מודל ריבועי – כל השאלות עם פתרונות מלאים

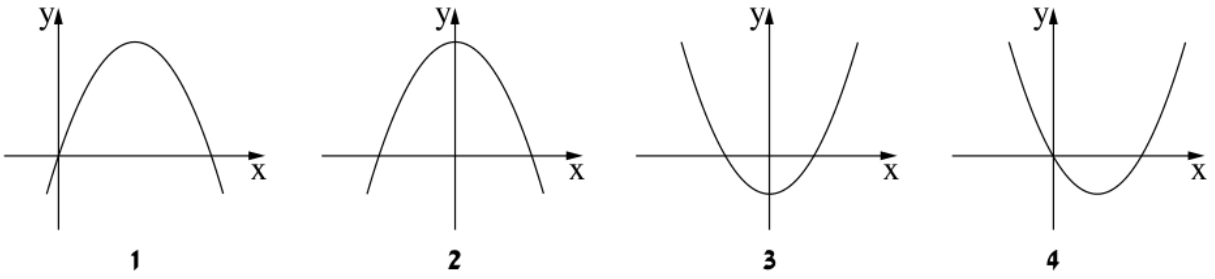
הכנה לבגרות במתמטיקה – 3 יחידות, כיתה י"א (שאלון 371) • 1 שאלות

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 6

6. נתונה הפרבולה: $f(x) = -x^2 + 3x$.

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה־ x .

ב. קבעו איזה גרף מן הגרפים 1–4 שלפניכם מתאר את הפרבולה.





בציור שלפניכם מתוארת בריכה ובה מזרקה.

המים במזרקה יוצאים בזרם מצד אחד של הבריכה, זורמים בצורה של פרבולה מעל הבריכה ונופלים בחזרה לצד הנגדי של הבריכה.

החלק החיובי של הפרבולה הנתונה בשאלה מתאר את המסלול של זרימת המים מעל פני המים בבריכה.

בגרף של הפרבולה ציר ה־ x מתאר את המרחק האופקי (במטרים) של זרם המים מנקודת המוצא, וציר ה־ y מתאר את הגובה (במטרים) של זרם המים.

פני המים בבריכה הם בגובה $y = 0$.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה שבה המים מגיעים לגובה מקסימלי.

ד. בעבור אילו ערכים של x זרם המים נמצא בעלייה?

ציפור עפה מעל הבריכה בגובה של 3 מטרים מעל פני המים בבריכה.

ה. האם הציפור נרטבה ממי המזרקה? נמקו.

פתרון מלא

סעיף א

בנקודות החיתוך עם ציר ה־x מתקיים $y = 0$:

$$-x^2 + 3x = 0$$

נוציא גורם משותף:

$$x(-x + 3) = 0$$

מכפלה שווה לאפס כאשר אחד הגורמים שווה לאפס:

$$x = 0$$

או

$$-x+3=0 \Rightarrow x=3$$

תשובה: $(0,0)$ **ו־**$(3,0)$

סעיף ב

המקדם של x^2 הוא -1 (שלילי), ולכן הפרבולה „בוכה" (פתוחה כלפי מטה) – מתאימים רק גרפים 1 ו־2.

לפי סעיף א הפרבולה עוברת דרך ראשית הצירים $(0,0)$ ודרך $(3,0)$, כלומר חותכת את ציר ה־x בראשית ובנקודה מימין לה. זה גרף 1 (גרף 2 חותך את ציר ה־x משני צדי ציר ה־y).

תשובה: גרף 1

סעיף ג

הגובה המקסימלי הוא בקודקוד הפרבולה. עבור $y=ax^2+bx+c$ עם $a=-1$, $b=3$:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{2\cdot(-1)}$$

$$=1.5$$

(הקודקוד נמצא גם באמצע בין נקודות החיתוך 0 ו־3.)

$$f(1.5)=-1.5^2+3\cdot 1.5$$

$$=-2.25+4.5=2.25$$

תשובה: $(1.5,\ 2.25)$

סעיף ד

זרם המים יוצא מ־$x=0$ ונופל למים ב־$x=3$. הפרבולה „בוכה", ולכן היא עולה משמאל לקודקוד ויורדת מימינו. זרם המים בעלייה מנקודת המוצא ועד הקודקוד:

$$0<x<1.5$$

תשובה: $0<x<1.5$

סעיף ה

הגובה המקסימלי שזרם המים מגיע אליו הוא 2.25 מטרים (סעיף ג).

$2.25<3$, כלומר המים לא מגיעים לגובה של 3 מטרים, ולכן הציפור לא נרטבת.

תשובה: לא – המים מגיעים לגובה של 2.25 מטרים לכל היותר, נמוך מ־3 מטרים.

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.