיוס MA:

$$m_{MA} = \frac{8-2}{-3-(-6)} = \frac{6}{3} = 2$$

המשיק CD מאונך לרדיוס MA:

$$m_{CD} \cdot 2 = -1 \;\Rightarrow\; m_{CD} = -\frac{1}{2}$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x+6) \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}x - 1$$

CM מקביל לציר ה־x, ולכן $y_C = y_M = 8$. נציב במשוואת המשיק:

$$8 = -\frac{1}{2}x - 1 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}x = 9 \;\Rightarrow\; x = -18$$

תשובה: $C(-18,\ 8)$

סעיף ד (1)

נתבונן במשולשים CMD ו־EMF:

1. $\frac{ME}{MC} = \frac{1}{2}$ (E אמצע CM).
2. $\frac{MF}{MD} = \frac{1}{2}$ (F אמצע DM).
3. $\sphericalangle EMF = \sphericalangle CMD$ (זווית משותפת).

לכן $\triangle CMD \sim \triangle EMF$ (לפי משפט הדמיון צ.ז.צ.: שתי צלעות פרופורציוניות והזווית שביניהן שווה).

תשובה: $\triangle CMD \sim \triangle EMF$ **(צ.ז.צ.)**

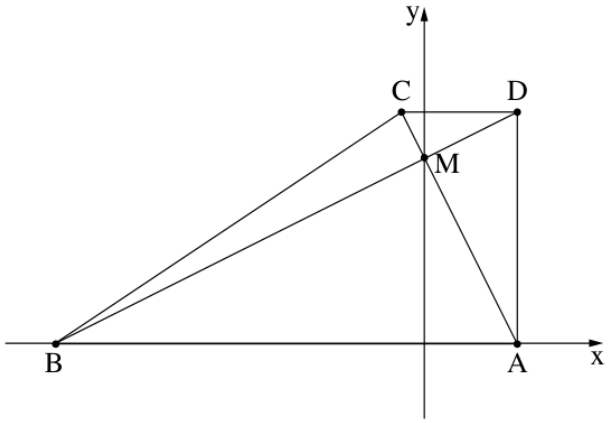
סעיף ד (2)

יחס הדמיון בין המשולש CMD למשולש EMF הוא $k = \frac{MC}{ME} = 2$. יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\frac{S_{CMD}}{S_{EMF}} = k^2 = 2^2 = 4$$

תשובה: $4:1$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 4



4. נתון טרפז ישר זווית $ABCD$ $(AD \perp AB \,,\, AB \parallel DC)$.
הקודקודים A ו־B נמצאים על ציר ה־x, כמתואר בסרטוט.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה M, שנמצאת על ציר ה־y.
נתון: האלכסון AC מאונך לאלכסון BD.
משוואת הישר AC היא: $y = -2x + 8$.

א. מצאו את משוואת הישר BD.

ב. מצאו את שיעורי הקודקודים $A \,,\, B \,,\, C$ ו־D.

ג. **(1)** חשבו את גודל הזווית ABD.

(2) חשבו את גודל הזווית BCD.

ד. מצאו את שטח המשולש BCD.

הנקודה F נמצאת על המשך הצלע CD כך ששטח המשולש BFC גדול פי 2 משטח המשולש BCD.

ה. מצאו את שיעורי הנקודה F (מצאו את אחת משתי האפשרויות).

פתרון מלא

סעיף א

הנקודה M נמצאת על ציר ה־y ($x = 0$) ועל הישר AC:

$$y = -2 \cdot 0 + 8 = 8 \;\Rightarrow\; M(0,8)$$

שיפוע AC הוא $m_{AC} = -2$. נתון $AC \perp BD$, ולכן $m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$:

$$-2 \cdot m_{BD} = -1 \;\Rightarrow\; m_{BD} = \frac{1}{2}$$

הישר BD עובר דרך $M(0,8)$:

$$y - 8 = \frac{1}{2}(x - 0) \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}x + 8$$

תשובה: $y = \frac{1}{2}x + 8$

סעיף ב

A – נקודת החיתוך של AC עם ציר ה־x ($y = 0$):

$$0 = -2x + 8 \;\Rightarrow\; x = 4 \;\Rightarrow\; A(4,0)$$

B – נקודת החיתוך של BD עם ציר ה־x:

$$0 = \frac{1}{2}x + 8 \;\Rightarrow\; x = -16 \;\Rightarrow\; B(-16,0)$$

D – נתון $AD \perp AB$, ו־AB מונח על ציר ה־x, ולכן AD אנכי: $x = 4$. הנקודה D על BD:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 4 + 8 = 10 \;\Rightarrow\; D(4,10)$$

C – נתון $DC \parallel AB$, ולכן DC מקביל לציר ה־x: $y = 10$. הנקודה C על AC:

$$10 = -2x + 8 \;\Rightarrow\; x = -1 \;\Rightarrow\; C(-1,10)$$

תשובה: $A(4,0)$, $B(-16,0)$, $C(-1,10)$, $D(4,10)$

סעיף ג (1)

הזווית ABD היא הזווית שהישר BD יוצר עם ציר ה־x (הצלע BA מונחת על ציר ה־x). לכן:

$$\tan\alpha = m_{BD} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 26.57^\circ$$

(אפשר גם במשולש ישר הזווית ABD: $\tan\angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.)

תשובה: $\angle ABD \approx 26.57^\circ$

סעיף ג (2)

שיפוע הישר BC:

$$m_{BC} = \frac{10-0}{-1-(-16)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

הזווית שהישר BC יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה־x: $\tan\beta = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \beta \approx 33.69^\circ$, כלומר $\angle ABC \approx 33.69^\circ$.

$DC \parallel AB$, ולכן $\angle BCD$ ו־$\angle ABC$ הן זוויות חד־צדדיות בין ישרים מקבילים, שסכומן 180°:

$$\angle BCD = 180^\circ - 33.69^\circ = 146.31^\circ$$

תשובה: $\angle BCD \approx 146.31^\circ$

סעיף ד

ניקח את CD כבסיס. CD מקביל לציר ה־x, ולכן אורכו הוא הפרש שיעורי ה־x:

$$CD = 4-(-1) = 5$$

הגובה מ־B לישר CD ($y=10$) הוא המרחק האנכי: $10-0=10$ (זה גם הגובה AD של הטרפז).

$$S_{BCD} = \frac{CD\cdot h}{2} = \frac{5\cdot 10}{2} = 25$$

תשובה: 25 יחידות שטח.

סעיף ה

F נמצאת על הישר CD, כלומר $F(x,10)$. במשולש BFC הבסיס CF מונח על הישר $y=10$, והגובה מ־B אליו הוא שוב 10.

נדרש $S_{BFC} = 2\cdot S_{BCD} = 2\cdot 25 = 50$:

$$\frac{CF\cdot 10}{2} = 50 \;\Rightarrow\; CF = 10$$

מ־$C(-1,10)$ נתקדם 10 יחידות ימינה או שמאלה:

$$F(-1+10,10) = (9,10)$$

או

$$F(-1-10,10) = (-11,10)$$

שתי הנקודות נמצאות על המשך הצלע CD (אחת מעבר ל־D, השנייה מעבר ל־C).

תשובה: $F(9,10)$ **או** $F(-11,10)$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 5

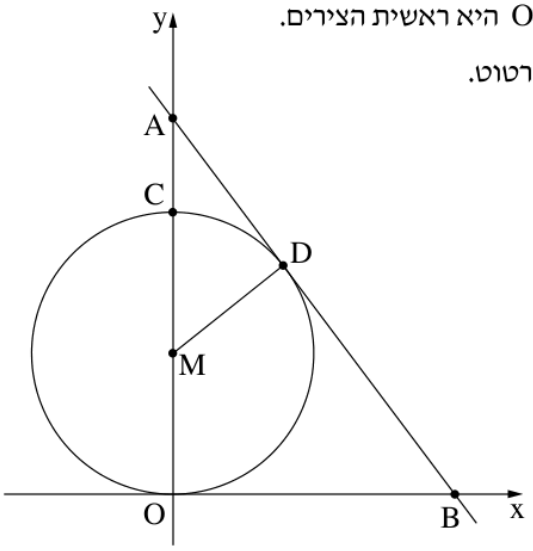
5. נתון מעגל שמרכזו M נמצא על החלק החיובי של ציר ה־ y. הנקודה O היא ראשית הצירים.

המעגל משיק לציר ה־ x וחותך את ציר ה־ y בנקודה C, כמתואר בסרטוט.

דרך הנקודה D שעל המעגל העבירו משיק למעגל.

המשיק חותך את ציר ה־ x בנקודה B ואת ציר ה־ y בנקודה A.

נתון כי משוואת המשיק היא: $4x + 3y = 40$.



א. מצאו את אורך הקטע AB.

ב. הוכיחו כי המרובע $OMDB$ הוא דלתון.

ג. **(1)** הוכיחו: $\Delta ADM \sim \Delta AOB$.

(2) מצאו את רדיוס המעגל.

ד. מצאו את משוואת המעגל.

ה. האם הדלתון $OMDB$ בר חסימה במעגל?

אם כן – מצאו את השיעורים של מרכז המעגל החוסם את הדלתון. אם לא – הסבירו מדוע.

פתרון מלא

סעיף א

נמצא את נקודות החיתוך של המשיק $4x + 3y = 40$ עם הצירים.

A על ציר ה־y ($x = 0$): $3y = 40 \Rightarrow y = \frac{40}{3}$, כלומר $A\left(0, 13\frac{1}{3}\right)$.

B על ציר ה־x ($y = 0$): $4x = 40 \Rightarrow x = 10$, כלומר $B(10, 0)$.

במשולש ישר הזווית AOB ($\angle AOB = 90°$) לפי משפט פיתגורס:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = \left(\frac{40}{3}\right)^2 + 10^2 = \frac{1600}{9} + \frac{900}{9} = \frac{2500}{9}$$

$$AB = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

תשובה: $AB = 16\frac{2}{3}$

סעיף ב

$MO = MD$ (רדיוסים במעגל).

המעגל משיק לציר ה־x בנקודה O, ולכן BO הוא קטע משיק מהנקודה B למעגל. גם BD הוא קטע משיק מ־B למעגל. לכן $BO = BD$ (שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה).

במרובע $OMDB$ יש שני זוגות של צלעות סמוכות שוות ($MO = MD$, $BO = BD$), ולכן $OMDB$ הוא דלתון (מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות הוא דלתון).

תשובה: הוכחה.

סעיף ג (1)

נשווה את המשולשים ADM ו־AOB:

1. $\angle MAD = \angle BAO$ (זווית משותפת).
2. $\angle ADM = 90°$ (רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה).
3. $\angle AOB = 90°$ (הזווית בין הצירים).

מכאן $\angle ADM = \angle AOB$, ולכן $\triangle ADM \sim \triangle AOB$ (לפי משפט הדמיון ז.ז – שתי זוויות שוות בהתאמה).

תשובה: הוכחה.

סעיף ג (2)

נסמן את הרדיוס ב־R. אז $MD = R$, וגם $MO = R$ ולכן $AM = AO - MO = \frac{40}{3} - R$.

מהדמיון בסעיף ג (1) נובע יחס הצלעות המתאימות (מול זוויות שוות):

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MD}{BO} \;\Rightarrow\; \frac{\frac{40}{3} - R}{\frac{50}{3}} = \frac{R}{10}$$

$$10\left(\frac{40}{3} - R\right) = \frac{50}{3}R \;\; / \cdot 3$$

$$400 - 30R = 50R \;\Rightarrow\; 80R = 400 \;\Rightarrow\; R = 5$$

תשובה: $R = 5$

סעיף ד

המעגל משיק לציר ה־x בראשית הצירים ומרכזו על החלק החיובי של ציר ה־y, ולכן $M(0, R) = (0, 5)$.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \;\Rightarrow\; x^2 + (y - 5)^2 = 25$$

תשובה: $x^2 + (y-5)^2 = 25$

סעיף ה

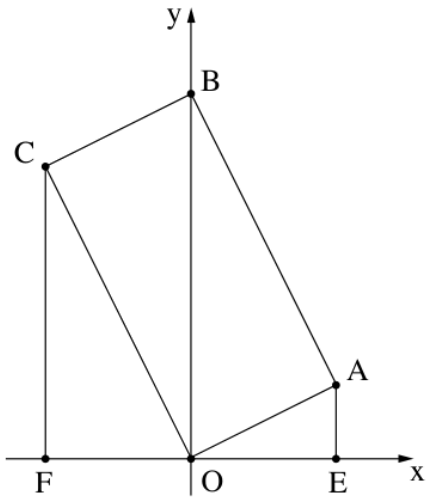
במרובע $OMDB$: $\angle MOB = 90^\circ$ (בין הצירים) ו־$\angle MDB = 90^\circ$ (רדיוס מאונך למשיק). אלה זוויות נגדיות במרובע, וסכומן $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. לכן הדלתון **בר חסימה** במעגל (מרובע שבו סכום זוג זוויות נגדיות הוא 180° הוא בר חסימה במעגל).

המשולשים MOB ו־MDB ישרי זווית, והיתר המשותף שלהם הוא MB. במשולש ישר זווית מרכז המעגל החוסם הוא אמצע היתר, ולכן מרכז המעגל החוסם את הדלתון הוא אמצע הקטע MB, כאשר $M(0,5)$ ו־$B(10,0)$:

$$\left(\frac{0+10}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = (5,\ 2.5)$$

תשובה: כן; המרכז הוא $(5,\ 2.5)$.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 4



4. במקבילית OABC הקודקוד B מונח על ציר ה־y והנקודה O היא ראשית הצירים.

מן הקודקודים A ו־C העבירו אנכים לציר ה־x, החותכים אותו בנקודות E ו־F בהתאמה (ראו סרטוט).

נתון: $\sphericalangle AOE = \sphericalangle COB$.

א. **(1)** הוכיחו: $\sphericalangle AOE = \sphericalangle OCF$.

(2) הוכיחו כי המשולשים OCF ו־AOE דומים.

שטח המשולש OCF גדול פי 4 משטח המשולש AOE.

משוואות הישרים AE ו־CF הן $x = 4$ ו־$x = -4$ בהתאמה.

ב. **(1)** מצאו את יחס הדמיון בין המשולשים OCF ו־AOE.

(2) מצאו את אורכי הצלעות OE ו־CF.

(3) מצאו את שיעורי הקודקודים C ו־A.

ג. מצאו את שיעורי הקודקוד B.

ד. הוכיחו כי המקבילית OABC היא מלבן.

אלכסוני המלבן OABC נפגשים בנקודה M.

ה. האם נכון כי $S_{AOE} + S_{CFO} = 2 \cdot S_{ABM}$? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

הנקודות F, O ו־E נמצאות על ציר ה־x, והנקודה B על ציר ה־y, ולכן $\angle FOB = 90^\circ$ (הזווית בין הצירים).
לכן:

$$\angle COF + \angle COB = 90^\circ \;\Rightarrow\; \angle COB = 90^\circ - \angle COF$$

במשולש OCF: $\angle CFO = 90^\circ$ (CF אנך לציר ה־x), ולכן (סכום הזוויות במשולש 180°):

$$\angle OCF = 90^\circ - \angle COF$$

מכאן $\angle OCF = \angle COB$, ומהנתון $\angle AOE = \angle COB$ נקבל:

$$\angle AOE = \angle OCF$$

תשובה: הוכחה.

סעיף א (2)

במשולשים OCF ו־AOE:

1. $\angle OCF = \angle AOE$ (הוכח בסעיף א (1)).
2. $\angle CFO = \angle OEA = 90^\circ$ (CF ו־AE אנכים לציר ה־x).

לכן $\triangle OCF \sim \triangle AOE$ (לפי משפט הדמיון ז.ז). ההתאמה: $C \leftrightarrow O$, $F \leftrightarrow E$, $O \leftrightarrow A$, כלומר:

$$\frac{CF}{OE} = \frac{FO}{EA} = \frac{OC}{AO}$$

תשובה: הוכחה.

סעיף ב (1)

היחס בין שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון. נסמן את יחס הדמיון ב־k:

$$k^2 = \frac{S_{OCF}}{S_{AOE}} = 4 \;\Rightarrow\; k = 2$$

תשובה: יחס הדמיון הוא 2 (המשולש OCF גדול פי 2).

סעיף ב (2)

הישר AE הוא $x = 4$, ולכן $E(4,0)$ ו־$OE = 4$. הישר CF הוא $x = -4$, ולכן $F(-4,0)$ ו־$OF = 4$.

לפי יחס הדמיון (סעיף א (2)): $\frac{CF}{OE} = 2$:

$$CF = 2 \cdot OE = 2 \cdot 4 = 8$$

תשובה: $OE = 4$**,** $CF = 8$

סעיף ב (3)

C נמצאת על הישר $x = -4$, מעל ציר ה־x במרחק $CF = 8$, ולכן $C(-4,8)$.

לפי יחס הדמיון $\frac{FO}{EA} = 2$:

$$EA = \frac{FO}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

A נמצאת על הישר $x = 4$, מעל ציר ה־x, ולכן $A(4,2)$.

תשובה: $A(4,2)$**,** $C(-4,8)$

סעיף ג

במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה, ולכן לאלכסונים OB ו־AC יש אותו אמצע.

אמצע AC:

$$M\left(\frac{4+(-4)}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (0,5)$$

M הוא גם אמצע OB, כאשר $O(0,0)$. נסמן $B(x_B, y_B)$:

$$\frac{0+x_B}{2} = 0, \quad \frac{0+y_B}{2} = 5 \;\Rightarrow\; B(0,10)$$

(ואכן B על ציר ה־y, כנתון.)

תשובה: $B(0,10)$

סעיף ד

נחשב את שיפועי הצלעות OA ו־OC:

$$m_{OA} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}, \qquad m_{OC} = \frac{8-0}{-4-0} = -2$$

$$m_{OA} \cdot m_{OC} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$$

לכן $OA \perp OC$, כלומר $\angle AOC = 90^\circ$. מקבילית שיש בה זווית ישרה היא מלבן.

תשובה: הוכחה.

סעיף ה

שטחי המשולשים ישרי הזווית:

$$S_{AOE} = \frac{OE \cdot EA}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4, \qquad S_{CFO} = \frac{OF \cdot CF}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$$

$$S_{AOE}+S_{CFO}=4+16=20$$

שטח המשולש ABM**:** אורכי צלעות המלבן:

$$OA=\sqrt{(4-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{20},\qquad OC=\sqrt{(-4-0)^2+(8-0)^2}=\sqrt{80}$$

$$S_{OABC}=\sqrt{20}\cdot\sqrt{80}=\sqrt{1600}=40$$

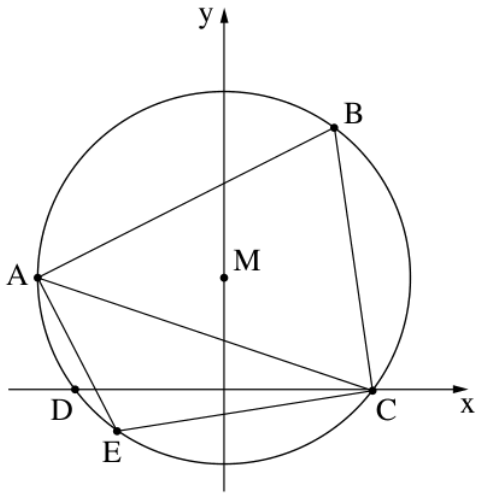
אלכסוני המלבן שווים וחוצים זה את זה, ולכן הם מחלקים אותו לארבעה משולשים שווי שטח (לכל שני משולשים סמוכים בסיסים שווים וגובה משותף). לכן:

$$S_{ABM}=\frac{40}{4}=10\ \Rightarrow\ 2\cdot S_{ABM}=20$$

קיבלנו $S_{AOE}+S_{CFO}=20=2\cdot S_{ABM}$.

תשובה: כן, נכון: $4+16=20=2\cdot 10$**.**

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 5



5. במעגל חסום משולש חד זוויות ABC.

נתון: $A(-5,3)$, $B(3,7)$.

מרכז המעגל M נמצא על ציר ה־y.

המעגל חותך את ציר ה־x בנקודות C ו־D,

כמתואר בסרטוט שלפניכם.

א. **(1)** הראו כי שיעורי מרכז המעגל M הם $(0,3)$.

(2) מצאו את משוואת המעגל.

(3) מצאו את שיעורי הנקודות C ו־D.

ב. **(1)** מצאו את אורך הצלע AC.

(2) מצאו את גודל הזווית ABC.

הנקודה E נמצאת על הקשת הקטנה AC.

נתון: $EC=7$.

ג. מהו גודל הזווית AEC? נמקו את תשובתכם.

ד. מצאו את שטח המשולש AEC.

פתרון מלא

סעיף א (1)

M על ציר ה־y, ולכן $M(0,b)$. MA ו־MB רדיוסים, כלומר $MA=MB$, ולכן גם $MA^2=MB^2$:

$$(-5-0)^2+(3-b)^2=(3-0)^2+(7-b)^2$$

$$25+9-6b+b^2=9+49-14b+b^2$$

$$34-6b=58-14b \;\Rightarrow\; 8b=24 \;\Rightarrow\; b=3$$

לכן $M(0,3)$.

תשובה: $M(0,3)$ **– הוכחה.**

סעיף א (2)

הרדיוס הוא המרחק מ־$M(0,3)$ ל־$A(-5,3)$:

$$R^2=(-5-0)^2+(3-3)^2=25$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \;\Rightarrow\; x^2+(y-3)^2=25$$

תשובה: $x^2+(y-3)^2=25$

סעיף א (3)

נקודות החיתוך עם ציר ה־x: נציב $y=0$:

$$x^2+9=25 \;\Rightarrow\; x^2=16 \;\Rightarrow\; x=\pm 4$$

לפי הסרטוט C מימין ו־D משמאל.

תשובה: $C(4,0)$, $D(-4,0)$

סעיף ב (1)

$$AC = \sqrt{(4-(-5))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \approx 9.49$$

תשובה: $AC = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \approx 9.49$

סעיף ב (2)

המשולש ABC חסום במעגל שרדיוסו $R = 5$. לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{90}}{\sin \angle ABC} = 10$$

$$\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{90}}{10} \approx 0.9487$$

המשולש חד זוויות, ולכן הזווית חדה:

$$\angle ABC \approx 71.57^\circ$$

(אפשר גם במשפט הקוסינוסים, עם $AB = \sqrt{80}$, $BC = \sqrt{50}$.)

תשובה: $\angle ABC \approx 71.57^\circ$

סעיף ג

הנקודות A, E, C, B נמצאות על המעגל, ולכן המרובע $ABCE$ חסום במעגל. במרובע חסום במעגל סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180°:

$$\angle AEC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 71.57^\circ = 108.43^\circ$$

תשובה: $\angle AEC \approx 108.43^\circ$

סעיף ד

במשולש AEC ידועים: $AC = \sqrt{90}$, $EC = 7$, $\angle AEC \approx 108.43^\circ$. נסמן $AE = t$ ונשתמש במשפט הקוסינוסים:

$$AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2 \cdot AE \cdot EC \cdot \cos \angle AEC$$

$$90 = t^2 + 49 - 2 \cdot t \cdot 7 \cdot \cos 108.43^\circ$$

$\cos 108.43^\circ \approx -0.3162$, ולכן:

$$90 = t^2 + 49 + 4.427t \;\Rightarrow\; t^2 + 4.427t - 41 = 0$$

$$t = \frac{-4.427 + \sqrt{4.427^2 + 164}}{2} \approx 4.561$$

(הפתרון השלילי נפסל.) השטח:

$$S_{AEC} = \frac{AE \cdot EC \cdot \sin \angle AEC}{2} = \frac{4.561 \cdot 7 \cdot \sin 108.43^\circ}{2} \approx \frac{4.561 \cdot 7 \cdot 0.9487}{2} \approx 15.145$$

תשובה: $S_{AEC} \approx 15.145$ **יחידות שטח.**

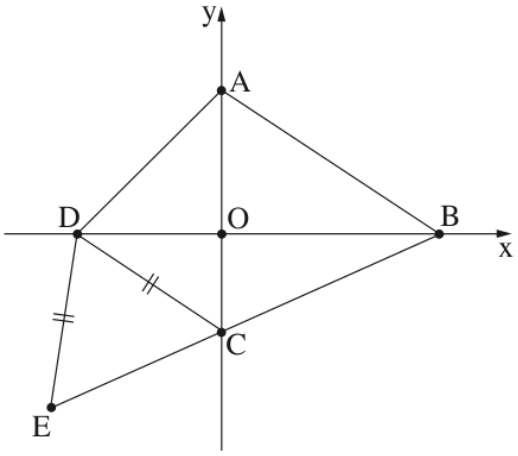
בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 4

4. המרובע $ABCD$ הוא טרפז ($AB \parallel CD$), שכל קודקודיו מונחים על הצירים, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

ראשית הצירים O היא מפגש האלכסונים של הטרפז.

נתון: $AO = OD$, $A(0\,,6)$.

ידוע כי שטח המשולש ABD שווה ל־ 45 .



א. **(1)** מצאו את האורך של BD .

(2) מצאו את שיעורי הקודקודים D ו־ B .

ב. מצאו את משוואת הצלע CD .

ג. **(1)** מצאו את גודל הזווית OBC .

(2) מצאו את גודל הזווית ABC .

הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC

ונתון כי $DE = DC$ (ראו סרטוט).

ד. מצאו את היקף המשולש CDE .

פתרון מלא

סעיף א (1)

במשולש ABD הבסיס BD מונח על ציר ה־x, והגובה אליו הוא AO (כי AO על ציר ה־y, מאונך ל־BD).
$A(0,6)$, ולכן $AO = 6$.

$$S_{ABD} = \frac{BD \cdot AO}{2} \;\Rightarrow\; 45 = \frac{BD \cdot 6}{2} = 3 \cdot BD \;\Rightarrow\; BD = 15$$

תשובה: $BD = 15$

סעיף א (2)

נתון $AO = OD$, ולכן $OD = 6$. D נמצאת על החלק השלילי של ציר ה־x: $D(-6,0)$.
$BD = 15$, ולכן $OB = 15 - 6 = 9$ ו־$B(9,0)$.

תשובה: $D(-6,0)$, $B(9,0)$

סעיף ב

$CD \parallel AB$, ולכן השיפועים שווים:

$$m_{AB} = \frac{0-6}{9-0} = -\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; m_{CD} = -\frac{2}{3}$$

הישר CD עובר דרך $D(-6,0)$:

$$y - 0 = -\frac{2}{3}(x+6) \;\Rightarrow\; y = -\frac{2}{3}x - 4$$

תשובה: $y = -\frac{2}{3}x - 4$

סעיף ג (1)

C נמצאת על ציר ה־y ועל הישר CD: $y = -\frac{2}{3}\cdot 0 - 4 = -4$, כלומר $C(0,-4)$.
במשולש ישר הזווית OBC ($\angle BOC = 90°$): $OC = 4$, $OB = 9$.

$$\tan\angle OBC = \frac{OC}{OB} = \frac{4}{9} \;\Rightarrow\; \angle OBC \approx 23.96^\circ$$

תשובה: $\angle OBC \approx 23.96^\circ$

סעיף ג (2)

במשולש ישר הזווית ABO: $AO = 6$, $OB = 9$.

$$\tan\angle ABO = \frac{AO}{OB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \angle ABO \approx 33.69^\circ$$
$$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC \approx 33.69^\circ + 23.96^\circ = 57.65^\circ$$

תשובה: $\angle ABC \approx 57.65^\circ$

סעיף ד

$DC \parallel AB$ ו־E על המשך BC, ולכן $\angle DCE = \angle ABC \approx 57.65^\circ$ (זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים).

$DE = DC$, ולכן המשולש CDE שווה שוקיים ו־$\angle DEC = \angle DCE \approx 57.65^\circ$ (זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים). מכאן:

$$\angle CDE = 180^\circ - 2\cdot 57.65^\circ = 64.7^\circ$$

אורך DC (במשולש ישר הזווית DOC, לפי משפט פיתגורס):

$$DC = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7.211$$

לפי משפט הסינוסים במשולש CDE:

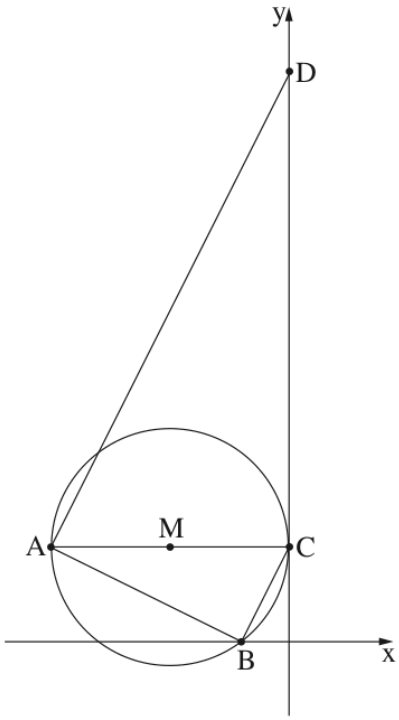
$$\frac{EC}{\sin 64.7^\circ} = \frac{DC}{\sin 57.65^\circ} \;\Rightarrow\; EC = \frac{\sqrt{52}\cdot \sin 64.7^\circ}{\sin 57.65^\circ} \approx 7.717$$

היקף המשולש:

$$P_{CDE} = DC + DE + EC \approx 7.211 + 7.211 + 7.717 \approx 22.14$$

תשובה: $P_{CDE} \approx 22.14$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 5



5. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו M.

הצלע AC היא קוטר במעגל.

המעגל משיק לציר ה־y בנקודה C וחותך את ציר ה־x בנקודה B, כמתואר בסרטוט.

הנקודה D נמצאת על ציר ה־y וידוע כי $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADC$.

א. הוכיחו: $\triangle ABC \sim \triangle DCA$.

ב. האם $BC \parallel AD$? נמקו.

נתון: $B(-2,0)$, $C(0,4)$.

ג. **(1)** מצאו את משוואת הצלע AB.

(2) מצאו את שיעורי הקודקוד A.

(3) מצאו את משוואת המעגל.

ד. **(1)** מצאו את יחס הדמיון בין המשולש ABC ובין המשולש DCA.

(2) מצאו את שטח המרובע ABCD.

פתרון מלא

סעיף א

במשולשים ABC ו־DCA:

1. $\angle ABC = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר – AC קוטר).
2. $\angle DCA = 90^\circ$ (רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה: המעגל משיק לציר ה־y ב־C, ו־MC מונח על CA).

מכאן $\angle ABC = \angle DCA$.

3. $\angle BAC = \angle ADC$ (נתון).

לכן $\triangle ABC \sim \triangle DCA$ (לפי משפט הדמיון ז.ז). ההתאמה: $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow A$.

תשובה: הוכחה.

סעיף ב

מהדמיון בסעיף א, גם הזוויות השלישיות שוות: $\angle BCA = \angle DAC$ (סכום הזוויות בכל משולש הוא 180°, ושני זוגות של זוויות כבר שווים).

הזוויות $\angle BCA$ ו־$\angle DAC$ הן זוויות מתחלפות בין הישרים BC ו־AD והחותך AC. זוויות מתחלפות שוות, ולכן $BC \parallel AD$.

תשובה: כן, $BC \parallel AD$ (זוויות מתחלפות שוות).

סעיף ג (1)

$\angle ABC = 90^\circ$, כלומר $AB \perp BC$. שיפוע BC:

$$m_{BC} = \frac{4-0}{0-(-2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_{AB} \cdot m_{BC} = -1 \;\Rightarrow\; m_{AB} = -\frac{1}{2}$$

הישר AB עובר דרך $B(-2,0)$:

$$y-0=-\frac{1}{2}(x+2)\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{2}x-1$$

תשובה: $y=-\frac{1}{2}x-1$

סעיף ג (2)

$AC\perp$ ציר ה־y (רדיוס מאונך למשיק), ולכן AC אופקי: $y=4$ (כמו C). A נמצאת על AB ועל $y=4$:

$$4=-\frac{1}{2}x-1\ \Rightarrow\ -\frac{1}{2}x=5\ \Rightarrow\ x=-10$$

תשובה: $A(-10,4)$

סעיף ג (3)

מרכז המעגל M הוא אמצע הקוטר AC:

$$M\left(\frac{-10+0}{2},\frac{4+4}{2}\right)=(-5,4)$$

הרדיוס: $R=MC=0-(-5)=5$ (הקטע MC אופקי).

$$(x+5)^2+(y-4)^2=25$$

תשובה: $(x+5)^2+(y-4)^2=25$

סעיף ד (1)

לפי ההתאמה בסעיף א: $\frac{AB}{DC}=\frac{BC}{CA}=\frac{AC}{DA}$.

$$BC=\sqrt{(0+2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5},\qquad CA=0-(-10)=10$$

$$k=\frac{BC}{CA}=\frac{2\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0.447$$

תשובה: $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **(כלומר** $1:\sqrt{5}$**)**

סעיף ד (2)

המרובע $ABCD$ מורכב מהמשולשים ABC ו־DCA.

שטח ABC: הבסיס $AC=10$ אופקי, והגובה מ־B אליו הוא הפרש שיעורי ה־y: $4-0=4$.

$$S_{ABC}=\frac{10\cdot 4}{2}=20$$

שטח DCA: היחס בין שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון:

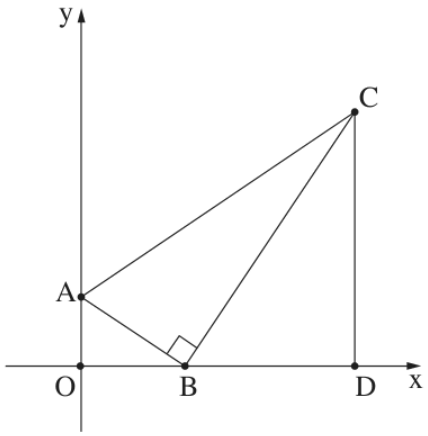
$$\frac{S_{ABC}}{S_{DCA}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}\ \Rightarrow\ S_{DCA}=5\cdot 20=100$$

$$S_{ABCD}=20+100=120$$

(בדיקה: $AD\parallel BC$, כלומר AD: $y=2x+24$, ולכן $D(0,24)$ ו־$S_{DCA}=\frac{10\cdot 20}{2}=100$ ✓.)

תשובה: $S_{ABCD}=120$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 4



4. במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle ABC = 90^o$)

הקודקוד B מונח על ציר ה־ x והקודקוד A מונח על ציר ה־ y .

מן הקודקוד C העבירו אנך לציר ה־ x , החותך אותו בנקודה D (ראו סרטוט).

הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. הוכיחו: $\Delta AOB \sim \Delta BDC$.

נתון: $\frac{CD}{OB} = \frac{5}{2}$,

משוואת הצלע AB היא $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

ב. **(1)** מצאו את אורכי הקטעים OB ו־ CD .

(2) מצאו את שיעורי הנקודות D ו־ C .

ג. **(1)** מצאו את גודל הזווית BAC .

(2) מצאו את גודל הזווית ACD .

ד. האם אפשר לחסום את המרובע ABDC במעגל? נמקו.

פתרון מלא

סעיף א

במשולשים AOB ו־BDC:

1. $\angle AOB = \angle BDC = 90^\circ$ (הזווית בין הצירים; CD אנך לציר ה־x).
2. $\angle ABO + \angle ABC + \angle CBD = 180^\circ$ (זווית שטוחה על ציר ה־x), ו־$\angle ABC = 90^\circ$, ולכן $\angle ABO + \angle CBD = 90^\circ$.

במשולש AOB: $\angle OAB + \angle ABO = 90^\circ$ (סכום הזוויות במשולש 180°).

מכאן $\angle OAB = \angle CBD$.

לכן $\triangle AOB \sim \triangle BDC$ (לפי משפט הדמיון ז.ז). ההתאמה: $A \leftrightarrow B$, $O \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow C$.

תשובה: הוכחה.

סעיף ב (1)

B היא נקודת החיתוך של AB עם ציר ה־x:

$$0 = -\frac{2}{3}x + 4 \;\Rightarrow\; x = 6 \;\Rightarrow\; B(6,0), \quad OB = 6$$

מהנתון $\frac{CD}{OB} = \frac{5}{2}$:

$$CD = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$$

תשובה: $OB = 6$, $CD = 15$

סעיף ב (2)

A היא נקודת החיתוך של AB עם ציר ה־y: $A(0,4)$, כלומר $AO = 4$.

מהדמיון בסעיף א ($A \leftrightarrow B$, $O \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow C$):

$$\frac{AO}{BD} = \frac{OB}{DC} \;\Rightarrow\; \frac{4}{BD} = \frac{6}{15} \;\Rightarrow\; BD = 10$$

$OD = OB + BD = 6 + 10 = 16$, ולכן $D(16,0)$, ו־C נמצאת 15 יחידות מעליה: $C(16,15)$.
(בדיקה: $m_{BC} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$, ו־$m_{AB} \cdot m_{BC} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$ ✓.)
תשובה: $D(16,0)$, $C(16,15)$

סעיף ג (1)
במשולש ישר הזווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$):

$$AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}, \qquad BC = \sqrt{10^2 + 15^2} = \sqrt{325}$$

$$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{325}}{\sqrt{52}} = \sqrt{6.25} = 2.5 \;\Rightarrow\; \angle BAC \approx 68.2^\circ$$

(גם מהדמיון: $\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{OB} = \frac{15}{6} = 2.5$.)
תשובה: $\angle BAC \approx 68.2^\circ$

סעיף ג (2)
נעביר מ־A אנך לישר CD ($x = 16$); רגל האנך היא $E(16,4)$. במשולש ישר הזווית AEC:

$$AE = 16 - 0 = 16, \qquad CE = 15 - 4 = 11$$

$$\tan \angle ACE = \frac{AE}{CE} = \frac{16}{11} \;\Rightarrow\; \angle ACD = \angle ACE \approx 55.49^\circ$$

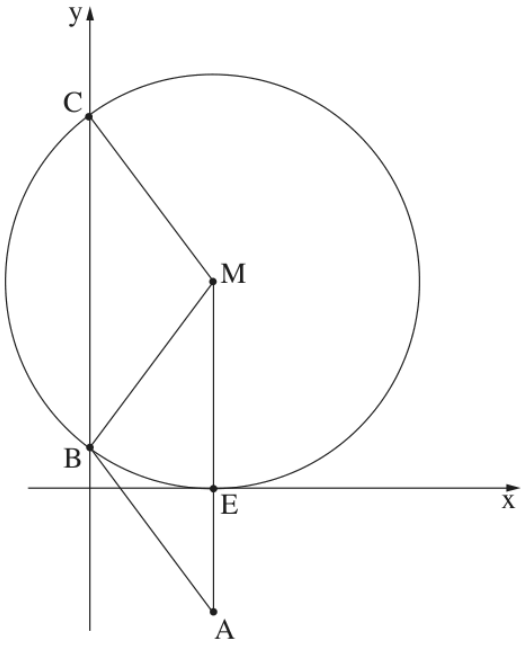
תשובה: $\angle ACD \approx 55.49^\circ$

סעיף ד
מרובע אפשר לחסום במעגל אם ורק אם סכום כל זוג זוויות נגדיות בו הוא 180°.
במרובע $ABDC$ הזוויות $\angle BAC$ ו־$\angle BDC$ נגדיות:

$$\angle BAC + \angle BDC \approx 68.2^\circ + 90^\circ = 158.2^\circ \neq 180^\circ$$

לכן אי אפשר לחסום את המרובע $ABDC$ במעגל.
תשובה: לא – $68.2^\circ + 90^\circ \neq 180^\circ$.

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 5



5. מעגל שמרכזו M משיק לציר ה־ x בנקודה E .

המעגל חותך את ציר ה־ y בנקודות B ו־ C , כמתואר בסרטוט שלפניכם.

הנקודה A נמצאת על המשך ME , כמתואר בסרטוט.

א. **(1)** הסבירו מדוע MA מקביל לציר ה־ y .

(2) הוכיחו: $\sphericalangle CBM = \sphericalangle BMA$.

נתון: אורך הקטע AB שווה לרדיוס המעגל.

ב. **(1)** הוכיחו: $\sphericalangle CMB = \sphericalangle MBA$.

(2) הוכיחו: המרובע ABCM הוא מקבילית.

נתון: $M(3,5)$.

ג. **(1)** מצאו את משוואת המעגל.

(2) מצאו את שיעורי הנקודות B ו־ C .

(3) מצאו את שיעורי הנקודה A .

ד. חשבו את שטח המקבילית ABCM .

פתרון מלא

סעיף א (1)

המעגל משיק לציר ה־x בנקודה E, ולכן $ME \perp$ ציר ה־x (רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה). A נמצאת על המשך ME, ולכן גם $MA \perp$ ציר ה־x.

גם ציר ה־y מאונך לציר ה־x. שני ישרים המאונכים לאותו ישר מקבילים זה לזה, ולכן $MA \parallel$ ציר ה־y.

תשובה: כי MA וציר ה־y שניהם מאונכים לציר ה־x.

סעיף א (2)

הנקודות B ו־C על ציר ה־y, ולכן לפי סעיף א (1): $MA \parallel CB$.

$\angle CBM = \angle BMA$ (זוויות מתחלפות בין הישרים המקבילים CB ו־MA והחותך BM).

תשובה: הוכחה.

סעיף ב (1)

נסמן $\angle CBM = \angle BMA = \alpha$ (סעיף א (2)).

$MB = MC$ (רדיוסים), ולכן המשולש MBC שווה שוקיים: $\angle MCB = \angle MBC = \alpha$ (זוויות בסיס שוות), ולכן:

$$\angle CMB = 180^\circ - 2\alpha$$

נתון $AB = R = MB$, ולכן המשולש ABM שווה שוקיים ($BA = BM$): $\angle BAM = \angle BMA =$ α, ולכן:

$$\angle MBA = 180^\circ - 2\alpha$$

(סכום הזוויות במשולש 180°.) מכאן $\angle CMB = \angle MBA$.

תשובה: הוכחה.

סעיף ב (2)

$\angle CMB = \angle MBA$ (סעיף ב (1)), והן זוויות מתחלפות בין הישרים MC ו־BA והחותך MB. לכן $MC \parallel BA$ (זוויות מתחלפות שוות).

גם $MA \parallel CB$ (סעיף א (2)). במרובע $ABCM$ שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות, ולכן הוא מקבילית.

תשובה: הוכחה.

סעיף ג (1)

המעגל משיק לציר ה־x, ולכן הרדיוס שווה למרחק של המרכז $M(3,5)$ מציר ה־x: $R = 5$.

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$$

תשובה: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$

סעיף ג (2)

נציב $x = 0$ במשוואת המעגל:

$$9 + (y-5)^2 = 25 \;\Rightarrow\; (y-5)^2 = 16 \;\Rightarrow\; y-5 = \pm 4$$
$$y = 9 \;\text{ or }\; y = 1$$

לפי הסרטוט C למעלה ו־B למטה.

תשובה: $B(0,1)$, $C(0,9)$

סעיף ג (3)

במקבילית צלעות נגדיות שוות: $MA = CB = 9 - 1 = 8$.

A נמצאת מתחת ל־M על הישר $x = 3$ (המשך ME):

$$A(3,\ 5-8) = (3,-3)$$

תשובה: $A(3,-3)$

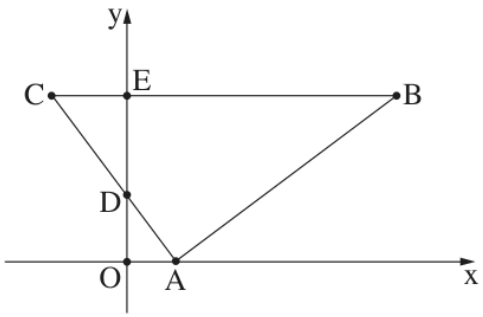
סעיף ד

ניקח את BC (על ציר ה־y) כבסיס: $BC = 8$. הגובה לבסיס זה הוא המרחק בין הישרים המקבילים MA ו־BC ($x=0$) ($x=3$), כלומר 3.

$$S_{ABCM} = BC \cdot h = 8 \cdot 3 = 24$$

תשובה: 24 **יחידות שטח.**

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 5



5. במשולש ABC הקודקוד A מונח על ציר ה־x.

הצלע AC חותכת את ציר ה־y בנקודה D.

הצלע CB מקבילה לציר ה־x, וחותכת את ציר ה־y בנקודה E,

כמתואר בסרטוט שלפניכם.

O היא ראשית הצירים.

א. הוכיחו: $\triangle AOD \sim \triangle CED$.

נתון כי משוואת הישר AC היא: $y = -\frac{4}{3}x + 4$, וכי $\frac{DO}{DE} = \frac{2}{3}$.

ב. **(1)** מצאו את אורך הקטע DE.

(2) מצאו את משוואת הישר CB.

נתון: הצלע AB מאונכת לצלע AC.

ג. מצאו את משוואת הישר AB.

ד. חשבו את גודל הזווית CDE.

ה. חשבו את שטח המרובע ADEB.

פתרון מלא

סעיף א

במשולשים AOD ו־CED:

1. $\angle AOD = 90^\circ$ (הצירים מאונכים), ו־$\angle CED = 90^\circ$ (CB מקביל לציר ה־x, ולכן מאונך לציר ה־y).
2. $\angle ADO = \angle CDE$ (זוויות קודקודיות).

לכן $\triangle AOD \sim \triangle CED$ (ז.ז).

תשובה: הוכחה לפי ז.ז.

סעיף ב (1)

D – חיתוך AC עם ציר ה־y: $x = 0 \Rightarrow y = 4$, כלומר $D(0,4)$ ו־$DO = 4$.

$$\frac{DO}{DE} = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \frac{4}{DE} = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; DE = 6$$

תשובה: $DE = 6$

סעיף ב (2)

E על ציר ה־y, מעל D: $y_E = 4 + 6 = 10$. הישר CB מקביל לציר ה־x ועובר דרך $E(0,10)$.

תשובה: $y = 10$

סעיף ג

A – חיתוך AC עם ציר ה־x: $0 = -\frac{4}{3}x + 4 \Rightarrow x = 3$, כלומר $A(3,0)$.

$AB \perp AC$ ו־$m_{AC} = -\frac{4}{3}$, ולכן $m_{AB} = \frac{3}{4}$:

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x - 3) \;\Rightarrow\; y = 0.75x - 2.25$$

תשובה: $y = 0.75x - 2.25$

סעיף ד

$\angle CDE = \angle ADO$ (קודקודיות). במשולש ישר הזווית AOD:

$$\tan\angle ADO = \frac{OA}{OD} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \angle ADO \approx 36.87^\circ$$

תשובה: $\angle CDE \approx 36.87^\circ$

סעיף ה

B – חיתוך AB עם $y = 10$: $0.75x - 2.25 = 10 \Rightarrow x = \frac{49}{3} = 16\frac{1}{3}$.

נחשב את שטח המרובע כשטח הטרפז $A\,B\,E\,O$ (בסיסים OA ו־EB מקבילים לציר ה־x, גובה $OE = 10$) פחות שטח המשולש AOD:

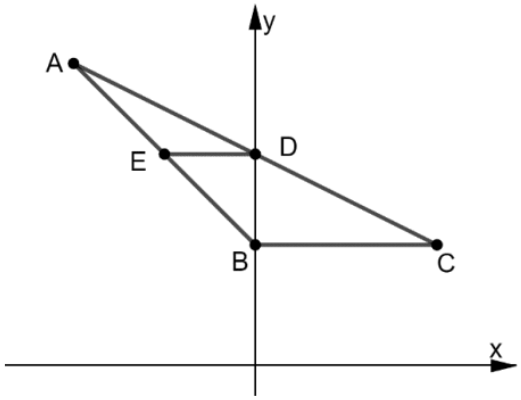
$$S_{OEBA} = \frac{(OA + EB)\cdot OE}{2} = \frac{\left(3 + 16\frac{1}{3}\right)\cdot 10}{2} = 96\frac{2}{3}$$

$$S_{AOD} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

$$S_{ADEB} = 96\frac{2}{3} - 6 = 90\frac{2}{3}$$

תשובה: $S_{ADEB} = 90\frac{2}{3} \approx 90.67$ **יח"ר**

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 4



4. במשולש ABC הקודקוד B מונח על ציר ה- y.

נתון כי משוואת הצלע AB היא $y=-x+4$.

שיעור ה- y של הקודקוד A הוא 10.

א. חשב את אורך הצלע AB.

נתון כי הצלע BC מקבילה לציר ה- x.

אורך הצלע BC הוא 6.

ב. מצא את שיעורי הקודקוד C.

D היא נקודת החיתוך של הישר AC עם ציר ה- y.

ג. מצא את שיעורי הנקודה D.

מנקודה D העבירו ישר המקביל לציר ה- x החותך את הצלע AB בנקודה E.

ד. (1) הוכח כי DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

(2) חשב את אורך הקטע DE.

ה. חשב את גודלי הזוויות EBD ו- ABC.

ו. מצא פי כמה גדול שטח המשולש ABC משטח הטרפז $EDCB$.

פתרון מלא

סעיף א

הקודקוד B נמצא על ציר ה־y, ולכן $x_B=0$. נציב בישר AB:

$$y=-0+4=4 \;\Rightarrow\; B(0,4)$$

הקודקוד A נמצא על הישר AB ו־$y_A=10$:

$$10=-x+4 \;\Rightarrow\; x=-6 \;\Rightarrow\; A(-6,10)$$

אורך הצלע לפי נוסחת המרחק בין שתי נקודות:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(0-(-6))^2+(4-10)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}\approx 8.49$$

תשובה: $AB=6\sqrt{2}\approx 8.49$

סעיף ב

BC מקבילה לציר ה־x, ולכן ל־C אותו שיעור y כמו ל־B: $y_C=4$.

אורך BC הוא 6, ולפי השרטוט C מימין ל־B:

$$x_C=x_B+6=0+6=6 \;\Rightarrow\; C(6,4)$$

תשובה: $C(6,4)$

סעיף ג

שיפוע הישר AC:

$$m_{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-10}{6-(-6)}=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$$

משוואת AC דרך $C(6,4)$:

$$y-4=-\frac{1}{2}(x-6)\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{2}x+7$$

D על ציר ה־y, ולכן נציב $x=0$: $y=7$.

תשובה: $D(0,7)$

סעיף ד (1)

אמצע הצלע AC לפי נוסחת אמצע קטע:

$$x=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-6+6}{2}=0 \qquad y=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{10+4}{2}=7$$

כלומר D היא אמצע הצלע AC.

הישר DE מקביל לציר ה־x, וגם BC מקבילה לציר ה־x, ולכן $DE \parallel BC$.

DE יוצא מאמצע הצלע AC ומקביל לצלע BC, ולכן הוא חוצה את הצלע השלישית AB, כלומר DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC (ישר היוצא מאמצע צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה – חוצה את הצלע השלישית).

(בדיקה: E על AB ו־$y_E=7$, ולכן $7=-x+4$, $x=-3$, $E(-3,7)$ – וזו בדיוק אמצע AB: $(-3,7)=\left(\frac{-6+0}{2},\frac{10+4}{2}\right)$.)

תשובה: D אמצע AC ו־$DE \parallel BC$, ולכן DE קטע אמצעים.

סעיף ד (2)

קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע השלישית:

$$DE=\frac{BC}{2}=\frac{6}{2}=3$$

(או: $E(-3,7)$, $D(0,7)$, ולכן $DE=0-(-3)=3$.)

תשובה: $DE=3$

סעיף ה

$DB=y_D-y_B=7-4=3$, וגם $DE=3$. הישר DE מקביל לציר ה־x ו־DB מונח על ציר ה־y, ולכן $\angle EDB=90^\circ$.

המשולש EDB הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים ($ED=DB=3$), ולכן זוויות הבסיס שלו שוות:

$$\angle EBD=\frac{180^\circ-90^\circ}{2}=45^\circ$$

הזווית DBC היא 90° (ציר ה־y מאונך ל־BC שמקבילה לציר ה־x). לכן:

$$\angle ABC=\angle EBD+\angle DBC=45^\circ+90^\circ=135^\circ$$

(דרך נוספת: במשולש EDB גם $\angle DEB=45^\circ$. $DE \parallel BC$, ולכן $\angle DEB+\angle EBC=180^\circ$ (זוויות חד־צדדיות בין ישרים מקבילים), כלומר $\angle ABC=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.)

תשובה: $\angle EBD=45^\circ$, $\angle ABC=135^\circ$

סעיף ו

משולש ABC, קטע האמצעים DE והטרפז EDCB

שטח המשולש ABC: הבסיס $BC=6$, והגובה אליו הוא המרחק של A מהישר $y=4$: $10-4=6$.

$$S_{ABC}=\frac{6\cdot 6}{2}=18$$

שטח הטרפז EDCB: הבסיסים $DE = 3$ ו־$BC = 6$, והגובה $DB = 3$ מאונך לשני הבסיסים):

$$S_{EDCB} = \frac{(3+6)\cdot 3}{2} = 13.5$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{EDCB}} = \frac{18}{13.5} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}$$

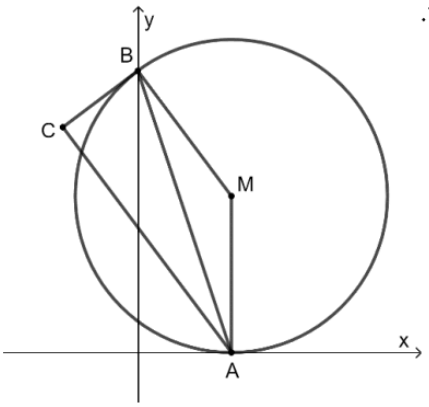
(דרך נוספת: המשולש AED דומה למשולש ABC ביחס $1:2$, ולכן יחס השטחים $1:4$; הטרפז הוא $\frac{3}{4}$ משטח המשולש.)

תשובה: פי $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 5

5. נתון מעגל שמרכזו $M(6,10)$. המעגל משיק לציר ה- x בנקודה A.

א. מצא את משוואת המעגל.



הנקודה B היא אחת מנקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y, כמתואר בציור.

הישר BC משיק למעגל בנקודה B.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודה B.

(2) מצא את משוואת המשיק למעגל, BC.

נתון: $\sphericalangle BCA = 90°$.

ג. (1) הוכח: AC מקביל ל- MB.

(2) הוכח: AB חוצה את הזווית CAM.

ד. חשב את אורך הקטע AC.

פתרון מלא

סעיף א

המעגל משיק לציר ה־x בנקודה A, ולכן הרדיוס MA מאונך לציר ה־x: לנקודה A אותו שיעור x כמו למרכז, $A(6,0)$, והרדיוס הוא המרחק של M מציר ה־x:

$$R = y_M = 10$$

משוואת המעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$:

$$(x-6)^2+(y-10)^2=100$$

תשובה: $(x-6)^2+(y-10)^2=100$

סעיף ב (1)

B על ציר ה־y, ולכן $x=0$. נציב במשוואת המעגל:

$$(0-6)^2+(y-10)^2=100 \;\Rightarrow\; (y-10)^2=64 \;\Rightarrow\; y-10=\pm 8$$

$y=18$ או $y=2$

לפי השרטוט B היא נקודת החיתוך העליונה (מעל M), ולכן $B(0,18)$.

תשובה: $B(0,18)$

סעיף ב (2)

המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. שיפוע הרדיוס MB:

$$m_{MB}=\frac{18-10}{0-6}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}$$

שיפוע המשיק: $m_{MB}\cdot m_{BC}=-1$, ולכן $m_{BC}=\frac{3}{4}$. המשיק עובר דרך $B(0,18)$ (נקודת החיתוך עם ציר ה־y):

$$y=\frac{3}{4}x+18$$

תשובה: $y=\frac{3}{4}x+18$

סעיף ג (1)

$\angle CBM = 90^\circ$ (משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה).

$\angle BCA = 90^\circ$ (נתון).

לכן $\angle CBM + \angle BCA = 180^\circ$. אלה זוויות חד־צדדיות בין הישרים AC ו־MB והחותך BC, ולכן $AC \parallel MB$ (אם זוויות חד־צדדיות משלימות ל־180° – הישרים מקבילים).

(אפשר גם: שני הישרים AC ו־MB מאונכים לאותו ישר BC, ולכן הם מקבילים.)

תשובה: הוכחה: $\angle CBM + \angle BCA = 180^\circ \Leftarrow AC \parallel MB$**.**

סעיף ג (2)

$MB = MA$ (רדיוסים במעגל), ולכן המשולש MAB שווה שוקיים ו־$\angle MAB = \angle MBA$ (מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות).

$\angle CAB = \angle MBA$ (זוויות מתחלפות בין הישרים המקבילים AC ו־MB – סעיף ג (1)).

לכן $\angle CAB = \angle MAB$ (כלל המעבר), כלומר AB חוצה את הזווית CAM.

תשובה: הוכחה: $\angle CAB = \angle MBA = \angle MAB$**.**

סעיף ד

נמצא את הנקודה C כנקודת החיתוך של AC עם המשיק BC.

$AC \parallel MB$, ולכן $m_{AC} = m_{MB} = -\frac{4}{3}$. משוואת AC דרך $A(6,0)$:

$$y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 6) \;\Rightarrow\; y = -\frac{4}{3}x + 8$$

חיתוך עם $y = \frac{3}{4}x + 18$:

$$-\frac{4}{3}x + 8 = \frac{3}{4}x + 18 \;\; / \cdot 12 \;\Rightarrow\; -16x + 96 = 9x + 216 \;\Rightarrow\; -25x = 120 \;\Rightarrow\; x = -4.8$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot (-4.8) + 18 = 14.4 \qquad C(-4.8,\, 14.4)$$

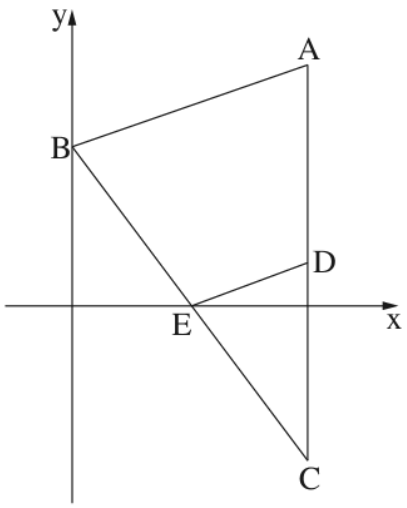
אורך הקטע:

$$AC = \sqrt{(6 - (-4.8))^2 + (0 - 14.4)^2} = \sqrt{10.8^2 + 14.4^2} = \sqrt{116.64 + 207.36} = \sqrt{324} = 18$$

(דרך נוספת בטריגונומטריה: במשולש ישר הזווית ABC: $AB = \sqrt{6^2 + 18^2} = 6\sqrt{10}$. $AC = AB \cdot \cos\angle CAB$, ו־$\angle CAB = \angle MAB \approx 18.43^\circ$ – מקבלים שוב $AC = 18$.)

תשובה: $AC = 18$

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 4



4. בסרטוט שלפניך מתואר משולש ABC.

הקודקוד B נמצא על ציר ה־ y, והצלע AC מקבילה לציר ה־ y.

נתון: $A(6,6)$, $AB=\sqrt{40}$.

שיעור ה־ y של הקודקוד B קטן מ־ 6.

א. מצא את שיעורי הקודקוד B.

הנקודה E היא אמצע הצלע BC.

נתון: הנקודה E נמצאת על ציר ה־ x.

ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו־ E.

הנקודה D היא אמצע הצלע AC.

מן הנקודה E העבירו ישר המקביל לציר ה־ y וחותך את הצלע AB בנקודה F.

ג. **(1)** הוכח כי המרובע $FADE$ הוא מקבילית.

(2) חשב את שטח המקבילית $FADE$.

ד. מצא את גודל הזווית $\sphericalangle DEF$.

פתרון מלא

סעיף א

B על ציר ה־y, ולכן $B(0,b)$. לפי נוסחת המרחק בין שתי נקודות עם $A(6,6)$:

$$\sqrt{(6-0)^2+(6-b)^2}=\sqrt{40} \;\Rightarrow\; 36+(6-b)^2=40 \;\Rightarrow\; (6-b)^2=4$$

$$6-b=2 \;\Rightarrow\; b=4 \quad \text{או} \quad 6-b=-2 \;\Rightarrow\; b=8$$

נתון ששיעור ה־y של B קטן מ־6, ולכן $b=4$.

תשובה: $B(0,4)$

סעיף ב

AC מקבילה לציר ה־y, ולכן $x_C=x_A=6$, כלומר $C(6,y_C)$.

E אמצע BC ונמצאת על ציר ה־x ($y_E=0$). לפי נוסחת אמצע קטע:

$$x_E=\frac{0+6}{2}=3 \qquad 0=\frac{4+y_C}{2} \;\Rightarrow\; y_C=-4$$

תשובה: $C(6,-4)$, $E(3,0)$

סעיף ג (1)

D אמצע AC:

$$D\left(\frac{6+6}{2},\frac{6+(-4)}{2}\right)=D(6,1)$$

ED מחבר את אמצעי הצלעות BC ו־AC, ולכן הוא קטע אמצעים במשולש ABC, ו־$ED \parallel BA$ (קטע אמצעים מקביל לצלע השלישית). מכאן $ED \parallel FA$.

EF מקביל לציר ה־y (נתון) וגם AD (על AC) מקביל לציר ה־y, ולכן $EF \parallel AD$.

במרובע FADE שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות, ולכן הוא מקבילית.

(בדיקה בשיפועים: $m_{ED}=\frac{1-0}{6-3}=\frac{1}{3}$ ו־$m_{AB}=\frac{6-4}{6-0}=\frac{1}{3}$.)

תשובה: הוכחה: $FA \parallel ED$ ו־$AD \parallel EF$.

סעיף ג (2)

משולש ABC והמקבילית FADE

ניקח את הצלע AD כבסיס: $AD=6-1=5$. הגובה לבסיס זה הוא המרחק בין הישרים המקבילים $x=$ (EF) 3 ו־$x=6$ (AD): $6-3=3$.

$$S_{FADE}=AD\cdot h=5\cdot 3=15$$

(F נמצאת על AB: $y=\frac{1}{3}x+4$, ובהצבת $x=3$ מקבלים $F(3,5)$; אכן $EF=5=AD$.)

תשובה: 15

סעיף ד

נוריד מ־D אנך לישר EF ונסמן את עקבו J. J הוא הישר $x=3$, ולכן $J(3,1)$.

במשולש ישר הזווית EJD ($\angle EJD=90^\circ$):

$$DJ=6-3=3 \qquad EJ=1-0=1$$

$$\tan\angle DEJ=\frac{DJ}{EJ}=\frac{3}{1}=3 \;\Rightarrow\; \angle DEJ\approx 71.57^\circ$$

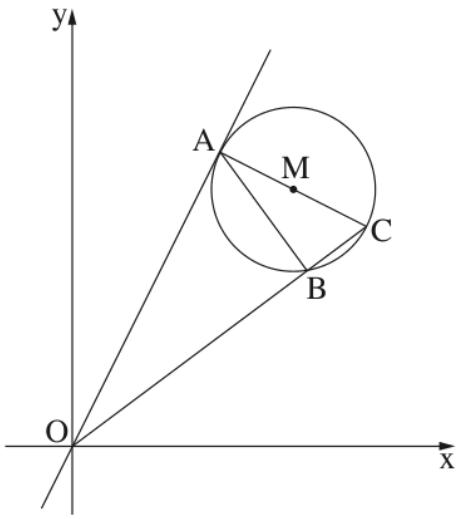
J נמצאת על הקטע EF, ולכן $\angle DEF=\angle DEJ$.

תשובה: $\angle DEF\approx 71.57^\circ$

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 5

5. בסרטוט שלפניך מתואר מעגל שמרכזו M. הנקודות A, B ו־C נמצאות על המעגל.

המשיק למעגל בנקודה A חותך את הישר BC בראשית הצירים O, כמתואר בסרטוט.



נתון: AC הוא קוטר במעגל.

א. הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta OAC$.

נתון: $BC = 3$, $OC = 15$.

ב. מצא את אורך AC.

נתון: $M\left(9, 10\frac{1}{2}\right)$.

ג. מצא את משוואת המעגל.

נתון: משוואת המשיק למעגל בנקודה A היא: $y = 2x$.

ד. **(1)** מצא את משוואת הישר AM.

(2) מצא את שיעורי הנקודה A.

הישר AM חותך את ציר ה־y בנקודה F.

ה. מצא את גודל הזווית OFA.

פתרון מלא

סעיף א

$\angle CAO = 90°$ (המשיק מאונך לקוטר AC בנקודת ההשקה).

$\angle CBA = 90°$ (זווית היקפית הנשענת על הקוטר AC היא זווית ישרה).

לכן $\angle CBA = \angle CAO$ (כלל המעבר).

$\angle ACB = \angle OCA$ (זווית משותפת – B על הקטע OC).

לכן $\triangle ABC \sim \triangle OAC$ (משפט דמיון ז.ז.).

תשובה: הוכחה: שתי זוויות שוות (90° וזווית משותפת).

סעיף ב

מהדמיון: יחס הצלעות המתאימות שווה (הצלע BC מול $\angle BAC$ מתאימה לצלע AC מול $\angle AOC$):

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{OC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot OC = 3 \cdot 15 = 45$$

$$AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6.71$$

תשובה: $AC = 3\sqrt{5} \approx 6.71$

סעיף ג

AC קוטר, ולכן הרדיוס הוא מחציתו:

$$R = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow R^2 = \frac{9 \cdot 5}{4} = 11.25$$

משוואת המעגל עם המרכז $M\left(9, 10\frac{1}{2}\right)$:

$$(x-9)^2 + (y-10.5)^2 = 11.25$$

תשובה: $(x-9)^2 + (y-10.5)^2 = 11.25$

סעיף ד (1)

הרדיוס AM מאונך למשיק $y=2x$ שבנקודת ההשקה, ולכן $m_{AM}\cdot 2=-1$, כלומר $m_{AM}=-\frac{1}{2}$. הישר עובר דרך $M(9,10.5)$:

$$y-10.5=-\frac{1}{2}(x-9)\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{2}x+15$$

תשובה: $y=-\frac{1}{2}x+15$

סעיף ד (2)

A היא נקודת החיתוך של המשיק עם הישר AM:

$$2x=-\frac{1}{2}x+15\ \Rightarrow\ 2.5x=15\ \Rightarrow\ x=6 \qquad y=2\cdot 6=12$$

(בדיקה: $(6-9)^2+(12-10.5)^2=9+2.25=11.25$ – A על המעגל.)

תשובה: $A(6,12)$

סעיף ה

F היא נקודת החיתוך של AM עם ציר ה־y: $x=0\Rightarrow y=15$, כלומר $F(0,15)$.

במשולש OFA הזווית OAF ישרה (המשיק OA מאונך לרדיוס AF). נמצא את הצלעות שלו:

$$OF=15 \qquad OA=\sqrt{6^2+12^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$$

$$\sin\angle OFA=\frac{OA}{OF}=\frac{6\sqrt{5}}{15}\approx 0.894\ \Rightarrow\ \angle OFA\approx 63.43^\circ$$

(דרך נוספת: נוריד מ־A אנך לציר ה־y, לנקודה $(0,12)$. במשולש ישר הזווית שנוצר הניצב האופקי 6 והניצב האנכי $15-12=3$, ולכן $\tan\angle OFA=\frac{6}{3}=2$, ושוב $\angle OFA\approx 63.43^\circ$.)

תשובה: $\angle OFA\approx 63.43^\circ$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.