תכנון ליניארי – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 3 יחידות (שאלון 372) • 17 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 1

1. במפעל ממתקים מייצרים סוכריות משני סוגים: סוכריות טופי וסוכריות גומי.

את הסוכריות אורזים בשקיות.

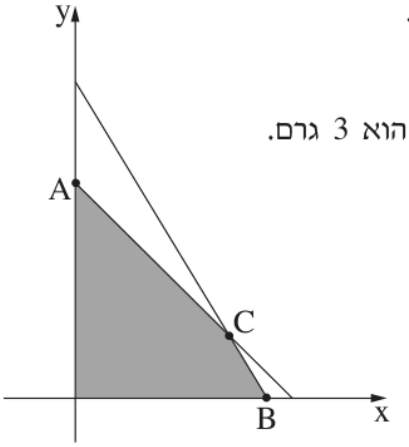
המשקל של סוכריית טופי אחת הוא 5 גרם, והמשקל של סוכריית גומי אחת הוא 3 גרם.

המשקל של כל שקית סוכריות צריך להיות 210 גרם לכל היותר.

בכל שקית אפשר לארוז 48 סוכריות לכל היותר.

נסמן ב־ x את מספר סוכריות הטופי בכל שקית

וב־ y את מספר סוכריות הגומי בכל שקית.



א. כתבו את מערכת האילוצים של הבעיה.

לפניכם סרטוט של התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים של הבעיה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A , B ו־ C .

הרווח ממכירת סוכריית טופי אחת הוא 0.5 שקלים, והרווח ממכירת סוכריית גומי אחת הוא 0.4 שקלים.

ג. **(1)** כתבו את פונקציית המטרה של הרווח של המפעל ממכירת שקית אחת של סוכריות.

(2) מצאו כמה סוכריות טופי וכמה סוכריות גומי צריך לארוז בשקית אחת כדי שהרווח יהיה מקסימלי.

שתי חנויות ממתקים, חנות א׳ וחנות ב׳, הזמינו שקיות של סוכריות מן המפעל.

לחנות א׳ ארזו בכל שקית 38 סוכריות טופי (חנות א׳ לא הזמינה סוכריות גומי).

לחנות ב׳ ארזו בכל שקית סוכריות טופי וסוכריות גומי בכמות המאפשרת רווח מקסימלי למפעל.

ד. מצאו בכמה שקלים קטן הרווח של המפעל ממכירת שקית אחת של סוכריות לחנות א׳ מן הרווח שלו ממכירת שקית אחת של סוכריות לחנות ב׳.

פתרון מלא

סעיף א

משקל השקית: x סוכריות טופי שוקלות $5x$ גרם, ו־y סוכריות גומי שוקלות $3y$ גרם. המשקל הוא 210 גרם לכל היותר:

$$5x + 3y \le 210$$

מספר הסוכריות בשקית: 48 לכל היותר:

$$x + y \le 48$$

מספר סוכריות אינו יכול להיות שלילי:

$$x \ge 0, \quad y \ge 0$$

תשובה: $5x + 3y \le 210$**,** $x + y \le 48$**,** $x \ge 0$**,** $y \ge 0$

סעיף ב

נמצא לכל ישר את נקודות החיתוך שלו עם הצירים:

- $5x + 3y = 210$: עם ציר ה־y ($x = 0$): $y = 70$; עם ציר ה־x ($y = 0$): $x = 42$.
- $x + y = 48$: עם ציר ה־y: $y = 48$; עם ציר ה־x: $x = 48$.

על ציר ה־y התחום נגמר בנקודה הנמוכה יותר, $(0, 48)$, ועל ציר ה־x בנקודה הקרובה יותר, $(42, 0)$. לפי הסרטוט:

$$A(0, 48), \qquad B(42, 0)$$

C היא נקודת החיתוך של שני הישרים. נמצא אותה בשיטת השוואת מקדמים: נכפיל את המשוואה השנייה ב־3, כדי שהמקדם של y יהיה שווה בשתי המשוואות:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 210 \\ x + y = 48 \ \ / \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 3y = 210 \\ 3x + 3y = 144 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה:

$$2x = 66 \Rightarrow x = 33$$

$$33 + y = 48 \Rightarrow y = 15 \Rightarrow C(33, 15)$$

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו (0,0), A(0,48), C(33,15), B(42,0)

תשובה: $A(0, 48)$**,** $B(42, 0)$**,** $C(33, 15)$

סעיף ג (1)

הרווח מסוכריית טופי הוא 0.5 שקלים ומסוכריית גומי 0.4 שקלים, ולכן הרווח משקית אחת:

$$f(x, y) = 0.5x + 0.4y$$

תשובה: $f(x, y) = 0.5x + 0.4y$

סעיף ג (2)

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב:

קודקוד	$f = 0.5x + 0.4y$
$(0, 0)$	0
$B(42, 0)$	$0.5 \cdot 42 = 21$
$C(33, 15)$	$0.5 \cdot 33 + 0.4 \cdot 15 = 16.5 + 6 = 22.5$
$A(0, 48)$	$0.4 \cdot 48 = 19.2$

הרווח המקסימלי, 22.5 שקלים, מתקבל בנקודה $C(33, 15)$: 33 סוכריות טופי ו־15 סוכריות גומי בשקית.

תשובה: 33 סוכריות טופי ו־15 סוכריות גומי (רווח של 22.5 שקלים לשקית).

סעיף ד

חנות א': 38 סוכריות טופי ו־0 סוכריות גומי (בדיקה: $5 \cdot 38 = 190 \leq 210$ ו־$38 \leq 48$, השקית אפשרית):

$$f(38, 0) = 0.5 \cdot 38 = 19$$

חנות ב': השקית עם הרווח המקסימלי, כלומר 22.5 שקלים (סעיף ג).

$$22.5 - 19 = 3.5$$

הרווח משקית לחנות א' קטן ב־3.5 שקלים מהרווח משקית לחנות ב'.

תשובה: ב־3.5 שקלים.

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד א׳ • שאלה 1

1. במסעדה מסוימת מכינים בכל יום מנות משני סוגים – מנה צמחונית ומנה בשרית.

נסמן ב־ x את מספר המנות הצמחוניות וב־ y את מספר המנות הבשריות שמכינים במסעדה ביום אחד.

לפניכם מערכת האילוצים של הכנת המנות במסעדה זו ביום אחד:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x + 5y \leq 100$$

$$x + 2y \leq 58$$

א. סרטטו את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים הנתונה.

הרווח של המסעדה ממכירה של מנה צמחונית אחת הוא 25 שקלים, והרווח ממכירה של מנה בשרית אחת הוא 55 שקלים.

ב. **(1)** כתבו את פונקציית המטרה של רווח המסעדה ממכירת המנות.

(2) כמה מנות מכל סוג צריך למכור במסעדה ביום אחד כדי שהרווח יהיה מקסימלי?

מנהל המסעדה החליט לשנות את מחירי המנות.

בעקבות זאת הרווח ממכירה של מנה צמחונית אחת קטן ב־ 10% , והרווח ממכירה של מנה בשרית אחת גדל ב־ 20% .

ג. **(1)** מצאו את הרווח ממכירה של מנה צמחונית אחת ואת הרווח ממכירה של מנה בשרית אחת לאחר השינוי במחירים.

(2) מצאו בכמה גדל הרווח המקסימלי של המסעדה ביום אחד לאחר השינוי במחירים.

פתרון מלא

סעיף א

נסרטט את הישרים של האילוצים (נמצא לכל ישר שתי נקודות על הצירים):

- $x + 5y = 100$: עובר דרך $(0, 20)$ ודרך $(100, 0)$.
- $x + 2y = 58$: עובר דרך $(0, 29)$ ודרך $(58, 0)$.

האילוצים הם מסוג „קטן או שווה", ולכן התחום נמצא **מתחת** לשני הישרים (בדיקה: הנקודה $(0, 0)$ מקיימת את שני האילוצים). יחד עם $x \geq 0,\ y \geq 0$ התחום נמצא ברביע הראשון.

נקודת החיתוך של שני הישרים, בשיטת השוואת מקדמים (המקדם של x זהה בשתי המשוואות, ולכן נחסר אותן):

$$\begin{cases} x + 5y = 100 \\ x + 2y = 58 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה:

$3y = 42 \Rightarrow y = 14$

נציב $y = 14$ במשוואה השנייה:

$x + 2 \cdot 14 = 58$

$x = 58 - 28 = 30$

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו (0,0), (58,0), (30,14), (0,20)

התחום האפשרי הוא המרובע שקודקודיו $(0,20),\ (30,14),\ (58,0),\ (0,0)$.

תשובה: התחום הוא המרובע שקודקודיו $(0,20),\ (30,14),\ (58,0),\ (0,0)$ (ראו סרטוט).

סעיף ב (1)

הרווח ממנה צמחונית הוא 25 ש"ח וממנה בשרית 55 ש"ח, ולכן:

$f(x,y) = 25x + 55y$

תשובה: $f(x,y) = 25x + 55y$

סעיף ב (2)

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב:

קודקוד	$f = 25x + 55y$
$(0,0)$	0
$(58,0)$	$25 \cdot 58 = 1450$
$(30,14)$	$25 \cdot 30 + 55 \cdot 14 = 750 + 770 = 1520$
$(0,20)$	$55 \cdot 20 = 1100$

הרווח המקסימלי הוא 1520 ש"ח, בנקודה $(30,14)$.

תשובה: 30 מנות צמחוניות ו־14 מנות בשריות (רווח של 1520 ש"ח).

סעיף ג (1)

ירידה של 10%: מכפילים ב־0.9. עלייה של 20%: מכפילים ב־1.2.

$25 \cdot 0.9 = 22.5$

$55 \cdot 1.2 = 66$

תשובה: מנה צמחונית: 22.5 ש"ח, מנה בשרית: 66 ש"ח.

סעיף ג (2)

האילוצים לא השתנו, ולכן התחום האפשרי זהה. פונקציית המטרה החדשה: $f(x,y) = 22.5x + 66y$.

קודקוד	$f = 22.5x + 66y$
$(0,0)$	0
$(58,0)$	$22.5 \cdot 58 = 1305$
$(30,14)$	$22.5 \cdot 30 + 66 \cdot 14 = 675 + 924 = 1599$
$(0,20)$	$66 \cdot 20 = 1320$

הרווח המקסימלי החדש הוא 1599 ש"ח (שוב בנקודה $(30,14)$).

$1599 - 1520 = 79$

תשובה: הרווח המקסימלי גדל ב־79 ש"ח.

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 1

1. במאפייה שכונתית מכינים עוגות משני סוגים: עוגות שוקולד ועוגות גבינה.

תהליך ההכנה של כל עוגה כולל שני שלבים עיקריים: הכנת תערובת במכונה ואפייה בתנור.

במחזור ייצור רגיל אפשר להפעיל את מכונת התערובת 48 דקות לכל היותר,

ואת תנור האפייה 360 דקות לכל היותר.

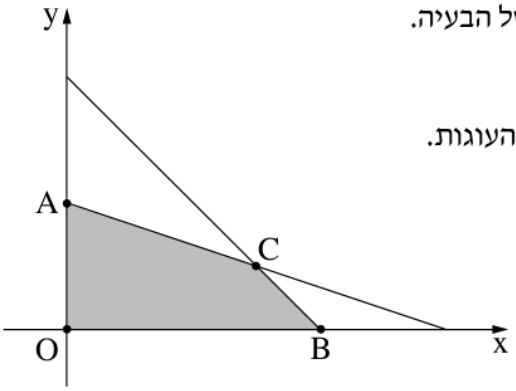
בטבלה שלפניכם מוצגים הזמן הנדרש להכנת כל אחת מן העוגות והרווח ממכירת כל עוגה.

סוג העוגה	זמן הכנת התערובת (בדקות)	זמן האפייה (בדקות)	הרווח (בשקלים)
עוגת שוקולד	4	20	47
עוגת גבינה	4	60	60

נסמן ב־ x את מספר עוגות השוקולד וב־ y את מספר עוגות הגבינה, שמכינים במאפייה זו במחזור ייצור.

א. כתבו את מערכת האילוצים של הבעיה.

לפניכם סרטוט של התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים של הבעיה.



ב. מצאו את שיעורי הנקודות A , B ו־ C .

ג. **(1)** כתבו את פונקציית המטרה של רווח המאפייה ממכירת העוגות.

(2) מצאו כמה עוגות שוקולד וכמה עוגות גבינה צריך להכין במחזור ייצור כדי להשיג רווח מקסימלי.

במהלך אחד ממחזורי הייצור הייתה הפסקת חשמל,

ולכן הצטמצמו זמני ההפעלה של מכונת התערובת ושל התנור.

במחזור ייצור זה הכינו במאפייה 9 עוגות שוקולד ו־ 2 עוגות גבינה.

ד. מצאו בכמה קטן הרווח של המאפייה במחזור הייצור שבמהלכו הייתה הפסקת החשמל מן הרווח המקסימלי במחזור ייצור רגיל.

פתרון מלא

סעיף א

מכונת התערובת: כל עוגה (משני הסוגים) דורשת 4 דקות, והמכונה פועלת 48 דקות לכל היותר:

$$4x + 4y \leq 48$$

תנור האפייה: עוגת שוקולד – 20 דקות, עוגת גבינה – 60 דקות, והתנור פועל 360 דקות לכל היותר:

$$20x + 60y \leq 360$$

מספר העוגות אינו יכול להיות שלילי:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

תשובה: $4x + 4y \leq 48$, $20x + 60y \leq 360$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

סעיף ב

נמצא לכל ישר את נקודות החיתוך שלו עם הצירים:

- $4x + 4y = 48$: עם ציר ה־y ($x = 0$): $y = 12$; עם ציר ה־x ($y = 0$): $x = 12$.
- $20x + 60y = 360$: עם ציר ה־y: $y = 6$; עם ציר ה־x: $x = 18$.

על ציר ה־y התחום נגמר בנקודה הנמוכה יותר, ועל ציר ה־x בנקודה הקרובה יותר. לפי הסרטוט:

$$A(0,6), \qquad B(12,0)$$

C היא נקודת החיתוך של שני הישרים. נמצא אותה בשיטת השוואת מקדמים: נכפיל את המשוואה הראשונה ב־5, כדי שהמקדם של x יהיה שווה בשתי המשוואות:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 48 \ \ / \cdot 5 \\ 20x + 60y = 360 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x + 20y = 240 \\ 20x + 60y = 360 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה:

$$40y = 120 \Rightarrow y = 3$$

$$4x + 4 \cdot 3 = 48 \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9$$

$$C(9,3)$$

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו O(0,0), B(12,0), C(9,3), A(0,6)

תשובה: $A(0,6)$, $B(12,0)$, $C(9,3)$

סעיף ג (1)

הרווח מעוגת שוקולד הוא 47 שקלים ומעוגת גבינה 60 שקלים, ולכן:

$$f(x,y) = 47x + 60y$$

תשובה: $f(x,y) = 47x + 60y$

סעיף ג (2)

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב:

קודקוד	$f = 47x + 60y$
$O(0,0)$	0
$B(12,0)$	$47 \cdot 12 = 564$
$C(9,3)$	$47 \cdot 9 + 60 \cdot 3 = 423 + 180 = 603$
$A(0,6)$	$60 \cdot 6 = 360$

הרווח המקסימלי, 603 שקלים, מתקבל בנקודה $C(9,3)$: 9 עוגות שוקולד ו־3 עוגות גבינה.

תשובה: 9 עוגות שוקולד ו־3 עוגות גבינה (רווח של 603 שקלים).

סעיף ד

במחזור עם הפסקת החשמל הכינו 9 עוגות שוקולד ו־2 עוגות גבינה:

$$f(9,2) = 47 \cdot 9 + 60 \cdot 2$$

$$= 423 + 120 = 543$$

הרווח המקסימלי במחזור רגיל הוא 603 שקלים (סעיף ג):

$$603 - 543 = 60$$

הרווח קטן ב־60 שקלים.
תשובה: ב־60 שקלים.

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 1

1. במפעל שמייצר סלטים מכינים שני סוגי סלטים: סלט גזר וסלט כרוב.

תהליך הייצור מורכב משני שלבים עיקריים: קיצוץ וערבוב, ולצורך כך משתמשים במפעל במכונת קיצוץ ובמכונת ערבוב.

בטבלה שלפניכם מוצג הזמן הנדרש להכנת 1 קילוגרם של כל אחד מן הסלטים.

	זמן הקיצוץ (ל־ 1 קילוגרם)	**זמן הערבוב** (ל־ 1 קילוגרם)
סלט גזר	6 דקות	2 דקות
סלט כרוב	3 דקות	4 דקות

במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את מכונת הקיצוץ 42 דקות לכל היותר ואת מכונת הערבוב 35 דקות לכל היותר.

נסמן ב־ x את מספר הקילוגרמים של סלט הגזר וב־ y את מספר הקילוגרמים של סלט הכרוב שמכינים במפעל במחזור ייצור אחד.

א. כתבו את מערכת האילוצים של הבעיה.

ב. סרטטו את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.

הרווח של המפעל ממכירה של קילוגרם אחד של סלט הגזר הוא 26 שקלים, והרווח ממכירה של קילוגרם אחד של סלט הכרוב הוא 30 שקלים.

ג. כתבו את פונקציית המטרה.

ד. כמה קילוגרמים מכל סוג של סלט צריך לייצר במפעל במחזור ייצור אחד כדי שהרווח יהיה מקסימלי?

פתרון מלא

סעיף א

x – ק"ג סלט גזר, y – ק"ג סלט כרוב (במחזור ייצור אחד).

מכונת הקיצוץ: קילוגרם גזר דורש 6 דקות קיצוץ וקילוגרם כרוב 3 דקות, ואפשר להפעיל את המכונה 42 דקות לכל היותר:

$$6x + 3y \leq 42$$

מכונת הערבוב: קילוגרם גזר דורש 2 דקות ערבוב וקילוגרם כרוב 4 דקות, לכל היותר 35 דקות:

$$2x + 4y \leq 35$$

כמויות אינן שליליות:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

תשובה:

$$\begin{cases} 6x + 3y \leq 42 \\ 2x + 4y \leq 35 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

סעיף ב

נסרטט את הישרים של האילוצים (נמצא לכל ישר שתי נקודות על הצירים):

- $6x + 3y = 42$: עובר דרך $(0, 14)$ ודרך $(7, 0)$.
- $2x + 4y = 35$: עובר דרך $(0, 8.75)$ ודרך $(17.5, 0)$.

האילוצים הם מסוג „קטן או שווה", ולכן התחום נמצא **מתחת** לשני הישרים (בדיקה: הנקודה $(0, 0)$ מקיימת את שני האילוצים). יחד עם $x \geq 0,\ y \geq 0$ התחום נמצא ברביע הראשון.

נקודת החיתוך של שני הישרים, בשיטת השוואת מקדמים: נכפיל את המשוואה השנייה ב־3, כך שהמקדם של x יהיה 6 בשתי המשוואות, ונחסר:

$$\begin{cases} 6x + 3y = 42 \\ 2x + 4y = 35 \ \ / \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y = 42 \\ 6x + 12y = 105 \end{cases}$$

$$9y = 63 \Rightarrow y = 7$$

$$6x + 3 \cdot 7 = 42$$

$$\Rightarrow 6x = 21$$

$$\Rightarrow x = 3.5$$

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו (0,0), (7,0), (3.5,7), (0,8.75)

התחום האפשרי הוא המרובע שקודקודיו $(0, 8.75),\ (3.5, 7),\ (7, 0),\ (0, 0)$.

תשובה: התחום הוא המרובע שקודקודיו $(0, 8.75),\ (3.5, 7),\ (7, 0),\ (0, 0)$.

סעיף ג

הרווח מקילוגרם סלט גזר הוא 26 ש"ח ומקילוגרם סלט כרוב 30 ש"ח, ולכן:

$$f(x, y) = 26x + 30y$$

תשובה: $f(x, y) = 26x + 30y$

סעיף ד

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב:

קודקוד	$f = 26x + 30y$
$(0, 0)$	0
$(7, 0)$	$26 \cdot 7 = 182$
$(3.5, 7)$	$26 \cdot 3.5 + 30 \cdot 7 = 91 + 210 = 301$
$(0, 8.75)$	$30 \cdot 8.75 = 262.5$

הרווח המקסימלי הוא 301 ש"ח, בנקודה $(3.5, 7)$: מייצרים 3.5 ק"ג סלט גזר ו־7 ק"ג סלט כרוב.

תשובה: 3.5 ק"ג סלט גזר ו־7 ק"ג סלט כרוב (רווח של 301 ש"ח).

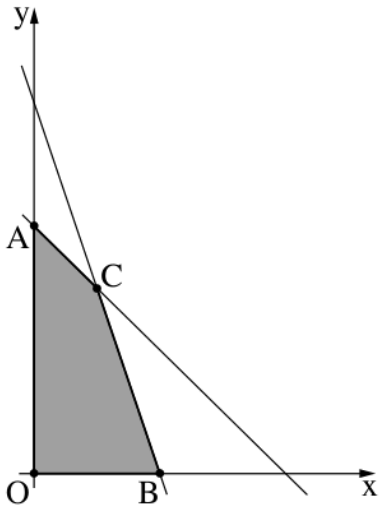
בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

1. בחנות ממתקים מוכרים מארזי שי לחג. בכל מארז יש פריטים משני סוגים: חפיסות שוקולד וחטיפים.

המשקל של חפיסת שוקולד אחת הוא 150 גרם והמשקל של חטיף אחד הוא 50 גרם.

בכל מארז יש לכל היותר 20 פריטים, והמשקל של מארז אחד הוא לכל היותר $1{,}500$ גרם.

נסמן ב־ x את מספר חפיסות השוקולד במארז וב־ y את מספר החטיפים במארז.



א. כתבו את מערכת האילוצים של הבעיה.

לפניכם סרטוט של התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים של הבעיה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A , B ו־ C שבסרטוט.

הרווח מחפיסת שוקולד אחת הוא 4 שקלים,

והרווח מחטיף אחד הוא 3 שקלים.

ג. כתבו את פונקציית המטרה.

ד. **(1)** כמה חפיסות שוקולד וכמה חטיפים צריכים להיות במארז אחד כדי להשיג רווח מקסימלי?

(2) מהו הרווח המקסימלי ממארז אחד?

ה. האם ייתכן שיש במארז אחד 9 חפיסות שוקולד ו־ 4 חטיפים? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

x – מספר חפיסות השוקולד במארז, y – מספר החטיפים במארז.

מספר הפריטים: בכל מארז יש לכל היותר 20 פריטים:

$$x + y \leq 20$$

המשקל: חפיסה שוקלת 150 גרם וחטיף 50 גרם, ומשקל המארז לכל היותר 1,500 גרם:

$$150x + 50y \leq 1500$$

מספר הפריטים אינו שלילי:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

תשובה:

$$\begin{cases} x + y \leq 20 \\ 150x + 50y \leq 1500 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

סעיף ב

נמצא לכל ישר שתי נקודות על הצירים:

- $150x + 50y = 1500$: עובר דרך $(10, 0)$ ודרך $(0, 30)$.
- $x + y = 20$: עובר דרך $(20, 0)$ ודרך $(0, 20)$.

התחום נמצא מתחת לשני הישרים (ראו סרטוט).

הנקודה A נמצאת על ציר ה־y. שם הישר הנמוך יותר הוא $x+y=20$ (הוא חותך את ציר ה־y ב־20, והישר השני ב־30). נציב $x=0$:

$$0+y=20 \Rightarrow A(0,20)$$

הנקודה B נמצאת על ציר ה־x. שם הישר הקרוב יותר לראשית הוא $150x+50y=1500$. נציב $y=0$:

$$150x=1500 \Rightarrow x=10 \Rightarrow B(10,0)$$

C היא נקודת החיתוך של שני הישרים. בשיטת השוואת מקדמים: נכפיל את המשוואה $x+y=20$ ב־50, כך שהמקדם של y יהיה 50 בשתי המשוואות, ונחסר:

$$\begin{cases} 150x+50y=1500 \\ x+y=20 \ \ /\cdot 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 150x+50y=1500 \\ 50x+50y=1000 \end{cases}$$

$$100x=500 \Rightarrow x=5$$

$$5+y=20 \Rightarrow y=15$$

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו O(0,0), B(10,0), C(5,15), A(0,20)

לכן $C(5,15)$.

תשובה: $A(0,20),\ B(10,0),\ C(5,15)$

סעיף ג

הרווח מחפיסת שוקולד הוא 4 ש"ח ומחטיף 3 ש"ח, ולכן:

$$f(x,y)=4x+3y$$

תשובה: $f(x,y)=4x+3y$

סעיף ד (1)

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב:

קודקוד	$f=4x+3y$
$O(0,0)$	0
$B(10,0)$	$4\cdot 10=40$
$C(5,15)$	$4\cdot 5+3\cdot 15 = 20+45=65$
$A(0,20)$	$3\cdot 20=60$

הערך המקסימלי מתקבל בנקודה $C(5,15)$: 5 חפיסות שוקולד ו־15 חטיפים.

תשובה: 5 חפיסות שוקולד ו־15 חטיפים.

סעיף ד (2)

לפי הטבלה בסעיף ד (1):

$$f(5,15)=4\cdot 5+3\cdot 15=65$$

תשובה: 65 ש"ח.

סעיף ה

נבדוק אם הנקודה $(9,4)$ מקיימת את כל האילוצים.

מספר הפריטים – מתקיים:

$$9 + 4 = 13 \leq 20$$

המשקל – לא מתקיים:

$$150 \cdot 9 + 50 \cdot 4 = 1350 + 200 = 1550$$

$$1550 > 1500$$

אילוץ המשקל לא מתקיים (הנקודה מחוץ לתחום האפשרי), ולכן לא ייתכן מארז כזה.

תשובה: לא. המשקל יהיה 1,550 גרם, יותר מ־1,500 גרם.

בגרות חורף תשפ״ה (2025) • שאלה 1

1. במפעל לייצור רהיטים מכינים שני סוגים של רהיטים: ספות וכורסאות.

בתהליך הייצור יש שני שלבים: שלב חיתוך העץ ושלב הריפוד.

במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את מכונת החיתוך במשך 32 שעות לכל היותר ואת מכונת הריפוד במשך 36 שעות לכל היותר.

בטבלה שלפניכם מוצג מספר השעות הנדרש לייצור כל אחד מסוגי הרהיטים.

	זמן הפעלת מכונת החיתוך (בשעות)	**זמן הפעלת מכונת הריפוד** (בשעות)
ספה	4	2
כורסה	2	6

נסמן ב־ x את מספר הספות וב־ y את מספר הכורסאות שמייצרים במפעל במחזור ייצור אחד.

א. כתבו את מערכת האילוצים של הבעיה.

ב. סרטטו את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.

הרווח של המפעל מכל ספה הוא 400 שקלים ומכל כורסה 700 שקלים.

ג. **(1)** כתבו את פונקציית המטרה.

(2) כמה ספות וכמה כורסאות על המפעל לייצר במחזור ייצור אחד כדי להרוויח רווח מקסימלי?

באחד ממחזורי הייצור יְיצרו במפעל כורסאות בלבד. במחזור זה יְיצרו את מספר הכורסאות המקסימלי האפשרי.

ד. כמה כורסאות יְיצרו במפעל במחזור ייצור זה?

פתרון מלא

סעיף א

x – מספר הספות, y – מספר הכורסאות במחזור ייצור אחד.

מכונת החיתוך: ספה דורשת 4 שעות וכורסה 2 שעות, ואפשר להפעיל את המכונה 32 שעות לכל היותר:

$$4x + 2y \leq 32$$

מכונת הריפוד: ספה דורשת 2 שעות וכורסה 6 שעות, לכל היותר 36 שעות:

$$2x + 6y \leq 36$$

מספר הרהיטים אינו שלילי:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

תשובה: $4x + 2y \leq 32,\ \ 2x + 6y \leq 36,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0$

סעיף ב

נסרטט את הישרים של האילוצים (נמצא לכל ישר שתי נקודות על הצירים):

- $4x + 2y = 32$: עובר דרך $(0, 16)$ ודרך $(8, 0)$.
- $2x + 6y = 36$: עובר דרך $(0, 6)$ ודרך $(18, 0)$.

האילוצים הם מסוג „קטן או שווה", ולכן התחום נמצא **מתחת** לשני הישרים (בדיקה: הנקודה $(0,0)$ מקיימת את שני האילוצים). יחד עם $x \geq 0,\ y \geq 0$ התחום נמצא ברביע הראשון.

נקודת החיתוך של שני הישרים – בשיטת השוואת מקדמים: נכפיל את המשוואה השנייה ב־2, כדי שהמקדמים של x יהיו שווים, ונחסר:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 32 \\ 2x + 6y = 36 \ \ / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 32 \\ 4x + 12y = 72 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה העליונה מהתחתונה (ה־$4x$ מתבטלים):

$$12y - 2y = 72 - 32$$

$$10y = 40 \Rightarrow y = 4$$

נציב $y = 4$ במשוואה $4x + 2y = 32$:

$$4x + 8 = 32 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$$

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו (0,0), (8,0), (6,4), (0,6)

התחום האפשרי הוא המרובע שקודקודיו $(0,6),\ (6,4),\ (8,0),\ (0,0)$.

תשובה: מרובע שקודקודיו $(0,6),\ (6,4),\ (8,0),\ (0,0)$

סעיף ג (1)

הרווח מכל ספה הוא 400 ש"ח ומכל כורסה 700 ש"ח, ולכן:

$$f(x,y) = 400x + 700y$$

תשובה: $f(x,y) = 400x + 700y$

סעיף ג (2)

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב:

קודקוד	$f = 400x + 700y$
$(0,0)$	0
$(8,0)$	$400 \cdot 8 = 3200$
$(6,4)$	$400 \cdot 6 + 700 \cdot 4 = 2400 + 2800 = 5200$
$(0,6)$	$700 \cdot 6 = 4200$

הרווח המקסימלי הוא 5200 ש"ח, בנקודה $(6,4)$: יש לייצר 6 ספות ו־4 כורסאות.

תשובה: 6 ספות ו־4 כורסאות (רווח של 5200 ש"ח).

סעיף ד

מייצרים כורסאות בלבד, כלומר $x = 0$. נציב באילוצים:

$$4 \cdot 0 + 2y \leq 32 \Rightarrow y \leq 16$$

$$2 \cdot 0 + 6y \leq 36 \Rightarrow y \leq 6$$

שני האילוצים צריכים להתקיים יחד, ולכן $y \leq 6$. בסרטוט: על ציר ה־y התחום מגיע עד הקודקוד $(0,6)$.

המספר המקסימלי של כורסאות הוא 6.

תשובה: 6 כורסאות.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 2

2. במפעל מייצרים אבקות כביסה משני סוגים: אבקת כביסה ביתית ואבקת כביסה תעשייתית.

מכונה א' מערבבת כל אחת מן האבקות ומכונה ב' אורזת אותן.

בטבלה שלפניכם מוצג הזמן הנדרש לכל אחת מן המכונות כדי לייצר טונה אחת של אבקת כביסה.

	זמן ערבוב במכונה א' (לטונה)	**זמן אריזה במכונה ב'** (לטונה)
אבקת כביסה ביתית	6 שעות	5 שעות
אבקת כביסה תעשייתית	4 שעות	15 שעות

העבודה במפעל מתנהלת במחזורי ייצור, ובכל מחזור כל אחת מן המכונות יכולה לפעול במשך זמן מסוים.

במחזור ייצור אחד מכונה א' יכולה לפעול 33 שעות לכל היותר, ומכונה ב' יכולה לפעול 45 שעות לכל היותר.

נסמן ב־ x את כמות אבקת הכביסה הביתית וב־ y את כמות אבקת הכביסה התעשייתית שמכינים במחזור ייצור אחד.

א. כתבו את מערכת האילוצים של הבעיה.

ב. סרטטו את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.

הרווח של המפעל הוא 8,000 שקלים לכל טונה של אבקה ביתית ו־ 10,000 שקלים לכל טונה של אבקה תעשייתית.

ג. **(1)** כתבו את פונקציית המטרה.

(2) כמה טונות מכל סוג אבקה כדאי למפעל לייצר במחזור ייצור אחד כדי להשיג רווח מקסימלי?

במחזור ייצור מסוים הרוויח המפעל 50,000 שקלים. במחזור זה ייצרו במפעל 2 טונות של אבקת כביסה תעשייתית.

ד. מצאו כמה טונות של אבקת כביסה ביתית ייצרו במפעל במחזור ייצור זה.

פתרון מלא

סעיף א

x – טונות של אבקה ביתית, y – טונות של אבקה תעשייתית במחזור ייצור אחד.

מכונה א' (ערבוב): טונה ביתית דורשת 6 שעות וטונה תעשייתית 4 שעות, לכל היותר 33 שעות:

$$6x + 4y \leq 33$$

מכונה ב' (אריזה): טונה ביתית דורשת 5 שעות וטונה תעשייתית 15 שעות, לכל היותר 45 שעות:

$$5x + 15y \leq 45$$

הכמויות אינן שליליות:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

תשובה: $6x + 4y \leq 33,\ \ 5x + 15y \leq 45,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0$

סעיף ב

נסרטט את הישרים של האילוצים (נמצא לכל ישר שתי נקודות על הצירים):

- $6x + 4y = 33$: עובר דרך $(0, 8.25)$ ודרך $(5.5, 0)$.
- $5x + 15y = 45$: עובר דרך $(0, 3)$ ודרך $(9, 0)$.

האילוצים הם מסוג „קטן או שווה", ולכן התחום נמצא **מתחת** לשני הישרים (בדיקה: הנקודה $(0, 0)$ מקיימת את שני האילוצים). יחד עם $x \geq 0,\ y \geq 0$ התחום נמצא ברביע הראשון.

נקודת החיתוך של שני הישרים – בשיטת השוואת מקדמים: נכפיל את המשוואה הראשונה ב־5 ואת השנייה ב־6, כדי שהמקדמים של x יהיו שווים, ונחסר:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 33 \ \ / \cdot 5 \\ 5x + 15y = 45 \ \ / \cdot 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30x + 20y = 165 \\ 30x + 90y = 270 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה העליונה מהתחתונה (ה־$30x$ מתבטלים):

$$90y - 20y = 270 - 165$$

$$70y = 105 \Rightarrow y = 1.5$$

נציב $y = 1.5$ במשוואה $6x + 4y = 33$:

$$6x + 6 = 33 \Rightarrow 6x = 27 \Rightarrow x = 4.5$$

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו (0,0), (5.5,0), (4.5,1.5), (0,3)

התחום האפשרי הוא המרובע שקודקודיו $(0, 3),\ (4.5, 1.5),\ (5.5, 0),\ (0, 0)$.

תשובה: מרובע שקודקודיו $(0, 3),\ (4.5, 1.5),\ (5.5, 0),\ (0, 0)$

סעיף ג (1)

הרווח מטונה של אבקה ביתית הוא 8,000 ש"ח ומטונה של אבקה תעשייתית 10,000 ש"ח, ולכן:

$$f(x, y) = 8000x + 10000y$$

תשובה: $f(x, y) = 8000x + 10000y$

סעיף ג (2)

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב:

קודקוד	$f = 8000x + 10000y$
$(0, 0)$	0
$(5.5, 0)$	$8000 \cdot 5.5 = 44{,}000$
$(4.5, 1.5)$	$8000 \cdot 4.5 + 10000 \cdot 1.5 = 36{,}000 + 15{,}000 = 51{,}000$
$(0, 3)$	$10000 \cdot 3 = 30{,}000$

הרווח המקסימלי הוא 51,000 ש"ח, בנקודה $(4.5, 1.5)$: כדאי לייצר 4.5 טונות של אבקה ביתית ו־1.5 טונות של אבקה תעשייתית.

תשובה: 4.5 טונות של אבקה ביתית ו־1.5 טונות של אבקה תעשייתית (רווח של 51,000 ש"ח).

סעיף ד

הרווח היה 50,000 ש"ח, וייצרו $y = 2$ טונות של אבקה תעשייתית. נציב בפונקציית המטרה:

$$8000x + 10000 \cdot 2 = 50{,}000$$

$$8000x + 20{,}000 = 50{,}000$$

$$8000x = 30{,}000 \Rightarrow x = 3.75$$

תשובה: 3.75 טונות של אבקה ביתית.

בגרות קיץ תשפ״ד (2024) – מועד א׳ • שאלה 2

2. בחנות למוצרי קוסמטיקה מוכרים מארזי מתנה משני סוגים, א׳ ו־ ב׳. המארזים מורכבים מסבונים וקרמים.
בטבלה שלפניכם מוצגים מספר הסבונים ומספר הקרמים, על פי סוג המארז.

	מספר הסבונים	מספר הקרמים
מארז א׳	12	3
מארז ב׳	8	6

בכל יום יש בחנות 240 סבונים לכל היותר ו־ 132 קרמים לכל היותר שמהם אפשר להרכיב מארזים.
הרווח מכל מארז מסוג א׳ הוא 25 שקלים ומכל מארז מסוג ב׳ 20 שקלים.
סמנו ב־ x את מספר המארזים מסוג א׳ וב־ y את מספר המארזים מסוג ב׳.

א. כתבו את מערכת האילוצים של הבעיה.

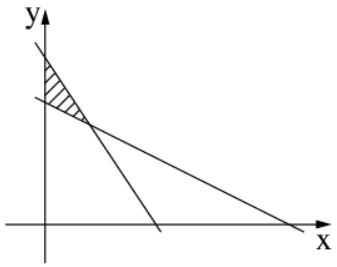
ב. כתבו את פונקציית המטרה.

ג. קבעו איזה מן הסרטוטים 1–3 שבסוף השאלה מתאר את התחום האפשרי של הבעיה (השטח המקווקו).

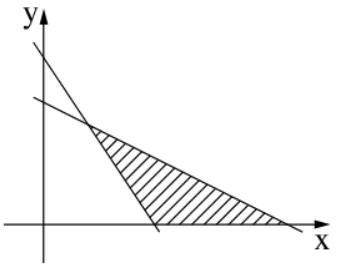
ד. מצאו כמה מארזים מכל סוג צריך למכור ביום אחד כדי שהרווח ממכירת המארזים יהיה מקסימלי.

ביום מסוים התברר שיש במחסן של החנות מספר גדול של קרמים שהתוקף שלהם עומד לפוג.
לכן באותו היום החליטו לארוז 132 קרמים לפחות (האילוץ של מספר הסבונים לא השתנה).

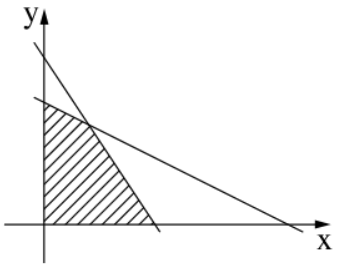
ה. קבעו איזה מן הסרטוטים 1–3 שבסוף השאלה מתאר את התחום האפשרי ביום זה.



3



2



1

פתרון מלא

סעיף א

לפי הטבלה: במארז א' 12 סבונים ו־3 קרמים, במארז ב' 8 סבונים ו־6 קרמים.

סבונים (לכל היותר 240):

$$12x + 8y \leq 240$$

קרמים (לכל היותר 132):

$$3x + 6y \leq 132$$

מספר המארזים אינו שלילי:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

אפשר לצמצם: הראשון ב־4 והשני ב־3:

$$3x + 2y \leq 60$$

$$x + 2y \leq 44$$

תשובה: $12x + 8y \leq 240,\ \ 3x + 6y \leq 132,\ \ x \geq 0,\ y \geq 0$

סעיף ב

הרווח ממארז א' הוא 25 ש"ח וממארז ב' 20 ש"ח, ולכן:

$$f(x, y) = 25x + 20y$$

תשובה: $f(x, y) = 25x + 20y$

סעיף ג

נסרטט את ישרי האילוצים (שתי נקודות על הצירים לכל ישר):

- $3x + 2y = 60$: עובר דרך $(0, 30)$ ו־$(20, 0)$ (הישר התלול).
- $x + 2y = 44$: עובר דרך $(0, 22)$ ו־$(44, 0)$ (הישר המתון).

שני האילוצים מסוג „קטן או שווה", ולכן התחום נמצא **מתחת לשני הישרים** (הנקודה $(0, 0)$ מקיימת את שניהם), ברביע הראשון. זה השטח המקווקו ב**סרטוט 1**.

תשובה: סרטוט 1

סעיף ד

נמצא את נקודת החיתוך של שני הישרים בשיטת השוואת מקדמים (המקדם של y זהה בשתי המשוואות, ולכן נחסר אותן):

$$\begin{cases} 3x + 2y = 60 \\ x + 2y = 44 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה:

$$2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

נציב $x = 8$ במשוואה השנייה:

$$8 + 2y = 44$$
$$2y = 36 \Rightarrow y = 18$$

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו (0,0), (20,0), (8,18), (0,22)

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב:

קודקוד	$f = 25x + 20y$
$(0, 0)$	0
$(20, 0)$	$25 \cdot 20 = 500$
$(8, 18)$	$25 \cdot 8 + 20 \cdot 18 = 200 + 360 = 560$
$(0, 22)$	$20 \cdot 22 = 440$

הרווח המקסימלי, 560 ש"ח, מתקבל בנקודה $(8, 18)$.

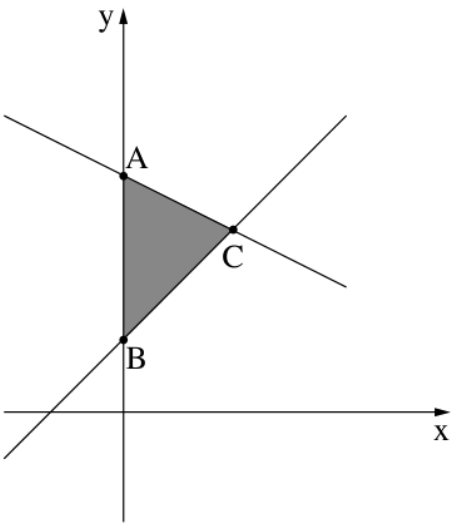
תשובה: 8 מארזים מסוג א' ו־18 מארזים מסוג ב' (רווח 560 ש"ח).

סעיף ה

אילוץ הקרמים מתהפך: לפחות 132 קרמים, כלומר $3x + 6y \geq 132$ (או $x + 2y \geq 44$). אילוץ הסבונים לא השתנה: $3x + 2y \leq 60$.

לכן התחום נמצא **מעל** הישר המתון $x+2y=44$ ו**מתחת** לישר התלול $3x+2y=60$, ליד ציר ה־y:
המשולש שקודקודיו $(0,30)$,$(0,22)$ ו־$(8,18)$ (נקודת החיתוך של שני הישרים, שמצאנו בסעיף ד).
התחום החדש: משולש שקודקודיו (0,22), (0,30), (8,18)
זה השטח המקווקו ב**סרטוט 3**.
תשובה: סרטוט 3

בגרות חורף תשפ״ד (2024) • שאלה 2



2. התחום האפור בסרטוט שלפניכם מתקבל ממערכת אילוצים של מפעל שמייצר x סוכריות ו־y מסטיקים בדקה.

משוואת הישר BC היא $y = x + 4$.

משוואת הישר AC היא $y = -0.5x + 13$.

הנקודות A ו־B נמצאות על ציר ה־y.

לפניכם שתי מערכות אילוצים I–II.

מערכת אילוצים I	מערכת אילוצים II
$y \geq x + 4$	$y \leq x + 4$
$y \leq -0.5x + 13$	$y \geq -0.5x + 13$
$x \geq 0$	$x \geq 0$
$y \geq 0$	$y \geq 0$

א. בחרו את מערכת האילוצים המתאימה לבעיה זו.

על כל סוכרייה המפעל מרוויח 2 שקלים, ועל כל מסטיק הוא מרוויח שקל אחד.

ב. **(1)** כתבו את פונקציית המטרה.

(2) כמה סוכריות וכמה מסטיקים המפעל צריך לייצר בדקה כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי?

ג. האם ייתכן שהמפעל מייצר 5 סוכריות ו־5 מסטיקים בדקה? נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

התחום האפור נמצא **מעל** הישר BC ו**מתחת** לישר AC, ברביע הראשון. נבדוק עם נקודה בתוך התחום, למשל $(1, 8)$:

- $8 \geq 1 + 4 = 5$ ✓ – כלומר $y \geq x + 4$ (מעל BC).
- $8 \leq -0.5 \cdot 1 + 13 = 12.5$ ✓ – כלומר $y \leq -0.5x + 13$ (מתחת ל־AC).

יחד עם $x \geq 0,\ y \geq 0$ זו **מערכת I**.

תשובה: מערכת I

סעיף ב (1)

על כל סוכרייה (x) הרווח 2 ש״ח ועל כל מסטיק (y) שקל אחד:

$$f(x, y) = 2x + y$$

תשובה: $f(x, y) = 2x + y$

סעיף ב (2)

נמצא את קודקודי התחום:

A ו־B נמצאות על ציר ה־y, ולכן נציב $x = 0$:

- בישר AC: $y = -0.5 \cdot 0 + 13 = 13$, כלומר $A(0,13)$.
- בישר BC: $y = 0 + 4 = 4$, כלומר $B(0,4)$.

C הוא נקודת החיתוך של BC ו־AC. נכתוב את שתי המשוואות בצורה $ax + by = c$ ונמצא את החיתוך בשיטת השוואת מקדמים (המקדם של y זהה, ולכן נחסר):

$$\begin{cases} -x + y = 4 \\ 0.5x + y = 13 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה:

$$-1.5x = -9 \Rightarrow x = 6$$

נציב $x = 6$ במשוואה הראשונה:

$$-6 + y = 4 \Rightarrow y = 10$$

$$C(6,10)$$

התחום האפשרי: משולש שקודקודיו A(0,13), B(0,4), C(6,10)

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב את הקודקודים:

קודקוד	$f = 2x + y$
$A(0,13)$	13
$B(0,4)$	4
$C(6,10)$	$2 \cdot 6 + 10 = 22$

הרווח המקסימלי, 22 ש״ח בדקה, מתקבל בנקודה $C(6,10)$: 6 סוכריות ו־10 מסטיקים.

תשובה: 6 סוכריות ו־10 מסטיקים בדקה (רווח 22 ש״ח).

סעיף ג

נבדוק אם הנקודה $(5,5)$ מקיימת את כל האילוצים של מערכת I. נציב $x = 5,\ y = 5$ באילוץ $y \geq x + 4$:

$$5 \geq 5 + 4$$

$$5 \geq 9$$

זה לא נכון ✗. האילוץ לא מתקיים (הנקודה נמצאת מתחת לישר BC, מחוץ לתחום האפשרי), ולכן לא ייתכן שהמפעל מייצר 5 סוכריות ו־5 מסטיקים בדקה.

תשובה: לא – הנקודה $(5,5)$ אינה בתחום האפשרי.

בגרות קיץ תשפ״ג (2023) – מועד ב׳ • שאלה 2

2. נדב מגדל בצל וגזר בשדה ששטחו 11 דונם לכל היותר.

כדי לגדל בצל בדונם אחד דרושים 2 ימי עבודה. כדי לגדל גזר בדונם אחד דרושים 7 ימי עבודה.

לרשות נדב עומדים לכל היותר 42 ימי עבודה.

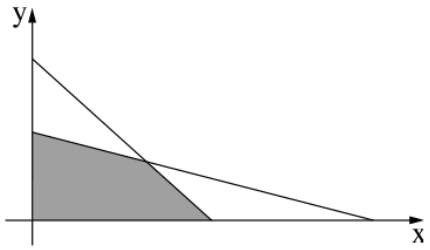
נסמן ב־ x את מספר הדונמים שבהם נדב מגדל בצל, וב־ y את מספר הדונמים שבהם נדב מגדל גזר.

א. רשמו את מערכת האילוצים של הבעיה.

הרווח של נדב מגידול בצל בדונם אחד הוא 800 שקלים, ומגידול גזר בדונם אחד הוא $1,200$ שקלים.

ב. רשמו את פונקציית המטרה המתאימה לבעיה.

לפניכם סרטוט של התחום האפשרי המתאים לבעיה, המתקבל ממערכת האילוצים.



ג. מצאו בכמה דונמים נדב צריך לגדל בצל, ובכמה דונמים הוא צריך לגדל גזר, כדי שהכנסתו תהיה מקסימלית.

מחירי הגזר ירדו בעונת הגידול הבאה. הרווח של נדב מגידול גזר בדונם אחד הצטמצם ל־ 800 שקלים (הרווח מגידול בצל בדונם אחד לא השתנה).

ד. לפניכם 3 אפשרויות למספר הדונמים שבהם נדב יכול לגדל בצל וגזר בעונה זו.

בחרו את כל האפשרויות שמתקבל בהן רווח מקסימלי לאחר ירידת מחירי הגזר.

1. 7 דונם בצל ו־ 4 דונם גזר.
2. 9 דונם בצל ו־ 2 דונם גזר.
3. 0 דונם בצל ו־ 6 דונם גזר.

פתרון מלא

סעיף א

שטח השדה (לכל היותר 11 דונם):

$$x + y \leq 11$$

ימי עבודה (2 ימים לדונם בצל, 7 ימים לדונם גזר, לכל היותר 42):

$$2x + 7y \leq 42$$

מספר הדונמים אינו שלילי:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

תשובה: $x + y \leq 11,\ \ 2x + 7y \leq 42,\ \ x \geq 0,\ y \geq 0$

סעיף ב

הרווח מדונם בצל 800 ש״ח ומדונם גזר 1,200 ש״ח:

$$f(x, y) = 800x + 1200y$$

תשובה: $f(x,y)=800x+1200y$

סעיף ג

נמצא את קודקודי התחום. נקודות החיתוך עם הצירים:

- הישר $x+y=11$ חותך את ציר ה־x בנקודה $(11,0)$.
- הישר $2x+7y=42$ חותך את ציר ה־y בנקודה $(0,6)$.

נקודת החיתוך של שני הישרים, בשיטת השוואת מקדמים: נכפול את המשוואה הראשונה ב־2 כדי שהמקדם של x יהיה זהה, ונחסר:

$$\begin{cases} x+y=11 \ \ /\cdot 2 \\ 2x+7y=42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y=22 \\ 2x+7y=42 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה:

$$5y=20 \Rightarrow y=4$$

נציב $y=4$ במשוואה $x+y=11$:

$$x+4=11 \Rightarrow x=7$$

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו (0,0), (11,0), (7,4), (0,6)

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב:

קודקוד	$f=800x+1200y$
$(0,0)$	0
$(11,0)$	$800\cdot 11=8800$
$(7,4)$	$800\cdot 7+1200\cdot 4$ $=5600+4800=10400$
$(0,6)$	$1200\cdot 6=7200$

ההכנסה המקסימלית, 10,400 ש"ח, מתקבלת בנקודה $(7,4)$: 7 דונם בצל ו־4 דונם גזר.

תשובה: 7 דונם בצל ו־4 דונם גזר (רווח 10,400 ש"ח).

סעיף ד

האילוצים לא השתנו, ולכן התחום האפשרי זהה. פונקציית המטרה החדשה:

$$f(x,y)=800x+800y$$
$$=800(x+y)$$

הערך המקסימלי מתקבל באחד מקודקודי התחום. נבדוק את הקודקודים:

קודקוד	$f=800x+800y$
$(0,0)$	0
$(11,0)$	$800\cdot 11=8800$
$(7,4)$	$800\cdot(7+4)$ $=800\cdot 11=8800$
$(0,6)$	$800\cdot 6=4800$

הרווח המקסימלי הוא 8,800 ש"ח, והוא מתקבל בשני קודקודים סמוכים – ולכן בכל נקודה על הצלע שביניהם, כלומר בכל נקודה בתחום שבה $x+y=11$.

נבדוק כל אפשרות. אפשרות 2 נמצאת בתחום: $9+2=11\le 11$ וגם $2\cdot 9+7\cdot 2=32\le 42$.

אפשרות	(x,y)	רווח
1	$(7,4)$	$800\cdot 11=8800$ ✓
2	$(9,2)$	$800\cdot 11=8800$ ✓
3	$(0,6)$	$800\cdot 6=4800$ ✗

תשובה: אפשרויות 1 ו־2 (בשתיהן רווח של 8,800 ש"ח).

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 2

2. נדב עובד בפיצרייה קטנה ובה הוא אופה פיצות משפחתיות ופיצות אישיות.

בטבלה שלפניכם מוצגים נתונים בנוגע לכמות הבצק, זמן האפייה והרווח הנקי מן המכירה של פיצה משפחתית ושל פיצה אישית בפיצרייה.

	כמות בצק לפיצה (גרם)	זמן אפייה (דקות)	רווח נקי לפיצה (שקלים)
פיצה משפחתית	300	12	25
פיצה אישית	100	8	18

נדב יכול להתחיל לאפות פיצה חדשה רק אחרי שמסתיימת אפיית הפיצה הקודמת.

ביום מסוים היו לנדב $2,700$ גרם בצק לכל היותר ו־ 2 שעות של אפייה לכל היותר.

סמנו ב־ x את מספר הפיצות המשפחתיות שאפה נדב ביום זה.

סמנו ב־ y את מספר הפיצות האישיות שאפה נדב ביום זה.

א. **(1)** רשמו את מערכת האילוצים של הבעיה.

(2) סרטטו את התחום האפשרי של הבעיה.

ב. רשמו את פונקציית המטרה של הבעיה.

ג. מהו הרווח המקסימלי האפשרי ביום זה ממכירת כל הפיצות?

פתרון מלא

סעיף א (1)

- בצק: פיצה משפחתית 300 גרם, אישית 100 גרם, לכל היותר 2700 גרם:

$$300x + 100y \le 2700$$

$$\Leftrightarrow \; 3x + y \le 27$$

- זמן אפייה: 12 דקות ו־8 דקות, לכל היותר 2 שעות = 120 דקות (אופים פיצה אחת בכל פעם, ולכן הזמנים מתחברים):

$$12x + 8y \le 120$$

$$\Leftrightarrow \; 3x + 2y \le 30$$

- $x \ge 0,\ y \ge 0$

תשובה: $3x + y \le 27,\ \ 3x + 2y \le 30,\ \ x \ge 0,\ y \ge 0$

סעיף א (2)

- $3x + y = 27$: עובר דרך $(9, 0)$ ו־$(0, 27)$.
- $3x + 2y = 30$: עובר דרך $(10, 0)$ ו־$(0, 15)$.

שני האילוצים מסוג $\le$, ולכן התחום מתחת לשני הישרים. נקודת החיתוך, בשיטת השוואת מקדמים (המקדם של x זהה, ולכן נחסר את המשוואות):

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 3x + y = 27 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה:

$y = 3$

נציב $y = 3$ במשוואה $3x + y = 27$:

$3x + 3 = 27$

$3x = 24 \Rightarrow x = 8$

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו (0,0), (9,0), (8,3), (0,15)

התחום הוא המרובע שקודקודיו $(0,15)\ ,(8,3)\ ,(9,0)\ ,(0,0)$.

תשובה: מרובע שקודקודיו $(0,15)\ ,(8,3)\ ,(9,0)\ ,(0,0)$.

סעיף ב

רווח נקי של 25 ש"ח לפיצה משפחתית ו־18 ש"ח לפיצה אישית:

$f(x,y) = 25x + 18y$

תשובה: $f(x,y) = 25x + 18y$

סעיף ג

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב את הקודקודים:

קודקוד	$f = 25x + 18y$
$(0,0)$	0
$(9,0)$	$25 \cdot 9 = 225$
$(8,3)$	$25 \cdot 8 + 18 \cdot 3 = 200 + 54 = 254$
$(0,15)$	$18 \cdot 15 = 270$

המקסימום מתקבל ב־$(0,15)$: 0 פיצות משפחתיות ו־15 פיצות אישיות.

תשובה: הרווח המקסימלי הוא 270 ש"ח.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 2

2. במאפייה מכינים שני סוגי מאפים: מאפה המכיל שומשום ומאפה בלי שומשום.

לכל מאפה המכיל שומשום דרושים 80 גרם בצק ו־ 4 גרם שומשום.

לכל מאפה בלי שומשום דרושים 100 גרם בצק.

הטבלה שלפניכם מציגה את הרווח של המאפייה מכל מאפה שנמכר.

א. השלימו את הנתונים החסרים בטבלה על פי הנתונים שבשאלה.

	משקל הבצק הדרוש למאפה (בגרמים)	משקל השומשום הדרוש למאפה (בגרמים)	הרווח של המאפייה ממכירת כל מאפה
מאפה המכיל שומשום			4 שקלים
מאפה בלי שומשום		0	2 שקלים

ביום מסוים היו למאפייה 20 ק"ג בצק לכל היותר ו־ 640 גרם שומשום לכל היותר.

ב. אם אופים רק מאפים בלי שומשום, כמה מאפים לכל היותר אפשר לאפות ביום זה במאפייה?

סמנו ב־ x את מספר המאפים המכילים שומשום, וסמנו ב־ y את מספר המאפים בלי שומשום.

ג. רשמו את מערכת האילוצים של הבעיה.

ד. סרטטו את התחום האפשרי של הבעיה.

ה. רשמו את פונקציית המטרה של הבעיה.

ו. מהו הרווח המקסימלי האפשרי ביום זה ממכירת כל המאפים?

פתרון מלא

סעיף א

מעתיקים לטבלה את הנתונים מהשאלה:

	בצק (גרם)	**שומשום (גרם)**	**רווח (ש"ח)**
עם שומשום	**80**	**4**	4
בלי שומשום	**100**	0	2

תשובה: מאפה עם שומשום: 80 גרם בצק, 4 גרם שומשום (רווח 4 ש"ח); מאפה בלי שומשום: 100 גרם בצק, 0 גרם שומשום (רווח 2 ש"ח).

סעיף ב

יש 20 ק"ג בצק, כלומר $20{,}000$ גרם. מאפה בלי שומשום אינו צורך שומשום, ולכן רק כמות הבצק מגבילה:

$$\frac{20{,}000}{100} = 200$$

תשובה: 200 מאפים.

סעיף ג

בצק: כל מאפה עם שומשום צורך 80 גרם וכל מאפה בלי שומשום 100 גרם, ויש לכל היותר $20{,}000$ גרם:

$$80x + 100y \le 20{,}000$$

שומשום: רק המאפים עם שומשום צורכים אותו, 4 גרם כל אחד, ויש לכל היותר 640 גרם:

$$4x \le 640 \;\Rightarrow\; x \le 160$$

אי־שליליות: מספר מאפים אינו שלילי:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

תשובה: $80x + 100y \leq 20{,}000$**,** $4x \leq 640$ **,** $x \geq 0$ **,** $y \geq 0$

סעיף ד

נסרטט את הישרים של האילוצים:

- $80x + 100y = 20{,}000$: עובר דרך $(0, 200)$ ודרך $(250, 0)$.
- $x = 160$: ישר אנכי.

התחום נמצא מתחת לישר הבצק ומשמאל לישר $x = 160$ (בדיקה: $(0, 0)$ מקיימת את שני האילוצים), ברביע הראשון.

נקודת החיתוך של שני הישרים: על הישר האנכי $x = 160$, ולכן נציב $x = 160$ במשוואת ישר הבצק:

$$80 \cdot 160 + 100y = 20{,}000$$

$$12{,}800 + 100y = 20{,}000$$

$$100y = 7{,}200$$

$$y = 72$$

נקודת החיתוך: $(160, 72)$.

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו (0,0), (160,0), (160,72), (0,200)

התחום האפשרי הוא המרובע שקודקודיו $(0, 200),\ (160, 72),\ (160, 0),\ (0, 0)$.

תשובה: התחום הוא המרובע שקודקודיו $(0, 200),\ (160, 72),\ (160, 0),\ (0, 0)$ **(ראו סרטוט).**

סעיף ה

הרווח ממאפה עם שומשום הוא 4 ש"ח וממאפה בלי שומשום 2 ש"ח, ולכן:

$$f(x, y) = 4x + 2y$$

תשובה: $f(x, y) = 4x + 2y$

סעיף ו

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב:

קודקוד	$f = 4x + 2y$
$(0, 0)$	0
$(160, 0)$	$4 \cdot 160 = 640$
$(160, 72)$	$4 \cdot 160 + 2 \cdot 72 = 640 + 144 = 784$
$(0, 200)$	$2 \cdot 200 = 400$

הרווח המקסימלי הוא 784 ש"ח, בנקודה $(160, 72)$.

תשובה: 784 ש"ח (160 מאפים עם שומשום ו־72 בלי שומשום).

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 2

2. רונן מתאמן בחדר כושר. מאמן הכושר המליץ לו לאכול לפי תפריט מיוחד כדי להעלות את מסת השריר שלו.

התפריט כולל רק מנות בשר ומנות סלט ירוק.

בטבלה שלפניכם נתונים מספר הקלוריות וכמות החלבון במנת בשר ובמנת סלט ירוק.

	מספר הקלוריות	**כמות החלבון** (בגרם)
מנת בשר	224	45
מנת סלט ירוק	56	15

מאמן הכושר החליט שעל רונן לצרוך ביום אחד $1,792$ קלוריות לכל היותר, ו־ 135 גרם חלבון לפחות.

סמנו ב־ x את מספר מנות הבשר וב־ y את מספר מנות הסלט הירוק.

א. כתבו את מערכת האילוצים של הבעיה.

ב. סרטטו את התחום האפשרי של הבעיה.

המחיר של מנת בשר אחת הוא 26 שקלים, והמחיר של מנת סלט ירוק אחת הוא 12 שקלים.

ג. כתבו את פונקציית המטרה.

רונן רוצה להעלות את מסת השריר שלו ולשלם בעבור המנות את **המחיר הנמוך ביותר**.

ד. מצאו כמה מנות בשר וכמה מנות סלט ירוק רונן צריך לאכול ביום אחד.

המחיר של מנת בשר עלה, וכעת מחירה הוא 37 שקלים. המחיר של מנת סלט ירוק נשאר ללא שינוי.

ה. האם חל שינוי בכמות מנות הבשר ובכמות מנות הסלט הירוק שרונן צריך לאכול ביום אחד כדי שיצליח להעלות את מסת השריר שלו ולשלם בעבור המנות את המחיר הנמוך ביותר? נמקו.

פתרון מלא

סעיף א

קלוריות: כל מנת בשר 224 קלוריות וכל מנת סלט 56 קלוריות, ולכל היותר 1,792 קלוריות ביום:

$$224x + 56y \leq 1792$$

חלבון: כל מנת בשר 45 גרם חלבון וכל מנת סלט 15 גרם, ולפחות 135 גרם ביום:

$$45x + 15y \geq 135$$

אי־שליליות: מספר מנות אינו שלילי:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

אפשר לצמצם את האילוצים (נחלק את הראשון ב־56 ואת השני ב־15):

$$4x + y \leq 32$$

$$3x + y \geq 9$$

תשובה: $224x + 56y \leq 1792$, $45x + 15y \geq 135$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

סעיף ב

נסרטט את הישרים של האילוצים (נמצא לכל ישר את נקודות החיתוך עם הצירים):

- $4x + y = 32$: עובר דרך $(0, 32)$ ודרך $(8, 0)$.
- $3x + y = 9$: עובר דרך $(0, 9)$ ודרך $(3, 0)$.

אילוץ הקלוריות הוא „קטן או שווה", ולכן התחום **מתחת** לישר $4x + y = 32$. אילוץ החלבון הוא „גדול או שווה", ולכן התחום **מעל** לישר $3x + y = 9$ (בדיקה: הנקודה $(0, 0)$ מקיימת $0 \leq 32$ אבל לא $0 \geq 9$). יחד עם $x \geq 0,\ y \geq 0$ התחום הוא „רצועה" ברביע הראשון בין שני הישרים.

שני הישרים אינם נחתכים ברביע הראשון. נבדוק בשיטת השוואת מקדמים (המקדם של y זהה, נחסר):

$$\begin{cases} 4x + y = 32 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה:

$$x = 23$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$4 \cdot 23 + y = 32$$

$$y = 32 - 92 = -60$$

$y < 0$, ולכן נקודת החיתוך מחוץ לתחום. קודקודי התחום הם נקודות החיתוך של הישרים עם הצירים.

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו (3,0), (8,0), (0,32), (0,9)

התחום האפשרי הוא המרובע שקודקודיו $(0, 9),\ (0, 32),\ (8, 0),\ (3, 0)$.

תשובה: התחום הוא המרובע שקודקודיו $(0, 9),\ (0, 32),\ (8, 0),\ (3, 0)$ (ראו סרטוט).

סעיף ג

מנת בשר עולה 26 ש"ח ומנת סלט 12 ש"ח. פונקציית המטרה היא המחיר הכולל:

$$f(x, y) = 26x + 12y$$

תשובה: $f(x, y) = 26x + 12y$

סעיף ד

רונן רוצה לשלם את המחיר **הנמוך** ביותר, ולכן מחפשים את הערך המינימלי של פונקציית המטרה. הוא מתקבל באחד מקודקודי התחום:

קודקוד $f = 26x + 12y$

$(3, 0) \quad 26 \cdot 3 = 78$

$(8, 0) \quad 26 \cdot 8 = 208$

$(0, 32) \quad 12 \cdot 32 = 384$

$(0, 9) \quad 12 \cdot 9 = 108$

המחיר המינימלי הוא 78 ש"ח, בנקודה $(3, 0)$: 3 מנות בשר ואף מנת סלט.

תשובה: 3 מנות בשר ו־0 מנות סלט ירוק (מחיר 78 ש"ח).

סעיף ה

האילוצים לא השתנו, ולכן התחום זהה. פונקציית המטרה החדשה: $f(x, y) = 37x + 12y$.

קודקוד $f = 37x + 12y$

$37 \cdot 3 = 111 \quad (3, 0)$

$37 \cdot 8 = 296 \quad (8, 0)$

$12 \cdot 32 = 384 \; (0, 32)$

$12 \cdot 9 = 108 \quad (0, 9)$

המינימום עבר לנקודה $(0, 9)$: 108 ש״ח. לכן חל שינוי – רונן צריך לאכול 9 מנות סלט ירוק ואף מנת בשר (במקום 3 מנות בשר).

תשובה: כן. עכשיו המחיר הנמוך ביותר (108 ש״ח) מתקבל ב־0 מנות בשר ו־9 מנות סלט.

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 2

2. שני מפעלים, מפעל א' ומפעל ב', מייצרים חולצות משני סוגים: חולצות ארוכות וחולצות קצרות.

נסמן: x – מספר החולצות הארוכות

y – מספר החולצות הקצרות

מערכת האילוצים של מפעל א' לייצור חולצות היא:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 2x - 20 \\ y \leq x + 30 \end{cases}$$

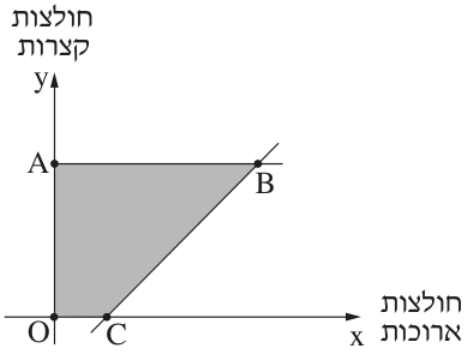
מערכת האילוצים של מפעל ב' לייצור חולצות היא:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq x - 20 \\ y \leq 60 \end{cases}$$

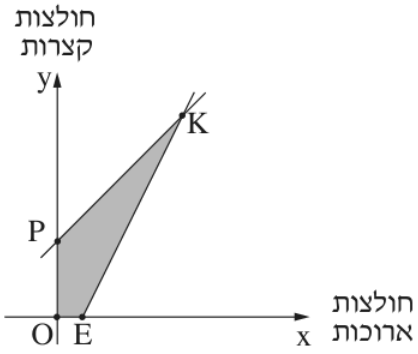
א. שני הגרפים שלפניכם מתארים את התחומים האפשריים של מערכות האילוצים של כל אחד מן המפעלים א' ו־ב'.

קבעו איזה מן הגרפים מתאים למפעל א' ואיזה מהם מתאים למפעל ב'.

גרף 1



גרף 2



הרווח של כל מפעל על חולצה ארוכה הוא 50 שקלים ועל חולצה קצרה – 30 שקלים.

ב. **(1)** כתבו את פונקציית המטרה של הרווח של המפעלים ממכירת החולצות.

(2) קבעו באיזה מן המפעלים, מפעל א' או מפעל ב', הרווח המקסימלי על החולצות הוא גבוה יותר.

מהו הרווח המקסימלי של מפעל זה?

ג. חשבו בכמה שקלים גדול הרווח המקסימלי של המפעל, שמצאתם בסעיף ב, מן הרווח המקסימלי של המפעל האחר.

פתרון מלא

סעיף א

מפעל ב' כולל את האילוץ $y \leq 60$. הישר $y = 60$ הוא ישר אופקי, והתחום נמצא מתחתיו. רק בגרף 1 יש לתחום צלע עליונה אופקית (הקטע AB), ולכן גרף 1 מתאים למפעל ב'.

מפעל א': האילוצים $y \leq x + 30$ ו־$y \geq 2x - 20$ הם שני ישרים משופעים שנחתכים ברביע הראשון, והתחום הוא „משולש מחודד" ביניהם – כמו בגרף 2. נבדוק את הנקודות על הצירים:

- $y = x + 30$ חותך את ציר ה־y ב־$(0, 30)$ – זו הנקודה P.
- $y = 2x - 20$ חותך את ציר ה־x ב־$(10, 0)$ – זו הנקודה E.

לכן גרף 2 מתאים למפעל א'.

תשובה: גרף 2 מתאים למפעל א', וגרף 1 מתאים למפעל ב'.

סעיף ב (1)

הרווח מחולצה ארוכה (x) הוא 50 ש"ח ומחולצה קצרה (y) 30 ש"ח:

$$f(x, y) = 50x + 30y$$

תשובה: $f(x, y) = 50x + 30y$

סעיף ב (2)

נמצא את קודקודי התחום של כל מפעל ונציב בפונקציית המטרה.

מפעל א' (גרף 2): $O(0, 0)$, $E(10, 0)$, $P(0, 30)$, ו־K – חיתוך הישרים. נכתוב אותם בצורה $y - 2x = -20$ ו־$y - x = 30$. נמצא את K בשיטת השוואת מקדמים (המקדם של y זהה בשתי המשוואות):

$$\begin{cases} y - x = 30 \\ y - 2x = -20 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה:

$$-x - (-2x) = 30 - (-20)$$
$$x = 50$$

נציב $x = 50$ במשוואה $y - x = 30$:

$$y = 50 + 30 = 80$$
$$K(50, 80)$$

קודקוד	$f = 50x + 30y$
$O(0, 0)$	0
$E(10, 0)$	$50 \cdot 10 = 500$
$K(50, 80)$	$50 \cdot 50 + 30 \cdot 80 = 2500 + 2400 = 4900$
$P(0, 30)$	$30 \cdot 30 = 900$

התחום של מפעל א': O, E(10,0), K(50,80), P(0,30)

מפעל ב' (גרף 1): $O(0, 0)$, $C(20, 0)$ (חיתוך $y = x - 20$ עם ציר ה־x), $A(0, 60)$, ו־B – חיתוך $y = -20$ עם $y - x = 60$. נציב $y = 60$ במשוואה השנייה:

$$60 - x = -20$$
$$x = 80$$
$$B(80, 60)$$

קודקוד	$f = 50x + 30y$
$O(0, 0)$	0
$C(20, 0)$	$50 \cdot 20 = 1000$

$$B(80,60) \quad 50 \cdot 80 + 30 \cdot 60 = 4000 + 1800 = 5800$$

$$A(0,60) \quad 30 \cdot 60 = 1800$$

התחום של מפעל ב': O, C(20,0), B(80,60), A(0,60)

הרווח המקסימלי של מפעל א' הוא 4,900 ש"ח ושל מפעל ב' 5,800 ש"ח. לכן הרווח המקסימלי גבוה יותר במפעל ב': 5,800 ש"ח.

תשובה: במפעל ב'. הרווח המקסימלי שלו הוא 5,800 ש"ח.

סעיף ג

מחסרים את הרווח המקסימלי של מפעל א' (4,900 ש"ח) מהרווח המקסימלי של מפעל ב' (5,800 ש"ח):

$$5800 - 4900 = 900$$

תשובה: הרווח המקסימלי של מפעל ב' גדול ב־900 ש"ח.

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 2

2. נדב פתח בביתו פיצרייה משפחתית קטנה. בשעות אחר הצוהריים הוא מכין פיצות משפחתיות ואישיות.

כמות הבצק לפיצה, זמן האפייה והרווח הנקי ממנה, נתונים בטבלה שלהלן, לפי גודל הפיצה:

	כמות בצק לפיצה	זמן אפייה	רווח נקי לפיצה
פיצה משפחתית	300 גרם	12 דקות	25 שקלים
פיצה אישית	100 גרם	8 דקות	18 שקלים

נדב יכול להתחיל לאפות פיצה חדשה רק אחרי שמסתיימת אפיית הפיצה הקודמת.

ביום מסוים היו לנדב 2,700 גרם בצק לכל היותר ו־ 120 דקות של אפייה לכל היותר.

סַמנו ב־ x את מספר הפיצות המשפחתיות שהכין נדב ביום זה.

סַמנו ב־ y את מספר הפיצות האישיות שהכין נדב ביום זה.

א. **(1)** רִשמו את מערכת האילוצים של הבעיה.

(2) סַרטטו את התחום האפשרי של הבעיה.

ב. רִשמו את פונקציית המטרה של הבעיה.

ג. מהו הרווח המקסימלי האפשרי ביום זה ממכירת כל הפיצות?

פתרון מלא

סעיף א (1)

- בצק: פיצה משפחתית 300 גרם, אישית 100 גרם, לכל היותר 2700 גרם:

$$300x + 100y \leq 2700$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + y \leq 27$$

- זמן אפייה: 12 דקות ו־8 דקות, לכל היותר 120 דקות (אופים פיצה אחת בכל פעם, ולכן הזמנים מתחברים):

$$12x + 8y \leq 120$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + 2y \leq 30$$

- $x \geq 0,\ y \geq 0$

תשובה: $3x + y \leq 27,\ \ 3x + 2y \leq 30,\ \ x \geq 0,\ y \geq 0$

סעיף א (2)

- $3x + y = 27$: עובר דרך $(9, 0)$ ו־$(0, 27)$.
- $3x + 2y = 30$: עובר דרך $(10, 0)$ ו־$(0, 15)$.

שני האילוצים מסוג $\geq$, ולכן התחום מתחת לשני הישרים. נקודת החיתוך, בשיטת השוואת מקדמים (המקדם של x זהה, ולכן נחסר את המשוואות):

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 3x + y = 27 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה:

$$y = 3$$

נציב $y = 3$ במשוואה $3x + y = 27$:

$$3x + 3 = 27$$
$$3x = 24 \Rightarrow x = 8$$

התחום האפשרי: מרובע שקודקודיו (0,0), (9,0), (8,3), (0,15)
התחום הוא המרובע שקודקודיו $(0,15)\ ,(8,3)\ ,(9,0)\ ,(0,0)$.
תשובה: מרובע שקודקודיו $(0,15)\ ,(8,3)\ ,(9,0)\ ,(0,0)$.

סעיף ב
רווח נקי של 25 ש"ח לפיצה משפחתית ו־18 ש"ח לפיצה אישית:

$$f(x,y) = 25x + 18y$$

תשובה: $f(x,y) = 25x + 18y$

סעיף ג
הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב את הקודקודים:

קודקוד	$f = 25x + 18y$
$(0,0)$	0
$(9,0)$	$25 \cdot 9 = 225$
$(8,3)$	$25 \cdot 8 + 18 \cdot 3 = 200 + 54 = 254$
$(0,15)$	$18 \cdot 15 = 270$

המקסימום מתקבל ב־$(0,15)$: 0 פיצות משפחתיות ו־15 פיצות אישיות.
תשובה: הרווח המקסימלי הוא 270 ש"ח.

בגרות חורף נבצרים תשפ״ב (2022) • שאלה 3

3. בחנות הפרחים של יוסי מוכרים זרים משני סוגים: זר גדול וזר קטן.

הרכבי הזרים מתוארים בטבלה הבאה:

	ורדים	חרציות
זר גדול	3	10
זר קטן	6	4

לצורך הכנת הזרים יוסי קונה פרחים ממשתלה.
לפי הסיכום עם המשתלה, הוא חייב לרכוש לפחות 48 ורדים ולכל היותר 80 חרציות.

סמן ב- x את מספר הזרים הגדולים וב- y את מספר הזרים הקטנים.

א. רשום את מערכת האילוצים של הבעיה.
ב. סרטט את התחום האפשרי של הבעיה.

יוסי מוכר כל זר גדול במחיר של 45 שקלים וכל זר קטן במחיר של 30 שקלים.

ג. רשום את פונקציית המטרה.
ד. כמה זרים מכל סוג על יוסי למכור כדי שההכנסה שלו ממכירת הזרים תהייה מקסימלית?

אורי צריך 8 זרים גדולים ו- 6 זרים קטנים.

ה. האם יוסי יוכל לספק הזמנה זו? אם כן, מה תהיה ההכנסה של החנות מהזמנה זו? אם לא, הסבר מדוע.

פתרון מלא

סעיף א

x – מספר הזרים הגדולים, y – מספר הזרים הקטנים. לפי הטבלה: בזר גדול 3 ורדים ו־10 חרציות, בזר קטן 6 ורדים ו־4 חרציות.

- לפחות 48 ורדים: $3x + 6y \geq 48$
- לכל היותר 80 חרציות: $10x + 4y \leq 80$
- $x \geq 0,\ y \geq 0$

תשובה: $3x + 6y \geq 48,\ \ 10x + 4y \leq 80,\ \ x \geq 0,\ y \geq 0$

סעיף ב

- $3x + 6y = 48$: עובר דרך $(16, 0)$ ו־$(0, 8)$. התחום **מעל** הישר (≤).
- $10x + 4y = 80$: עובר דרך $(8, 0)$ ו־$(0, 20)$. התחום **מתחת** לישר (≥).

נקודת החיתוך, בשיטת השוואת מקדמים. נחלק את הראשונה ב־3 ואת השנייה ב־2, ונקבל מקדם זהה ל־y:

$$\begin{cases} x + 2y = 16 \\ 5x + 2y = 40 \end{cases}$$

נחסר את המשוואות:

$$4x = 24 \Rightarrow x = 6$$

נציב $x = 6$ במשוואה $x + 2y = 16$:

$$6 + 2y = 16$$

$$2y = 10 \Rightarrow y = 5$$

התחום האפשרי: משולש שקודקודיו (0,8), (0,20), (6,5)

התחום הוא המשולש שקודקודיו $(6,5)\ ,(0,20)\ ,(0,8)$.

תשובה: משולש שקודקודיו $(6,5)\ ,(0,20)\ ,(0,8)$**.**

סעיף ג

זר גדול 45 ש"ח, זר קטן 30 ש"ח:

$$f(x,y) = 45x + 30y$$

תשובה: $f(x,y) = 45x + 30y$

סעיף ד

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה מתקבל באחד מקודקודי התחום. נציב את הקודקודים:

קודקוד	$f = 45x + 30y$
$(0,8)$	$30 \cdot 8 = 240$
$(0,20)$	$30 \cdot 20 = 600$
$(6,5)$	$45 \cdot 6 + 30 \cdot 5 = 270 + 150 = 420$

ההכנסה המקסימלית, 600 ש"ח, מתקבלת ב־$(0,20)$.

תשובה: 0 זרים גדולים ו־20 זרים קטנים (הכנסה של 600 ש"ח).

סעיף ה

נבדוק את הנקודה $(8,6)$ באילוצים:

- ורדים: $3 \cdot 8 + 6 \cdot 6 = 60 \geq 48$ ✓
- חרציות: $10 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 104 > 80$ ✗

הנקודה אינה בתחום האפשרי: אין מספיק חרציות (צריך 104 ויש לכל היותר 80).

תשובה: לא – להזמנה דרושות 104 חרציות, יותר מ־80.

בגרות חורף תשפ״ב (2022) • שאלה 2

2. לאדם מסוים ניתן תפריט לכמה ימים. לפי תפריט זה, עליו לשתות רק משקה ירוק או משקה כתום.

בטבלה שלפניך מוצגים נתונים על כמות הפחמימות וכמות החלבונים בכוס משקה ירוק ובכוס משקה כתום.

	פחמימות	**חלבונים**
כוס משקה ירוק	10 גרם	3 גרם
כוס משקה כתום	15 גרם	9 גרם

לפי התפריט הזה, על האדם לצרוך ביום אחד 120 גרם פחמימות לכל היותר ו־ 54 גרם חלבונים לפחות.

א. רשום את מערכת האילוצים של הבעיה.

ב. סרטט את התחום האפשרי של הבעיה.

מחיר כוס משקה ירוק הוא 20 שקלים ומחיר כוס משקה כתום הוא 15 שקלים.

ג. רשום את פונקציית המטרה.

ד. כמה כוסות מכל אחד מן המשקאות על האדם לשתות ביום כדי לעמוד בתנאי התפריט בהוצאה מינימלית?

פתרון מלא

סעיף א

נסמן: x – מספר כוסות המשקה הירוק ביום, y – מספר כוסות המשקה הכתום ביום.

- פחמימות לכל היותר 120 גרם: $10x + 15y \leq 120$
- חלבונים לפחות 54 גרם: $3x + 9y \geq 54$
- מספר כוסות אינו שלילי: $x \geq 0,\ y \geq 0$

תשובה: $10x + 15y \leq 120,\ \ 3x + 9y \geq 54,\ \ x \geq 0,\ y \geq 0$

סעיף ב

- $10x + 15y = 120$: עובר דרך $(12, 0)$ ו־$(0, 8)$. התחום **מתחת** לישר (≤).
- $3x + 9y = 54$: עובר דרך $(18, 0)$ ו־$(0, 6)$. התחום **מעל** לישר (≥).

נקודת החיתוך של שני הישרים, בשיטת השוואת מקדמים. נחלק את הראשונה ב־5 ואת השנייה ב־3, ונקבל מקדם זהה ל־y:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 24 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$$

נחסר את המשוואות:

$$x = 6$$

נציב $x = 6$ במשוואה $x + 3y = 18$:

$$6 + 3y = 18$$

$$3y = 12 \Rightarrow y = 4$$

התחום האפשרי: משולש שקודקודיו (0,6), (0,8), (6,4)

התחום האפשרי הוא המשולש שקודקודיו $(6,4)$, $(0,8)$, $(0,6)$ (בין שני הישרים, מימין לציר ה־y).

תשובה: משולש שקודקודיו $(6,4)$, $(0,8)$, $(0,6)$.

סעיף ג

ההוצאה היומית: כוס ירוקה 20 ש"ח, כוס כתומה 15 ש"ח:

$$f(x,y)=20x+15y$$

תשובה: $f(x,y)=20x+15y$

סעיף ד

מחפשים **מינימום** של פונקציית המטרה. הערך המינימלי מתקבל באחד מקודקודי התחום, ולכן נציב את הקודקודים:

קודקוד	$f=20x+15y$
$(0,6)$	$15\cdot 6=90$
$(0,8)$	$15\cdot 8=120$
$(6,4)$	$20\cdot 6+15\cdot 4$ $=120+60=180$

ההוצאה המינימלית היא 90 ש"ח, בנקודה $(0,6)$.

תשובה: 0 כוסות משקה ירוק ו־6 כוסות משקה כתום (הוצאה של 90 ש"ח).

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.